Известия НАН Армении. Математика, **42**, № *2, 2007, 17–28*

НЕКОТОРЫЕ НОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА В ГЕОМЕТРИИ И В АНАЛИЗЕ

Г. А. Барсегян

Институт Математики, НАН Армении
E-mail : barseg@instmath.sci.am

Резюме. В статье приводятся некоторые новые неравенства, касающиеся ломанных, кривых, действительных и комплексных функций. Доказательства этих неравенств опирается на новый **принцип углов и длин** для кривых. Неравенство из комплексного анализа, названное **принципом производных**, имеет место для аналитических функций в произвольных областях и обобщается на широкий класс достаточно гладких комплексных функций. Новое неравенство для действительных функций двух переменных касается их множеств уровня. Для всех вышеупомянутых случаев, кривых и функций, получаем некоторые аналоги второй фундаментальной теоремы теории распределения значений мероморфных функций Неванлинны. Наконец, мы приводим новое **точечно-областное** неравенство которое выполняется для конечных точечных множеств в произвольной области.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство результатов для произвольных аналитических (или даже более общих) функций w в произвольных областях, формулируется в терминах a-точек функции w или в терминах обобщений понятия a-точки, таких как острова Альфорса или Гамма-линии. Таковы классический принцип аргумента, теория вычетов, теории Неванлинны–Альфонса [8], [1] и новая теория Гамма-кривых комплексных функций [5], [6], которую можно рассматривать как теорию множеств уровней действительных функций. Однако имеется только несколько утверждений в комплексном анализе, в терминах только значений функции w или её производных (но не a-точек и т.д.), т.е. "чистого типа". Это формула Коши и её следствия, неравенство Коши в случае аналитических функций и формула

Коши–Помпейю для гладких функций.

Эта работа открывает новый источник результатов “чистого” типа, которые имеют место для широких классов кривых, действительных и комплексных функций, сводящихся к неравенствам. Статья построена следующим образом.

В параграфе 1 получено неравенство для плоских кривых, которое используется в параграфе 2, для доказательства неравенства для произвольных ломанных. Далее, в параграфе 3, для действительных функций одной переменной и в параграфе 4 для комплексных функций. Таким образом, результаты всех четырёх параграфов взаимно связаны.

В параграфе 5 даётся новое неравенство для множеств уровня действительных функций двух переменных. Оно допускает интерпретации в различных прикладных разделах, таких как гидродинамика. Этот результат имеет также глубокую внутреннюю связь с параграфами 1–4.

Наконец, в параграфе 6 мы приводим новое **точечно-областное** неравенство, зависящее от конечного множества точек в произвольной области.

Неравенства для кривых, ломанных, действительных и комплексных функций напоминают вторую фундаментальную теорему Неванлинны. Это показывает, что результаты неванлинновского типа имеют место не только для аналитических (мероморфных) функций и их обобщений, а имеют универсальный характер. Результаты общего характера, касающиеся широких классов кривых, функций и т.д. устанавливаются часто простыми рассуждениями. То же верно в случае доказательства неравенств данной работы. Доказательства используют методы Гамма-линий и будут приведены в другом месте.

§2. КРИВЫЕ

Пусть γ – кривая на плоскости (x, y). Можно рассматривать её как кривую в комплексной плоскости $x + iy$, т.е. $\gamma := f(t) := f_1(t) + if_2(t)$, $t \in [0,1]$, где $f(t)$ – комплексная функция действительного аргумента t. Будем говорить, что $\gamma := f(t) \in F(k)$, k – целое число ≥ 1, если производные $f_1^{(j)}(t)$ и $f_2^{(j)}(t)$ непрерывны на $[0,1]$ для любого j, $1 \leq j \leq k+1$, и если для любого j, $1 \leq j \leq k+1$ не существует точки $t_0 \in [0,1]$ такой, что $f_1^{(j)}(t_0) = f_2^{(j)}(t_0) = 0$.

В геометрической интерпретации $\arg f(t_0)$ означает угол между x-осью и вектором из 0 к точке $f(t_0)$, соответственно, а $\arg f'(t)$ означает угол между касательной к γ в точке $f(t_0)$ и x-осью. Таким образом, если a есть точка на плоскости (x, y), то

$$R(a, \gamma) := \int_0^1 \left|(\arg(f(t) - a))'\right| dt$$

является вращением γ вокруг точки a. Рассмотрим кривую $\gamma^{(k)} := f_1^{(k)}(t) + if_2^{(k)}(t)$ и обозначим через

$$T(\gamma^{(k)}) := R(0, \gamma^{(k)}) := \int_0^1 \left| \left(\arg f^{(k)}(t) \right)' \right| dt$$

её интегральную кривизну $\gamma^{(k-1)}$ (или вращение кривой $\gamma^{(k)}$ вокруг $a = 0$). Обозначим через $l(\gamma)$ длину γ.

Теорема 1.1 (принцип углов и длин). *Для любого $\gamma := f(t) \in F(k)$, целого числа $k \geq 1$ и любой точки a имеет место неравенство*

$$R\left(a_1, \gamma\right) \leq T\left(\gamma^{(k)}\right) + k\pi. \tag{1.1}$$

Для любой совокупности попарно различных точек a_ν, $\nu = 1, 2, ..., q$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} R\left(a_\nu, \gamma\right) \leq T\left(\gamma^{(k)}\right) + \frac{2k\pi q}{\rho} l(\gamma) + k\pi, \tag{1.2}$$

где ρ – минимальное расстояние между точками a_ν.

Неравенства имеют простое геометрическое толкование. Значение $T(\gamma^{(1)})$ является интегральной кривизной кривой γ. Таким образом, вращение любой кривой вокруг произвольного a не превышает интегральную кривизну γ плюс π. При $k > 1$, $T(\gamma^{(k)})$ равна вращению кривой $\gamma^{(k)}$, так что (1.1) и (1.2) допускают соответствующие интерпретации.

Читатель знакомый с теорией распределения Неванлинны и (или) с теорией Альфонса о накрывающих поверхностях, заметит аналогию между неравенством (1.2) и второй фундаментальной теоремой Неванлинны ; Мы вернёмся к этому ниже.

Точность теоремы 1.1. *Рассмотрим случай, когда $k = 1$. Пусть $\gamma := f(t)$, $t \in [0, 1]$ – отрезок, соединяющий точки $(-1, \varepsilon)$ и $(1, \varepsilon)$ на плоскости. Тогда величина $R(0, \gamma)$ сколь угодно близка к π если мы выбираем ε надлежащим образом близким к нулю, в то время как $T(\gamma^{(1)}) = 0$. Таким образом, (1.1) невозможно улучшить.*

Можно привести множество других примеров. Предположим, например, что кривая γ приближается к окружности по спирали. Тогда часть γ имеющая N "спиралей" вносит вклад как в первый так и во второй интегралы асимптотически по N, когда N стремится к бесконечности. Таким образом, соотношение левой и правой величин в (1.1) стремится к 1, когда N стремится к бесконечности.

Неравенство (1.2) также неулучшаемо. Пусть γ – график функции $f_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon}\sin\frac{1}{t+\varepsilon}$, $t \in [0,1]$, где $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Положим $a_\nu = 2(\nu-1)$, $\nu = 1,2,...,q$. Когда ε стремится к нулю, то левая и правая части (1.2) стремятся к бесконечности, но их соотношение стремится к 1.

Пусть теперь $\gamma_i \in F(1)$ – последовательность кривых, удовлетворяющих условиям Теоремы 1.1, $\gamma_i \subset \gamma_{i+1}$, для которых $T\left(\gamma^{(k)}\right) \to \infty$, когда $i \to \infty$ и

$$\frac{l(\gamma_i)}{T\left(\gamma^{(k)}\right)} \to 0, \quad i \to \infty. \tag{1.3}$$

Подобные кривые γ_i это, как бы, **пчелиные кривые :** пчела часто поворачивается на цветах или улье, соответственно для траектории её движения T сравнительно большое, а l срвнительно малое. Пусть

$$\Delta(a_\nu) := \liminf_{i\to\infty} \frac{R\left(a_\nu, \gamma_i\right)}{T\left(\gamma^{(k)}\right)}.$$

Из неравенства (1.2) вытекает следующее утверждение

Соотношение дефекта для произвольных пчелиных кривых. Для любой пчелиной последовательности кривых и произвольной совокупности попарно различных точек a_ν, $\nu = 1,2,...,q$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Delta(a_\nu) \le 1. \tag{1.4}$$

Некоторые комментарии о связи между неравенствами (1.2) и теорией Неванлинна. Подчеркнём аналогию между неравенствами (1.2) и второй фундаментальной теоремой Неванлинны и Альфонса (см. [8] и [1]). В версии Неванлинны она формулируется следующим образом : для любой мероморфной функции $w(z)$ в комплексной плоскости и любого множества попарно различных точек a_ν, $\nu = 1,2,...,q$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu, w) \le 2T(r,w) + C(q)\lambda(r)T(r,w), \quad r = r_n \to \infty, \tag{1.5}$$

где $m(r, a_\nu, w)$ – аппроксимирующая функция, $T(r,w)$ – характеристическая функция Неванлинны, $C(q)$ – постоянная, зависящая от q и $\lambda(r) \to 0$ при $r \to \infty$ (см. [8]). Факт, что второе слагаемое в правой части (1.5) существенно меньше первого слагаемого, играет решающую роль. В частности, из этого факта вытекает хорошо известное соотношение дефектов Неванлинны :

$$\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu) \le 2, \tag{1.6}$$

где $\delta(a_\nu) := \liminf_{r\to\infty} \{m(r, a_\nu, w)/T(r, w)\}$.

Таким образом, неравенство (1.2) является аналогом второй фундаментальной теоремы (1.5). Аналогично, для пчелиной кривой второй член в правой части (1.2) существенно меньше первого, откуда вытекает (1.4), что является аналогом соотношения дефекта Неванлинны (1.6).

Неравенство аналогичное (1.2) было доказано в [2], Лемма 2 : вместо обычной длины $l(\gamma)$ в работе [2] рассматривалась сферическая длина в соотношении (1.2) и результат относился к кривой γ, которая являлась образом $w(\partial D(r))$, где $\partial D(r)$ – граница круга $D(r) := \{z|\ |z| < r\}$. Однако, доказательство остаётся в силе и для произвольных гладких кривых. Позднее, изучая обыкновенные дифференциальные уравнения (см. [4]), автор вновь использовал это доказательство, на этот раз для произвольных гладких кривых, и применил неравенство (1.2) к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений (кривых). Вышедшей в 2002 г. прекрасной книге Шейла–Смола [7] было доказано (стр. 387-389), что

$$R(a_1, \gamma) \le T\left(\gamma^{(k)}\right). \tag{1.7}$$

К сожалению в [7] мы не нашли даже намёка на истоки этого неравенства. Кажется оно должно носить имя Шейла–Смола.

§3. ЛОМАННЫЕ

Пусть Γ – произвольная ломанная (замкнутая или открытая) в плоскости (x, y), состоящая из n последовательных отрезков γ_i, $i = 1, 2, ..., n$. Обозначим через $\alpha(a, \gamma_i)$ угол под которым γ_i виден из точки a в плоскости, а через $L(X)$ – длину X.

Вначале приведём очень простое неравенство : для произвольной ломанной Γ (замкнутой или открытой) и произвольного множества попарно различных точек a_ν, $\nu = 1, 2, ..., q$, в плоскости имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} A(a_\nu, \Gamma) \le \pi n + \frac{2\pi q}{\rho} L(\Gamma), \tag{2.1}$$

где $A(a_\nu, \Gamma) = \sum_i^n \alpha(a_\nu, \gamma_i)$.

Кажется, что это неравенство должно иметь элементарное доказательство, но мы даже не знаем такое доказательство. Это неравенство является очень грубым следствием нашей Теоремы 2.2. Между тем, неравенство (2.1) оказывается достаточно точным, как показывает первый пример для Теоремы 1.1.

Обозначим через $\beta(\gamma_i)$ абсолютное значение угла между векторами, образованными концами отрезков γ_i и γ_{i+1}. Будем писать $B(\Gamma) := \sum_i^{n^*} \beta(\gamma_i)$, где $n^* = n$ if Γ – замкнутый и $n^* = n - 1$, если Γ является открытой ломаной : для открытой ломаной Γ, очевидно, $\beta(\gamma_n)$ не определено.

Теорема 2.1. *Для произвольной ломаной Γ (замкнутой или открытой) на плоскости и произвольной точки a на плоскости имеем*

$$A(a,\Gamma) \leq B(\Gamma) + \pi. \tag{2.2}$$

Для любого множества попарно различных точек a_ν, $\nu = 1, 2, ..., q$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} A(a_\nu, \Gamma) \leq B(\Gamma) + \frac{2k\pi q}{\rho} L(\Gamma) + \pi, \tag{2.3}$$

где ρ – минимальное расстояние между a_ν.

Точность неравенств (2.2) и (2.3) можно получить рассматривая ломаные "очень близкие" к кривым, с помощью которых демонстрировалась точность в предыдущем параграфе.

Пусть Γ – ломаная, состоящая из бесконечного числа последовательных отрезков γ_i и $\Gamma_n := \cup_{\nu=1}^{n} \gamma_i$. Будем говорить, что Γ является пчелиной кривой, если

$$\frac{L(\Gamma_n)}{B(\Gamma_n)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.4}$$

Из неравенства (1) получаем неравенство для

$$\Delta(a_\nu) := \liminf_{n\to\infty} \frac{A(a_\nu, \Gamma_n)}{B(\Gamma_n)}.$$

Соотношение дефектов для произвольной пчелиной ломаной. Для произвольной пчелиной ломаной на плоскости и произвольного множества попарно различных точек a_ν, $\nu = 1, 2, ..., q$ на плоскости имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} \Delta(a_\nu) \leq 1. \tag{2.5}$$

Очевидно, что неравенства (2.3) и (2.5) также могут быть рассмотрены как аналоги второй фундаментальной теоремы в теориях Неванлинны–Альфонса.

Теорема 2.1 является непосредственным следствием Теоремы 1.1. Действительно, закругляя вершины Γ (концы отрезков γ_i и начальные точки отрезков γ_{i+1}) мы можем получить кривую $\gamma \in F(1)$ сколь угодно близкую к Γ. Тогда $A(a_\nu, \Gamma)$ и $B(\Gamma)$ будут сколь угодно близки к $R(a_\nu, \gamma_i)$ и $T\left(\gamma^{(k)}\right)$ к Γ соответственно, откуда следует Теоремы 2.1.

§4. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

График действительной функции одной переменной $\varphi(x) \in C^1[0,1]$ является кривой $\gamma := f(t) := x + i\varphi(x) \in F(1)$, $t \in [0,1]$. Используя обозначение $S(u) := u'/\left(1+u^2\right)$ (сферическая производная u) и $a_\nu = (x_\nu, y_\nu)$ получаем из Теоремы 1.1 неравенство типа Неванлинны для произвольных гладких функций.

Теорема 3.1. *Для любой функции $\varphi(x) \in C^1[0,1]$ имеем*

$$\int_0^1 S\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \leq \int_0^1 S\left(\varphi'(x)\right) dx + \pi. \tag{3.1}$$

Для любого множества попарно различных точек $a_\nu = (x_\nu, y_\nu)$, $\nu = 1, 2, ..., q$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{q} \int_0^1 S\left(\frac{\varphi(x) - y_\nu}{x - x_\nu}\right) dx \leq \int_0^1 S\left(\varphi'(x)\right) dx + \frac{2\pi q}{\rho} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\varphi'(x)\right)^2} dx + \pi, \tag{3.2}$$

где ρ – минимальное расстояние между a_ν.

Таким образом, получаем неравенство типа Неванлинна для действительных функций. Для того, чтобы получить эти неравенства из Теоремы 1.1, заметим, что

$$\left(\arg(f(t) - a_\nu)\right)' = \arctan \frac{\varphi(x) - y_\nu}{x - x_\nu} = S\left(\frac{\varphi(x) - y_\nu}{x - x_\nu}\right),$$

$$\left(\arg f'(t)\right)' = S\left(\varphi'(x)\right).$$

Итак, используя неравенство (1.1) Теоремы 1.1 к кривой γ и $a_1 = 0$, непосредственно получаем (3.1) а из неравенства (1.2) получаем (3.2).

Точность Теоремы 3.1. Для того, чтобы показать точность неравенства (3.1), рассмотрим функцию $\varphi(x) = h(2x-1)$, $x \in [0,1]$, для которой

$$\int_0^1 S\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) dx \to \pi, \quad \text{при} \quad h \to \infty.$$

То, что предел равен π следует из того, что последний интеграл означает угол под которым мы видим прямолинейный отрезок, соединяющий точки $(-h, 0)$ и $(1, h)$. С другой стороны, $\int_0^1 S\left(\varphi'(x)\right) dx = 0$, поэтому разность между левой и правыми сторонами неравенства (3.1) будет сколь угодно мала, когда мы выбираем значение h достаточно большим.

Точность неравенства (3.2) может быть проверена использованием функций $f_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon} \sin \frac{1}{x+\varepsilon}$, $x \in [0,1]$ теми же рассуждениями как и в параграфе 1.

§5. КОМПЛЕКСНЫЕ ФУНКЦИИ

Ниже через D мы будем обозначать ограниченную область с кусочно гладкой границей, пересечение которой с произвольной прямой состоит из конечного числа интервалов. Обозначим через $l(D)$ длину границы области D.

Теорема 4.1 (Принцип производных). *Для любой мероморфной функции f в замыкании заданной области D и любого целого числа $k \geq 1$, имеем*

$$\iint_D \left|\frac{f'}{f}\right| d\sigma \leq \iint_D \left|\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right| d\sigma + \frac{k\,\pi}{2} l(D). \tag{4.1}$$

Для любого множества попарно различных точек a_ν, $\nu = 1, 2, ..., q$, имеем

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{q} \iint_D \left|\frac{f'}{f - a_\nu}\right| d\sigma \leq \\ \iint_D \left|\frac{f^{(k+1)}}{f^{(k)}}\right| d\sigma + \frac{k\pi q}{\rho^*} \iint_D \frac{|f'|}{1+|f|^2} d\sigma + \frac{k\pi}{2} l(D),\end{gathered} \tag{4.2}$$

где ρ^* – минимальное сферическое расстояние между парами точек a_ν.

Заметим, что неравенство (4.1) асимптотически точное : например для функций z^n в единичном круге отношение левой и правой частей в (4.1) стремится к единице, когда n стремится к бесконечности.

Ясно, что (4.2) является аналогом теоремы Неванлинна. Случай $k = 1$ был рассмотрен в [3].

Перейдём к рассмотрению аналогичных результатов для "разумно гладких" комплексных функций. Наш результат имеет место и в более сложных ситуациях, но ради простоты, мы рассмотрим частные, но достаточно общие, случаи.

Обозначим через $l_x(D)$ длину *проекции* границы ∂D на ось x ; т.е. мы разбиваем ∂D на малые части с длинами стремящимися к нулю и рассмотрим сумму длин всех проекций этих кусков на ось x. Аналогично, определим $l_y(D)$ (заменяя x на y).

Будем писать $f(z) := u(x,y) + iv(x,y) \in C(D,k)$, если для любого целого числа j, $1 \leq j \leq k+1$, u и v имеют непрерывные j-ые производные по x и y в замыкании $\bar{D}$ области D и если для любого j существуют не более чем конечное число точек в замыкании $\bar{D}$, в которых имеем $u_x^{(j)}(x,y) = v_x^{(j)}(x,y) = 0$ или $u_y^{(j)}(x,y) = v_y^{(j)}(x,y) = 0$. Следующий аналог Теоремы 4.1 имеет место для этих намного более общих функций.

Теорема 4.2. *Для любой функции $f(z) \in C(D,k)$ и любого целого числа $k \geq 1$, имеем*

$$\iint_D \left|(\arg f)'_y\right| dydx \leq \iint_D \left|\left(\arg f^{(k)}_{y\ldots y}\right)'_y\right| dydx + \frac{k\pi}{2} l_x(D). \tag{4.3}$$

Для любого множества попарно различных точек a_ν, $\nu = 1, 2, ..., q$, имеем

$$\begin{gathered}\sum_{\nu=1}^{q} \left|(\arg(f - a_\nu)'_y\right| dydx \leq \\ \iint_D \left|\left(\arg f^{(k)}_{y\ldots y}\right)'_y\right| dydx + \frac{2k\pi q}{\rho} \iint_D \left|f'_y\right| dydx + \frac{k\pi}{2} l_x(D).\end{gathered} \tag{4.4}$$

Таким образом, вновь получаем неравенство типа Неванлинны, в этом случае для широких классов (не аналитических) функций, принадлежащих $C(D,k)$. Ясно, что эти неравенства имеют место, если мы подставим y вместо x. Суммируя сказанное и учитывая, что $l_x(D)+l_x(D)\le l(D)$, получаем

$$\begin{aligned}&\iint_D \left[\left|(\arg f)'_x\right| + \left|(\arg f)'_y\right|\right] dydx \le \\ &\le \iint_D \left[\left|\left(\arg f^{(k)}_{x\ldots x}\right)'_y\right| + \left|\left(\arg f^{(k)}_{y\ldots y}\right)'_y\right|\right] dydx + \frac{k\pi}{2} l(D)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{q}\iint_D \left[\left|(\arg(f-a_\nu)'_x\right| + \left|(\arg(f-a_\nu)'_y\right|\right] dydx \le \\ &\le \iint_D \left[\left|\left(\arg f^{(k)}_{x\ldots x}\right)'_y\right| + \left|\left(\arg f^{(k)}_{y\ldots y}\right)'_y\right|\right] dydx + \\ &+ \frac{2k\pi q}{\rho}\iint_D \left(|f'_x| + |f'_y|\right) dydx + \frac{k\pi}{2} l(D).\end{aligned}$$

§5. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть $u(x,y)$ – функция двух действительных переменных в замыкании $\bar{D}$. Предположим (для простоты), что обе производные $u'_x(x,y)$ и $u'_y(x,y)$ суть гладкие функции в замыкании $\bar{D}$. Назовём множество A-уровня функции u в области D множество $\{(x,y)|\ u(x,y)=A,\ A\in R\}$. Предположим, что множества A-уровня функции u для любого $A\in R$ и множества 0-уровня функций u'_x и u'_y состоят из множества кусочно гладких кривых конечной длины $L(D,A,u)$. Обозначим класс таких функций через $c(D)$. (Таким образом, мы исключаем случай, когда A-уровень совпадает с некоторой подобластью области D).

Теорема 5.1. *Для любой функции $u(x,y)\in c(D)$ и любого действительного числа A, имеем*

$$L(D,A,u)\le\left[L(D,0,u'_x)+L(D,0,u'_y)\right]+l(D). \tag{5.1}$$

Для любого множества попарно различных действительных значений имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{\nu=1}^{q} L(D,A_\nu,u)\le \\ &\le \left[L(D,0,u'_y)+L(D,0,u'_x)\right]+\frac{2}{\rho_g}\iint_D |grad\ u|\ d\sigma + l(D),\end{aligned} \tag{5.2}$$

где $g\in\mathcal{C}(-\infty,\infty)$, а $\rho_g := \min_{i\ne j}\int_{A_i}^{A_j} g(|t|)\,dt$.

Несколько интерпретаций в прикладных науках. Пусть $u(x,y)$ является электрическим потенциалом. Тогда решения уравнения $u(x,y)=A_\nu$ суть эквипотенциальные прямые, u'_x и u'_y представляют компоненты электрического поля в направлениях x и y, причём $|grad\ u|$ означает норму электрического поля. Ясно, что неравенства (5.1) и (5.2) можно интерпретировать как общую теорему о электромагнетических полях.

Другой пример.Пусть $u(x,y)$ – скорость точки (x,y) в стационарном плоском потоке. Тогда решения уравнения $u(x,y)=A_\nu$ суть те прямые, на которых скорость равна A_ν. Величины u'_x и u'_y суть компоненты ускорения в направлениях x и y, причём $|grad\ u|$ равно модулю ускорений. Таким образом, все величины в этом неравенстве имеют гидродинамические толкования, а неравенства (5.1) и (5.2) можно рассматривать как теорему из гидродинамики.

Комментарии. Неравенство (5.2) имеет сходство со второй фундаментальной теоремой Неванлинны. В этом неравенстве для всех целых A_ν можно рассмотреть $\sum_{\nu=1}^{\infty} L(D,A_\nu,u)$ (вместо $\sum_{\nu=1}^{q}$). Тогда ρ тождественно равно 1.

Обсуждение результатов типа Неванлинны. Выше мы рассмотрели для простоты евклидовы расстояния ρ между точками a_ν или действительными значениями A_ν. Во всех рассмотренных случаях результаты могут быть обобщены на другие типы расстояний, скажем сферического, гиперболического и др. Приведём пример, касающийся параграфу 5, где соответствующее обобщение неравенства (5.2) имеет вид :

$$\sum_{\nu=1}^{q} L(D,A_\nu,u)\le$$
$$\le\left[L(D,0,u'_y)+L(D,0,u'_x)\right]+\frac{2}{\rho_g}\iint_D g(|u|)\,|grad\ u|\,d\sigma+l(D),$$

где $g\in C^1(-\infty,\infty)$, и $\rho_g:=\min_{i\ne j}\int_{A_i}^{A_j} g(|t|)\,dt$. Таким образом, в случае когда $g(|u|)=\frac{1}{1+|u|^2}$ мы имеем дело с сферической метрикой и третье слагаемое имеет вид
$$\frac{2}{\rho_g}\iint_D \frac{|grad\ u|}{1+u^2}dydx.$$

Случай сферической метрики (используемой часто в теории распределений) был рассмотрен в аналогичных ситуациях в работах [2] и [3].

§6. ТОЧЕЧНО—ОБЛАСТНОЕ НЕРАВЕНСТВО

Пусть $z_1,z_2,\dots,z_n$ – конечное множество произвольных комплексных чисел, лежащих в области D с кусочно–гладкой границей ∂D, $m_1,m_2,\dots,m_n$ – произвольные положительные числа. Пусть $\mathrm{dist}(z_\nu, \partial D)$ расстояние между точками z_ν и ∂D. Приведём **точечно-областное неравенство :**

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathrm{dist}(z_\nu, \partial D) \leq \frac{1}{4} \iint_D \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{z - z_\nu} \right| d\sigma. \tag{6.1}$$

Беря $z_1 = z_2 = ... = z_n = 0$, $m_1 = m_2 = ... = m_n = 1$ и $D := \{z : \ |z| < 1\}$ получаем

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \mathrm{dist}(z_\nu, \partial D) = n, \quad \frac{1}{4} \iint_D \left| \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_\nu}{z - z_\nu} \right| d\sigma = \frac{\pi}{2} n,$$

так что формула (1) даёт асимптотически корректный рост, при $n \to \infty$.

Хочу выразить свою благодарность профессорам Р. В. Амбарцумяну, Н. У. Аракеляну, Г. Бегеру, Д. Т. Ле и А. Фернандесу за важные обсуждения результатов. Также, хочу поблагодарить ICTP (Триест) и факультет математики UNED (Мадрид) за их гостеприимство.

Abstract. The paper announces some new inequalities that refer to broken lines, curves, real and complex functions. Their derivation is based on a new *principle of angles and lengths* for curves. The inequality in the complex analysis, called *the principle of derivatives,* is valid for analytic functions in arbitrary domains and extends to a broad class of sufficiently smooth complex functions. A new inequality follows for real functions of two variables concerning their level sets. For all the mentioned above cases, curves and functions, we obtain some analogues of the second fundamental theorem in Nevanlinna theory of meromorphic functions. At the end we discuss a new *point-domain* inequality dealing with finite point sets in an arbitrary domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Ahlfors, "Zur Theorie der Überlagerungsflächen," Acta Soc. Sci. Fenn. vol. 9, № 1, pp. 1 - 40, 1930.
2. G. A. Barsegian, "On Geometric Structure of Image of Disks under Mappings by Meromorphic Functions," Math. Sbornik, vol. 106, № 148 (1), pp. 35 - 43, 1978.
3. Г. А. Барсегян, "Исключительные значения, связанные с логарифмическими производными мероморфных функций," Изв. АН АрмССР, серия Математика, том 16, № 5, pp. 408 – 423, 1981.
4. K. G. Barseghyan and G. A. Barsegian, "Some Nevanlinna Type Results in Differential Geometry," In : Differential Equations with Application to the Population Dynamics, Preprint.
5. G. A. Barsegian, Gamma-lines : on the Geometry of Real and Complex Functions, Taylor and Francis, London, New York, 2002.
6. G. A. Barsegian, "A New Program of Investigations in Analysis : Gamma-lines Approaches," in Value Distribution and Related Topics, Eds. by G. Barsegian,

I. Laine and C. Yang (Kluwer, Series : Advances in Complex Analysis and its Applications, 2004, pp. 1–73.
7. R. Sheill-Small, Complex Polynomilas, Ser. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, № 75, 2002.
8. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Springer, Berlin, 1936.

Поступила 17 октября 2006