

ОБ ИНДЕКСЕ ВЕТВЛЕНИЯ ТОЧКИ СПЕКТРА АЛГЕБРАИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ

Б. Т. Батикян

Институт математики НАН Армении
E-mail : bag@instmath.sci.am

Резюме. В статье изучаются A -индекс ветвления и топологический индекс ветвления точки спектра алгебраического расширения Аренса–Гофмана полупростой коммутативной алгебры A .

§1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [1], мы продолжаем изучение алгебраического расширения $B = A[t]/(p)$ полупростой банаховой алгебры A . Здесь получено сравнительно простое и чисто алгебраическое описание точек ветвления конечнолистного накрытия $\pi_p : S(B) \rightarrow S(A)$, вызванного указанным расширением. В частности, для каждой точки y из спектра $S(B)$ расширения B мы определяем натуральное число $i_A(y)$, которое больше 1 в том и только в том случае, когда y – точка ветвления (Теорема 2.2). Так как $i_A(y)$ инвариантна относительно тех послыйных гомеоморфизмов, которые двойственны к сохраняющим A изоморфизмам алгебраических расширений (Теорема 2.3), то величину $i_A(y)$ естественно назвать A -индексом ветвления точки y . Если y есть точка ветвления, то общепринятый (топологический) индекс ветвления $\sigma(y)$ (т.е. число “ветвей” накрытия π_p , проходящих через точку y), вообще говоря, меньше $i_A(y)$ (даже в случае $A = C(X)$) (Примеры 2.1 и 2.3).

С другой стороны, для унитарных полиномов p , удовлетворяющих условию $i_A(p) = \varepsilon(p)$, имеем $\sigma(y) = i_A(y)$ для всякой точки $y \in S(B)$ (Теорема 2.4). Это утверждение верно, в частности, для всякого унитарного полинома p над максимальной антисимметричной алгеброй A , соответствующее накрытие π_p

которого не ветвится над границей Шилова ∂A (Следствие 2.4). Если при этом полином p неприводим над A , то индекс ветвления любой точки равен её кратности.

§1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Всюду ниже A обозначает комплексную, полупростую, коммутативную банахову алгебру с единицей, реализованную в виде алгебры непрерывных функций на своём компактном спектре X . Для произвольного замкнутого подмножества $E \subset X$, сужение $A|E$ представляет собой банахову алгебру непрерывных функций на E относительно канонической фактор нормы. Замыкание алгебры $A|E$ по $\sup$ -норме на E будет обозначаться через A_E . Спектр $S(A_E)$ равномерной алгебры A_E содержится в X и называется A -выпуклой оболочкой компакта E . Подмножество $K \subset X$ называется A -выпуклым, если $S(A_{\overline{K}}) = \overline{K}$. Открытые A -выпуклые подмножества спектра X образуют базу его топологии.

Функция h , определённая на открытом подмножестве $W \subset X$ называется A -голоморфной в точке $x \in W$, если существует окрестность U точки x такая, что $\overline{U} \subset W$ и $h|_{\overline{U}} \in A_{\overline{U}}$. Говорят, что функция h A -голоморфна на множестве W , если она A -голоморфна в каждой точке W .

Алгебра A называется регулярной, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и произвольной точки $x \notin F$ найдется функция f в A такая, что $f|_F = 0$ и $f(x) \neq 0$. Для всякого замкнутого подмножества E алгебра $A|E$ также регулярна и $S(A|E) = E$.

Алгебра A называется аналитичной, если всякая функция из A , равная нулю на непустом открытом подмножестве X , равна нулю тождественно.

Рассмотрим алгебру $A[t]$ всех полиномов от независимой переменной t с коэффициентами из A . Всякому такому полиному $q(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ степени $\deg q = n \geq 1$ можно сопоставить непрерывную на $X \times \mathbb{C}$ функцию

$$\tilde{q}(x, \lambda) = \sum_{k=0}^n a_k(x) \lambda^k,$$

а также полином $q_x(t) = \sum_{k=0}^n a_k(x) t^k$ с комплексными коэффициентами, где $x \in X$ — произвольная точка.

Множество

$$S(q) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{C} : q_x \neq 0 \text{ и } \tilde{q}(x, \lambda) = 0\}$$

называется **спектром** полинома q . Спектр любого полинома степени ≥ 1 над A непуст, а спектр унитарного полинома компактен.

Пусть p – унитарный полином над A . Если точка $y = (x, \lambda)$ принадлежит $S(p)$, то число λ является корнем полинома p_x . Кратность корня λ назовём кратностью точки y и будем обозначать через $\omega(y)$.

Унитарный полином p определяет непрерывное отображение

$$\pi_p : (x, \lambda) \longmapsto x$$

спектра $S(p)$ на X . Ясно, что для каждого $x \in X$ прообраз $\pi_p^{-1}(x)$ содержит не более $\deg p$ точек. Согласно важной теореме Линдберга ([2], Теорема 1.2), отображение π_p открыто, т.е. представляет собой конечнолистное накрытие. Более того, справедливо следующее утверждение (см. [2], а также [3]).

Лемма 1.1. Если $x_0 \in X$ и $\pi_p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_m\}$, то существуют окрестность U точки x_0 и попарно непересекающиеся окрестности $V_1, \dots, V_m$ точек $y_1, \dots, y_m$ такие, что

- (i) $\pi_p^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^m V_j$,
- (ii) $\pi_p(V_j) = U$, $j = 1, \dots, m$,
- (iii) для всякого $x \in U$ сумма кратностей точек множества $\pi_p^{-1}(x) \cap V_j$ равна $\omega(y_j)$.

В таких случаях будем говорить, что окрестность U правильно накрыта отображением π_p .

Точка $y \in S(p)$ называется **точкой ветвления**, если y не обладает такой окрестностью V , что $\pi_p|_V$ инъективно, и **простой точкой**, если π_p локально гомеоморфно в y . Множество всех точек ветвления $\mathcal{R}(p)$ замкнуто и нигде не плотно. Дискриминант $\mathcal{D}(p)$ полинома p , т.е. результат p и его формальной производной по t , является элементом алгебры A . Если дискриминант $\mathcal{D}(p)$ не обращается в нуль в точке x , то все точки слоя $\pi_p^{-1}(x)$ – простые.

Пусть (p) – главный идеал алгебры $A[t]$, образованный полиномом p . Напомним (см. [4], стр. 15), что радикалом идеала (p) называется множество

$$\text{Rad}(p) = \{q \in A[t] : q^k \in (p) \text{ для некоторого } k > 0\}.$$

Полином r принадлежит $\text{Rad}(p)$ тогда и только тогда, когда функция $\tilde{r}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $S(p)$ (см. [1], Следствие 2.1).

Следующие определения были введены автором в работе [1].

Целое число $i_A(p) = \min\{\deg w : w \text{ унитарен}, w \in \text{Rad}(p)\}$ назовём A -индексом полинома p . Всякий унитарный полином w , на котором достигается этот минимум, назовём минимальным полиномом полинома p .

Величина $l_A(p) = \min\{\deg r : r \in \text{Rad}(p), r \neq 0\}$, где минимум берётся по всем (не обязательно унитарным) ненулевым полиномам радикала $\text{Rad}(p)$, называется A -коиндексом полинома p .

A -индекс и A -коиндекс полинома p связаны со следующими числовыми характеристиками накрытия π_p :

$$\sigma(p) = \max\{\text{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}$$

и

$$\varepsilon(p) = \min\{\text{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\},$$

соотношением

$$\varepsilon(p) \leq l_A(p) \leq \sigma(p) \leq i_A(p) \quad (1.1)$$

(см. [1], Теорема 3.1). Если при этом алгебра A аналитична, то $\varepsilon(p) = l_A(p) = \sigma(p)$ (см. [1], Следствие 3.1).

Алгебраическим расширением A , порождённым полиномом

$$p = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0,$$

называется фактор-алгебра $B = A[t]/(p)$, реализуемая как алгебра полиномов степени не выше $n-1$, произведение которых подчинено соотношению :

$$t^n = -a_{n-1}t^{n-1} - \dots - a_1t - a_0.$$

Согласно результатам работы [5], алгебру B можно наделить структурой коммутативной банаховой алгебры так, что естественный гомоморфизм $A \rightarrow B$ осуществляет изометрическое и изоморфное вложение. Спектр алгебры B совпадает со спектром $S(p)$ полинома p , а накрытие $\pi_p : S(p) \rightarrow X$ есть отображение спектров, двойственное к вложению A в B .

Вообще говоря, банахова алгебра B не полупроста. Её радикал $\text{Rad}(B)$ совпадает с образом радикала $\text{Rad}(p)$ идеала (p) при каноническом эпиморфизме $A[t] \rightarrow B$. Преобразование Гельфанда $\widehat{b}(x, \lambda)$ элемента b совпадает с сужением функции $\tilde{b}(x, \lambda)$ на $S(p)$.

Пусть B и D – алгебраические расширения алгебры A , порождённые соответственно унитарными полиномами p и q . Гомоморфизм $\Phi : \widehat{B} \rightarrow \widehat{D}$ называется **полулинейным**, если Φ осуществляет автоморфизм алгебры A . Двойственное к Φ отображение Φ^* гомеоморфно отображает спектр $S(A)$ на себя. Более того, Φ^*

есть послойный гомеоморфизм, поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S(q) & \xrightarrow{\Phi^*} & S(p) \\ \downarrow \pi_q & & \downarrow \pi_p \\ S(A) & \xrightarrow{\Phi^*} & S(A) \end{array}$$

является коммутативной.

Гомоморфизм $\chi : A \rightarrow C$ двух коммутативных полупростых банаховых алгебр можно продолжить до гомоморфизма

$$\bar{\chi} : A[t] \rightarrow C[t], \quad \bar{\chi} : \sum_{k=0}^m a_k t^k \mapsto \sum_{k=0}^m \chi(a_k) t^k,$$

а затем и до гомоморфизма $A[t]/(p) \rightarrow C[t]/(\bar{\chi}(p))$. Указанный гомоморфизм алгебраических расширений будем обозначать тем же символом $\bar{\chi}$.

§2. ИНДЕКС ВЕТВЛЕНИЯ

В настоящем параграфе мы введём и обсудим понятие A -индекса ветвления точки спектра алгебраического расширения полупростой банаховой алгебры.

Пусть A – банахова алгебра непрерывных на своём компактном спектре X функций, B – алгебраическое расширение A , порождённое унитарным полиномом p , и $\pi_p : S(B) \rightarrow X$ – конечнолистное накрытие, вызванное этим расширением. Зафиксируем произвольную точку $y_0 = (x_0, \lambda_0)$ из $S(B)$ кратности $\omega(y_0)$, и через $m_0 = \text{card} \pi_p^{-1}(x_0)$ обозначим число точек слоя, накрывающего x_0 .

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \Xi}$ – база замыканий A -выпуклых окрестностей точки x_0 . Понятно, что множество Ξ есть направленное множество относительно порядка

$$\beta \succ \alpha \iff X_\beta \subset X_\alpha.$$

Соотнесём каждому $\alpha \in \Xi$ алгебру $A_\alpha = A_{X_\alpha}$ и гомоморфизм сужения $\chi_\alpha : A \rightarrow A_\alpha$, сопоставляющий функции $f \in A$ её сужение на X_α . Если алгебра A регулярна, то мы полагаем $A_\alpha = A|X_\alpha$. В этом случае все гомоморфизмы χ_α сюръективны.

Продолжим гомоморфизм χ_α до гомоморфизма

$$\bar{\chi}_\alpha : A[t] \rightarrow A_\alpha[t]$$

алгебр полиномов и рассмотрим алгебраическое расширение B_α алгебры A_α , порождённое полиномом $\bar{\chi}_\alpha(p)$. Спектр алгебры B_α , совпадающий с $\pi_p^{-1}(X_\alpha)$, разбивается на не более m_0 открыто-замкнутых неразложимых подмножеств, проектирующихся на X_α . Пусть Y_α – то из этих подмножеств, которое содержит y_0 .

Тогда по теореме Шилова, алгебра B_α содержит идемпотент e_α , преобразованием Гельфанда которого является характеристическая функция множества Y_α . При этом, банахова алгебра $D_\alpha = e_\alpha B_\alpha$ есть прямое слагаемое B_α , и $S(D_\alpha) = Y_\alpha$.

Всякой паре α, β элементов из Ξ , связанных соотношением $\beta \succ \alpha$, сопоставим гомоморфизм сужения $\chi_{\alpha\beta} : A_\alpha \rightarrow A_\beta$. Как отмечалось в предыдущем параграфе, $\chi_{\alpha\beta}$ продолжается до гомоморфизма $\bar{\chi}_{\alpha\beta} : B_\alpha \rightarrow B_\beta$ алгебраических расширений, а $\bar{\chi}_{\alpha\beta}$ естественно порождает гомоморфизм $\hat{\chi}_{\alpha\beta} : \hat{B}_\alpha \rightarrow \hat{B}_\beta$ алгебр преобразований Гельфанда. Заметим, что $\bar{\chi}_{\alpha\beta}(D_\alpha)$ содержится в D_β . Очевидно, $\bar{\chi}_{\alpha\beta}(e_\alpha)$ является идемпотентом в B_β , значение преобразования Гельфанда которого в точке y_0 равно 1. Следовательно, $\bar{\chi}_{\alpha\beta}(e_\alpha) = e_\beta$ и

$$\bar{\chi}_{\alpha\beta}(D_\alpha) = \bar{\chi}_{\alpha\beta}(e_\alpha B_\alpha) = e_\beta \bar{\chi}_{\alpha\beta}(B_\alpha) \subset D_\beta.$$

Подчеркнём, что алгебра D_α , вообще говоря, не является алгебраическим расширением A_α . Тем не менее, как мы сейчас убедимся, она будет таковой для достаточно “больших” α .

По Лемме 1.1 существует $\alpha_0 \in \Xi$ такое, что для всех $\alpha \succ \alpha_0$ множество X_α содержится в правильно накрытой окрестности точки x_0 . Следовательно, пересечение слоя $\pi_p^{-1}(x_0)$ с Y_α сводится к y_0 , а для любого $x \in X_\alpha$ сумма кратностей точек из $\pi_p^{-1}(x) \cap Y_\alpha$ равна $\omega(y_0)$. Тогда, согласно факторизационной теореме Линдберга (см. [2], Теорема 2.1), полином $\bar{\chi}_\alpha(p)$ единственным образом разлагается в произведение унитарных над A_α полиномов p_α и r_α , для которых

$$\deg p_\alpha = \omega(y_0), \quad S(p_\alpha) = Y_\alpha \quad \text{и} \quad S(r_\alpha) = \pi_p^{-1}(X_\alpha) \setminus Y_\alpha.$$

Теорема 2.1. *Если $\alpha \succ \alpha_0$, то D_α изоморфна алгебраическому расширению алгебры A_α , порождённому полиномом p_α .*

Доказательство. Так как $\bar{\chi}_\alpha(p) = p_\alpha r_\alpha$, то идеалы (p_α) и (r_α) содержат идеал $(\bar{\chi}_\alpha(p))$. Благодаря этому возникают сюръективные A_α -гомоморфизмы τ_α и ϱ_α алгебры B_α на $A_\alpha[t]/(p_\alpha)$ и $A_\alpha[t]/(r_\alpha)$ соответственно. Ясно, что $\tau_\alpha(e_\alpha)$ есть обратимый идемпотент в $A_\alpha[t]/(p_\alpha)$, и поэтому $\tau_\alpha(e_\alpha) = 1$. В частности,

$$\tau_\alpha(D_\alpha) = \tau_\alpha(e_\alpha B_\alpha) = A_\alpha[t]/(p_\alpha).$$

В то же время, $\varrho_\alpha(e_\alpha)$ нильпотентен, и поэтому $e_\alpha \in (r_\alpha)$. Чтобы проверить инъективность гомоморфизма $\tau_\alpha : D_\alpha \rightarrow A_\alpha[t]/(p_\alpha)$, заметим, что если $b \in D_\alpha$ и $\tau_\alpha(b) = 0$, то $b = e_\alpha s$, где $\tau_\alpha(s) = 0$. Следовательно, $s \in (p_\alpha)$ и $b \in (\bar{\chi}_\alpha(p))$. Теорема 2.1 доказана.

A_α -индекс полинома p_α обозначим через i_α и отметим два важных обстоятельства. Во-первых, так как степень полинома p_α равна $\omega(y_0)$, то для $\alpha \succ \alpha_0$ имеют место неравенства

$$\sigma_\alpha \leq i_\alpha \leq \omega(y_0), \quad (2.1)$$

где

$$\sigma_\alpha = \sigma(p_\alpha) = \max\{\text{card}(\pi_p^{-1}(x) \cap Y_\alpha) : x \in X_\alpha\} \quad (2.2)$$

– наибольшее число листов накрытия $\pi_\alpha = \pi_p|_{Y_\alpha}$, отвечающего расширению D_α . Во-вторых, если $\beta \succ \alpha$, то из единственности фактора p_α следует, что $p_\beta = \bar{\chi}_{\alpha\beta}(p_\alpha)$. Отсюда, учитывая $\pi_\beta = \pi_\alpha|_{Y_\beta}$, приходим к неравенствам

$$i_\beta \leq i_\alpha \leq i_A(p) \quad \text{и} \quad \sigma_\beta \leq \sigma_\alpha \leq \sigma(p). \quad (2.3)$$

Неравенства (2.3) означают, что последовательности $\{i_\alpha\}$ и $\{\sigma_\alpha\}$ стабилизируются, т.е. существует такое $\alpha_1 \in \Xi$, $\alpha_1 \succ \alpha_0$, что для любых $\alpha \succ \alpha_1$ и $\beta \succ \alpha_1$ имеем

$$i_\alpha = i_\beta = i_A(y_0) \quad \text{и} \quad \sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma(y_0),$$

где

$$i_A(y_0) = \min\{i_\alpha : \alpha \succ \alpha_0\} \quad \text{и} \quad \sigma(y_0) = \min\{\sigma_\alpha : \alpha \succ \alpha_0\}. \quad (2.4)$$

Замечание. Числа $i_A(y_0)$ и $\sigma(y_0)$ очевидно не зависят от выбора конкретной базы A -выпуклых окрестностей точки x_0 .

Теорема 2.2. Пусть y_0 принадлежит спектру алгебраического расширения полупростой алгебры A . Тогда следующие условия эквивалентны :

- (i) y_0 – простая точка,
- (ii) $\sigma(y_0) = 1$,
- (iii) $i_A(y_0) = 1$.

Доказательство. Условие (i) означает существование некоторого $\alpha \in \Xi$, для которого накрытие $\pi_\alpha : Y_\alpha \rightarrow X_\alpha$ есть гомеоморфизм. Следовательно, эквивалентность (i) и (ii) непосредственно следует из (2.2). А по Теореме 2.3 из [1] гомеоморфность π_α эквивалентна равенству единице A_α -индекса полинома p_α . Теорема 2.2 доказана.

Заметим, что если y_0 есть простая точка, то в силу локальной гомеоморфности π_p в y_0 выражение

$$h = \hat{t} \circ \pi_p^{-1} \quad (2.5)$$

определяет в некоторой окрестности точки $x_0 = \pi_p(y_0)$ непрерывную функцию.

Следствие 2.1. Если y_0 – простая точка, то функция (2.5) либо A -голоморфна в x_0 , либо локально в x_0 принадлежит A .

Доказательство. По Теореме 2 и Теореме 2.3 из [1], найдутся $\alpha \in \Xi$ и функция $f_\alpha \in A_\alpha$ такие, что $p_\alpha(t) = (t - f_\alpha)^k$, где $k = \omega(y_0)$. Так как $\tilde{p}_\alpha$ обращается в нуль на Y_α , то $\hat{t}|Y_\alpha \circ \pi_p^{-1} = f_\alpha$ на X_α . В частности, если алгебра A регулярна, то f_α принадлежит $A|X_\alpha$.

Следствие 2.2. Если p – унитарный полином над регулярной алгеброй A , то $l_A(p) = \varepsilon(p)$.

Доказательство. Достаточно установить наличие в $\text{Rad}(p)$ ненулевого полинома степени $k = \varepsilon(p)$. Для этого, пусть $x_0 \in X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ и $\text{card } \pi_p^{-1}(x_0) = k$. Поскольку все точки слоя $\pi_p^{-1}(x_0) = \{y_1, \dots, y_k\}$ суть простые точки, то в силу Следствия 2.1 найдутся окрестность X_α точки x_0 , попарно непересекающиеся компоненты $Y_{1\alpha}, \dots, Y_{k\alpha}$ множества $\pi_p^{-1}(X_\alpha)$, содержащие соответственно точки $y_1 \in Y_{1\alpha}, \dots, y_k \in Y_{k\alpha}$ и функции $f_1, \dots, f_k$ из A такие, что π_p гомеоморфно отображает $Y_{j\alpha}$ на X_α , и $\hat{t}|Y_{j\alpha} \circ \pi_p^{-1} = f_j$ для всех $j = 1, \dots, k$. Выберем функцию $g \in A$ так, чтобы $g = 0$ на $X \setminus X_\alpha$ и $g(x_0) = 1$. Тогда ясно, что $r = g \prod_{j=1}^k (t - f_j)$ есть ненулевой полином над A , причём $\tilde{r}(x, \lambda) = 0$ всюду на $S(p)$. Следствие 2.2 доказано.

Покажем теперь, что величина $i_A(y_0)$ инвариантна относительно тех послойных гомеоморфизмов, которые двойственны к полулинейным изоморфизмам алгебраических расширений.

Теорема 2.3. Пусть B и B' – алгебраические расширения полупростой алгебры A , порождённые соответственно полиномами p и q . Далее, пусть Φ – полулинейный изоморфизм алгебры $\hat{B}$ на $\hat{B}'$, и Φ^* – двойственный к Φ послойный гомеоморфизм $S(B')$ на $S(B)$. Если $\Phi^*(y'_0) = y_0$, то $i_A(y_0) = i_A(y'_0)$.

Доказательство. Пусть $\pi_p(y_0) = x_0$ и $\pi_q(y'_0) = x'_0$. Если $\{X'_\alpha\}$ – база замкнутых A -выпуклых окрестностей x'_0 , то $\{\Phi^*(X'_\alpha)\}$ – база замкнутых A -выпуклых окрестностей для x_0 . Положим

$$X_\alpha = \Phi^*(X'_\alpha), \quad A_\alpha = A_{X_\alpha} \quad \text{и} \quad A'_\alpha = A_{X'_\alpha}$$

и заметим, что отображение

$$\eta_\alpha : f. \longmapsto f. \circ \Phi^*$$

осуществляет изоморфизм алгебры A_α на A'_α .

Пусть B_α – алгебраическое расширение A_α , порождённое полиномом $\bar{\chi}_\alpha(p)$, а B'_α – алгебраическое расширение A'_α , порождённое полиномом $\bar{\chi}'_\alpha(q)$. Далее, пусть D_α (или, соответственно, D'_α) – прямое слагаемое алгебры B_α (соответственно, B'_α), отвечающее той компоненте её спектра $\pi_p^{-1}(X_\alpha)$ (соответственно, $\pi_q^{-1}(X'_\alpha)$), которая содержит точку y_0 (соответственно, y'_0). По Теореме 2.1 найдётся такое α_0 , что при $\alpha \succ \alpha_0$ алгебра D_α есть алгебраическое расширение A_α , порождённое фактором p_α полинома $\bar{\chi}_\alpha(p)$, а алгебра D'_α – алгебраическое расширение A'_α , порождённое фактором q_α полинома $\bar{\chi}'_\alpha(q)$.

Рассмотрим инъективный гомоморфизм

$$\Phi_\alpha : \hat{b} \mapsto \hat{b} \circ \Phi^*$$

алгебры $\hat{B}_\alpha$ в алгебру $C(\pi_q^{-1}(X'_\alpha))$. Понятно, что если $\hat{b} = \sum_{k=0}^m a_k \hat{t}^k$, где $a_k \in A_\alpha$, то $\Phi_\alpha(\hat{b}) = \sum_{k=0}^m \eta_\alpha(a_k) \Phi(\hat{t})^k$. Это означает, что Φ_α есть полулинейный гомоморфизм из $\hat{B}_\alpha$ в $\hat{B}'_\alpha$. Отметим также, что в силу изоморфности Φ функции $\{\Phi(\hat{t})^k\}_{k=0}^m$, где $m = i_A(p) = i_A(q)$, являются образующими A -модуля $\hat{B}'$, а значит и A_α -модуля $\hat{B}'_\alpha$. Таким образом, Φ_α – изоморфизм.

Ясно, что при этом Φ_α изоморфно отображает $\hat{D}_\alpha$ на $\hat{D}'_\alpha$. Но тогда для всех $\alpha \succ \alpha_0$ A_α -индекс полинома p_α равен A'_α -индексу полинома q_α (см. [1], Следствие 3.2). Доказательство завершено.

Определение. Целое число $i_A(y_0)$ назовём A -индексом ветвления точки y_0 спектра расширения $A[t]/(p)$ полупростой банаховой алгебры A .

Конечно, число

$$\sigma(y_0) = \min \left\{ \max \{ \text{card}(\pi_p^{-1}(x) \cap Y_\alpha) : x \in X_\alpha \} \right\}, \quad (2.6)$$

также характеризует точку ветвления спектра алгебры B . В математической литературе принято именно $\sigma(y_0)$ определять как индекс ветвления точки y_0 (см., например [6], стр. 133 или [7], стр. 302). Поскольку $\sigma(y_0)$, очевидно, инвариантно относительно произвольных послойных гомеоморфизмов пространства $S(B)$, то это число мы будем называть топологическим индексом ветвления точки y_0 .

Из (2.1) следует, что A -индекс и топологический индекс связаны соотношением

$$\sigma(y_0) \leq i_A(y_0) \leq \omega(y_0). \quad (2.7)$$

Следующий пример показывает, что топологический индекс точки ветвления может быть меньше её A -индекса.

Пример 2.1. Пусть Δ – открытый круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на комплексной плоскости и $A(\overline{\Delta})$ – равномерная алгебра всех непрерывных на замкнутом круге $\overline{\Delta}$ функций, которые голоморфны внутри Δ . Положим

$$A = \{f \in A(\overline{\Delta}) : f'(0) = 0\}$$

и рассмотрим неприводимый над A полином

$$p = t^4 - 6z^2t^2 + 8z^3t - 3z^4 = (t - z)^3(t + 3z). \quad (2.8)$$

Ясно, что $y_0 = (0, 0)$ есть единственная точка ветвления в $S(p)$. Кроме того, $\sigma(y_0) = 2$ и $\omega_p(y_0) = 4$. Нетрудно видеть, что радикал $\text{Rad}(p)$ не может содержать унитарных полиномов второй степени. В то же время полиномы $w = t^3 - 7z^2t + 6z^3$ принадлежат $\text{Rad}(p)$, так как функция $\tilde{w}(z, \lambda)$ равна нулю на $S(p)$. Следовательно $i_A(p) = 3$. Положим теперь $\overline{\Delta}_\alpha = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$A_\alpha = \{f \in A(\overline{\Delta}_\alpha) : f'(0) = 0\},$$

$p_\alpha = p$ и $i_\alpha = 3$ для всех α . Следовательно, $i_A(y_0) = 3$.

Теорема 2.4. Если алгебраическое расширение B порождено унитарным полиномом p , для которого $i_A(p) = \varepsilon(p)$, то $\sigma(y_0) = i_A(y_0)$ для всякой точки $y_0 \in S(B)$.

Доказательство. В условиях теоремы, $i_A(p) = l_A(p)$ и следовательно полином p обладает единственным минимальным полиномом w (см. [1], Теорема 2.2), причём $\hat{B} = A[t]/(w)$ (см. [1], Теорема 3.4). Отсюда и из Теоремы 2.3 следует, что A -индекс ветвления точки y_0 не зависит от того рассматривается y_0 как точка $S(p)$ или как точка $S(w)$. Следовательно, можно считать, что расширение B порождено минимальным полиномом w .

Так как $\deg w = \varepsilon(w)$, то дискриминант $\mathcal{D}(w)$ равен нулю только в точках нигде не плотного множества $\pi_w(\mathcal{R}(w))$. В частности, для всех $\alpha \succ \alpha_0$ дискриминант полинома $\overline{\chi}_\alpha(w)$, а значит и его фактора w_α суть ненулевые элементы алгебры A_α . Отсюда следует, что $\sigma_\alpha = i_\alpha = \omega_w(y_0)$, где $\omega_w(y_0)$ – кратность y_0 как точки спектра полинома w .

Следствие 2.3. Если в Теореме 2.4 полином p неприводим над A , то $\sigma(y_0) = i_A(y_0) = \omega_p(y_0)$ для произвольной точки y_0 из $S(B)$.

Пусть A – регулярная или аналитическая алгебра, и унитарный полином $p \in A[t]$ удовлетворяет условию $i_A(p) = l_A(p)$. Тогда согласно Следствию 3.1 из [1] и Следствию 2.2 имеем $i_A(p) = \varepsilon(p)$, и, следовательно, можно применить Теорему 2.4. Следующий пример показывает, что, вообще говоря, условие $i_A(p) = \varepsilon(p)$ Теоремы 2.4 нельзя ослабить до условия $i_A(p) = l_A(p)$.

Пример 2.2. Пусть D_0 – алгебра функций f , непрерывных на компакте

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| \leq 1, |z_2| = 1\}, \quad (2.9)$$

для которых $f(z_1, z_2^0)$ голоморфно зависит от z_1 в круге

$$\{(z_1, z_2^0) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| \leq 1\}$$

при любом фиксированном $z_2^0, |z_2^0| = 1$, а $f(0, z_2)$ допускает голоморфное продолжение внутрь круга

$$\{(0, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_2| \leq 1\}. \quad (2.10)$$

Согласно [8], спектр X алгебры D_0 состоит из заполненного тора (2.9) и замкнутого круга (2.10), склеенных по окружности

$$\{(0, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_2| = 1\},$$

а граница Шилова ∂D_0 совпадает с двумерным тором

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| = 1, |z_2| = 1\}.$$

Рассмотрим равномерную алгебру

$$D = \left\{ f \in D_0 : \frac{\partial f(0, 0)}{\partial z_2} = 0 \right\},$$

спектр которой совпадает с X , и унитарный полином

$$p = t^4 - 6z_2^2 t^2 + 8z_2^3 t + z_1^4 - 3z_2^4$$

с коэффициентами из D . Дискриминант $\mathcal{D}(p) = -256z_1^8(27z_2^4 - z_1^4)$ нигде на $\partial D = \partial D_0$ не обращается в нуль. Это означает, что радикал $\text{Rad}(p)$ не может содержать полиномов степени ниже четырех, и потому $i_A(p) = l_A(p) = 4$.

Нетрудно найти индексы точки $y_0 = (0, 0, 0)$ спектра полинома p . Действительно, если в качестве замкнутой окрестности точки $x_0 = (0, 0)$ взять круг (2.10), то сужение $\chi(D)$ алгебры D на эту окрестность будет естественно изоморфно алгебре A из Примера 2.1, а полином $\bar{\chi}(p)$ сведётся к полиному (2.8). Следовательно, $i_D(y_0) = 3$ и $\sigma(y_0) = 2$.

Предположим, что алгебра A содержится в банаховой алгебре C и $S(C) = S(A) = X$. Тогда для любой точки $y \in S(p)$ будем иметь

$$\sigma(y) \leq i_C(y) \leq i_A(y).$$

При этом индекс точки y относительно алгебры $C(X)$ будет наименьшим. Однако, как показывает следующий пример, $C(X)$ -индекс точки ветвления не всегда равен её топологическому индексу.

Пример 2.3. Пусть $\{x_n\}$, $\{\delta_n\}$ и $\{\xi_n\}$ – убывающие и стремящиеся к нулю последовательности положительных чисел такие, что : 1) интервалы $E_n = [x_n - \delta_n, x_n + \delta_n]$ при различных значениях n не пересекаются ; и 2) $\xi_n > \delta_n$ при всех n .

Обозначим через X объединение интервалов E_n и предельной точки 0, и рассмотрим над алгеброй $C(X)$ унитарный полином $p = (t^2 - f)(t^2 - ht + g)$, где

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} (x - x_n)^2, & x \in [x_n - \delta_n, x_n] \\ 0, & x \in [x_n, x_n + \delta_n] \end{cases} \quad \text{и} \quad f(0) = 0; \\ h(x) &= 2\xi_n \quad \text{при} \quad x \in E_n \quad \text{и} \quad h(0) = 0; \\ g(x) &= \begin{cases} \xi_n^2, & x \in [x_n - \delta_n, x_n] \\ (x - \xi_n - x_n)^2, & x \in [x_n, x_n + \delta_n] \end{cases} \quad \text{и} \quad g(0) = 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что слой $\pi_p^{-1}(x_n)$ содержит две точки : $y_n = (x_n, 0)$ и $y'_n = (x_n, \xi_n)$, а $\pi_p^{-1}(0)$ содержит только одну точку $y_0 = (0, 0)$. Над всеми остальными точками компакта X расположены три точки, являющиеся простыми.

Если X_α – замкнутая окрестность точки x_n , то для точки y_n полином p_α , являющийся фактором полинома $\bar{\chi}_\alpha(p)$, сводится к полиному $t^2 - f$, а для точки y'_n сводится к полиному $t^2 - ht + g$. В обоих случаях $\sigma_\alpha = i_\alpha = 2$. Таким образом, топологические и $C(X)$ -индексы ветвления точек y_n и y'_n равны 2.

Пусть теперь X_α – замкнутая окрестность точки 0. Тогда $p_\alpha = p$ и $\sigma_\alpha = 3$, но $i_\alpha = 4$. Действительно, если бы полином $w = t^3 + h_2t^2 + h_1t + h_0$ с непрерывными коэффициентами принадлежал $\text{Rad}(p_\alpha)$, то по формулам Виета $h_2(x) = \xi_n$ при $x \in [x_n - \delta_n, x_n]$ и $h_2(x) = 2\xi_n$ при $x \in (x_n, x_n + \delta_n]$, что невозможно. Таким образом $\sigma(y_0) = 3$, а $i_{C(X)}(y_0) = 4$.

Ниже мы покажем, что если A – максимальная равномерная алгебра, то A -индекс точки спектра её алгебраического расширения всегда равен топологическому индексу. Но сначала обсудим свойства так называемой дискриминантной функции.

Для унитарного полинома p над полупростой алгеброй A рассмотрим открытое множество $W_{\sigma(p)} = \{x \in X : \text{card} \pi_p^{-1}(x) = \sigma(p)\}$, содержащееся в $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$ (см. [1]). Пусть x принадлежит $W_{\sigma(p)}$ и $y_1, \dots, y_{\sigma(p)}$, где $y_j = (x, \lambda_j)$ – точки слоя $\pi_p^{-1}(x)$ над x . Определим на $W_{\sigma(p)}$ ограниченную функцию

$$\mathcal{D}(x) = \prod_{j < k} (\hat{t}(y_j) - \hat{t}(y_k))^2 = \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2. \quad (2.11)$$

Поскольку (2.11) есть симметрический полином от корней $\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma(p)}$, то функция $\mathcal{D}(x)$ определена корректно и всюду на $W_{\sigma(p)}$ отлична от нуля. Согласно Следствию 2.1, $\mathcal{D}(x)$ A -голоморфна в каждой точке $W_{\sigma(p)}$.

Пусть x' – граничная точка $W_{\sigma(p)}$. Тогда, очевидно, $x' \in \pi_p(\mathcal{R}(p))$. Поэтому найдется точка $y' \in \pi_p^{-1}(x')$, топологический индекс ветвления которой больше 1. Другими словами, если X_α – некоторая правильно накрытая и замкнутая окрестность точки x' и Y_α – компонента множества $\pi_p^{-1}(X_\alpha)$, содержащая y' , то

$$\text{card}\{\pi_p^{-1}(x) \cap Y_\alpha\} > 1$$

для всякого $x \in X_\alpha \cap W_{\sigma(p)}$. Отсюда и из непрерывности функции $\hat{t}$ вытекает, что все предельные значения $\mathcal{D}$ в точке x' равны нулю. Полагая, что $\mathcal{D}(x) = 0$ при $x \in X \setminus W_{\sigma(p)}$, мы получаем функцию, непрерывную на X . (В частности, если алгебра A аналитична, то дискриминантная функция $\mathcal{D}(x)$ есть характеристическая функция множества $\pi_p(\mathcal{R}(p))$.)

Рассмотрим теперь равномерную алгебру $[A, \mathcal{D}]$, порождённую элементами алгебры A и функцией $\mathcal{D}$. Так как $\mathcal{D}$ является A -голоморфной функцией на множестве $X \setminus \mathcal{D}^{-1}(0)$, то спектры и границы Шилова алгебр $[A, \mathcal{D}]$ и A совпадают (теорема Гликсберга-Рикарта, см. [9], стр. 129).

Это означает, что функция $\mathcal{D}$ не может обращаться в нуль всюду на ∂A , и поэтому множество $W_{\sigma(p)}$ всегда имеет непустое пересечение с границей Шилова алгебры A .

Замечание 2.1. Последнее утверждение, выделяющее множество $W_{\sigma(p)}$ среди других множеств W_l , позволяет уточнить оценку коиндекса (1.1). Действительно, для унитарного полинома p из $A[t]$ положим

$$\varepsilon_0(p) = \min\{\text{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in \partial A \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}$$

и

$$\sigma_0(p) = \max\{\text{card}\pi_p^{-1}(x) : x \in \partial A \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))\}.$$

Тогда $\sigma_0(p) = \sigma(p)$, поскольку пересечение $W_{\sigma(p)} \cap \partial A$ непусто. Но $\varepsilon_0(p)$ может быть больше $\varepsilon(p)$ (см. Пример 2.2).

С другой стороны, $l_{C(\partial A)}(p) = \varepsilon_0(p)$ в силу Следствия 2.2, и

$$l_{C(\partial A)}(p) \leq l_A(p)$$

в силу инъективности оператора сужения $A \rightarrow C(\partial A)$. Таким образом, имеем $\varepsilon_0(p) \leq l_A(p) \leq \sigma(p)$.

Займёмся теперь алгебраическими расширениями максимальной равномерной алгебры. Пусть A – антисимметричная максимальная алгебра, граница Шилова ∂A которой есть собственное подмножество спектра X .

Теорема 2.5. Если для унитарного полинома p над A имеем $\pi_p(\mathcal{R}(p)) \subset X \setminus \partial A$, то $i_A(p) = \varepsilon(p)$.

Доказательство : Прежде всего отметим, что антисимметричная максимальная алгебра автоматически аналитична (см. [10], стр. 175), и следовательно $\varepsilon(p) = \sigma(p)$ в силу Следствия 3.1 из [1]. Для удобства положим $\sigma = \sigma(p)$. Тогда $X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p)) = W_\sigma$, множество $\pi_p(\mathcal{R}(p))$ совпадает с нулевым множеством дискриминантной функции $\mathcal{D}(x)$, а отображение

$$\pi_p : Y \setminus \pi_p^{-1}(\pi_p(\mathcal{R}(p))) \rightarrow X \setminus \pi_p(\mathcal{R}(p))$$

есть σ -листное, неразветвлённое и безграничное накрытие.

Так как спектры и границы Шилова равномерных алгебр $[A, \mathcal{D}]$ и A совпадают (теорема Гликсберга-Рикарта), то из максимальной A вытекает, что $[A, \mathcal{D}] = A$, т.е. функция $\mathcal{D}$ принадлежит A . При этом, согласно условиям теоремы, $\mathcal{D}^{-1}(0)$ есть собственное и нигде не плотное подмножество $X \setminus \partial A$.

Пусть $\mathcal{S}_k$ ($k = 1, \dots, \sigma$) – k -й элементарный симметрический полином от σ переменных. Если $\pi_p^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_\sigma\}$, то как и в случае с функцией $\mathcal{D}(x)$, функция

$$h_k(x) = \mathcal{S}_k(\hat{t}(y_1), \dots, \hat{t}(y_\sigma))$$

определяет ограниченную, A -голоморфную функцию на $W_\sigma = X \setminus \mathcal{D}^{-1}(0)$. Тогда по теореме Гликсберга об устранимых особенностях (см. [11], Теорема 4.8) найдется такая функция f_k из A , что $h_k(x) = f_k(x)$ при $x \in W_\sigma$.

Рассмотрим теперь полином

$$w(t) = t^\sigma - f_1 t^{\sigma-1} + \dots + (-1)^{\sigma-1} f_{\sigma-1} t + (-1)^\sigma f_\sigma$$

степени σ над A . По построению функция $\tilde{w}(x, \lambda)$ обращается в нуль на $\pi_p^{-1}(W_\sigma)$, а так как $\pi_p^{-1}(W_\sigma)$ – плотное подмножество $S(p)$, то $\tilde{w} = 0$ всюду на $S(p)$. Это означает, что A -индекс полинома p равен σ . Ясно, что дискриминантом для w служит функция $\mathcal{D}(x)$. Доказательство завершено.

Отсюда и из Теоремы 2.4 непосредственно вытекает

Следствие 2.4. Пусть алгебра A и полином p удовлетворяют условиям Теоремы 2.5, а B – соответствующее алгебраическое расширение алгебры A . Тогда A -индекс ветвления любой точки спектра B равен её топологическому индексу ветвления.

Заметим, что если полином p неприводим над A , то индекс ветвления равен кратности точки.

Abstract. The paper studies the branching A -index and the topological branching index of points of the spectrum of Arens-Hoffman algebraic extension of a semisimple commutative Banach algebras A .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Б. Т. Батикян, "Индекс и коиндекс унитарного полинома над полупростой коммутативной банаховой алгеброй," Изв. НАН Армении, серия Математика, том 37, № 3, стр. 3 - 20, 2002.
2. J. A. Lindberg, "Factorization of Polynomials over Banach Algebras," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 112, pp. 358 - 368, 1964.
3. J. Verdera, "Finitely generated projective extensions of uniform algebras," Pacif. J. Math., vol. 100, pp. 203 - 215, 1982.
4. М. Атья, И. Макдональд, Введение в Коммутативную Алгебру, Мир, Москва, 1972.
5. R. Arens and K. Hoffman, "Algebraic Extensions of Normed Algebras," Trans. Amer. Math. Soc., vol. 7, pp. 203 - 210, 1956.
6. Р. Ганнинг, Х. Росси, Аналитические Функции Многих Комплексных Переменных, Мир, Москва, 1969.
7. Р. Кроуэлл, Р. Фокс, Введение в Теорию Узлов, Мир, Москва, 1967.
8. Б. Т. Батикян, Е. А. Горин, "Замечание о нелокальных алгебрах," Зап. Науч. сем. ЛОМИ, том 65, стр. 172 - 177, 1976.
9. Т. Гамелин, Равномерные Алгебры, Мир, Москва, 1973.
10. G. Leibowitz, Lectures on Complex Function Algebras, Scott-Foresman, Chicago, 1970.
11. I. Glicksberg, "Maximal Algebras and a Theorem of Radó," Pacif. J. Math., vol. 14, pp. 919 - 941, 1964.

Поступила 4 октября 2006