

ЧАСТНЫЕ ИНДЕКСЫ ТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

К. В. Арутюнян, А. Г. Камалян

Ереванский государственный университет,
Российско-Армянский университет, Ереван
E-mail : armen_kamalian@yahoo.com

Резюме. В статье дано описание частных индексов треугольных матриц-функций с факторизуемыми диагональными элементами, по индексам диагональных элементов.

1. При исследовании систем сингулярных интегральных уравнений и ряда других задач возникает необходимость факторизации Винера-Хопфа матриц-функций. Приведём его определение.

Пусть γ – карлесоновский замкнутый контур положительной ориентации в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, которая является границей односвязной области D_+ ($0 \in D_+$). Пусть D_- — дополнение к $D_+ \cup \gamma$ в $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Далее, пусть I – единичный оператор, а S – сингулярный интегральный оператор в $L_p = L_p(\gamma)$, $1 < p < \infty$:

$$(S\varphi)(t) = \frac{1}{\pi} \text{ v. p. } \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau, \quad \varphi \in L_p.$$

Рассмотрим проекторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \pm S)$ и классы функций $L_p^+ = P_+L_p$, $L_p^- = P_-L_p + \text{const}$. Через $X^{m \times n}$ обозначим множество матриц порядка $m \times n$ с элементами из множества X .

Под факторизацией Винера-Хопфа матрицы-функции $W(t) \in L_{\infty}^{n \times n}(\gamma)$ в классе L_p ($1 < p < \infty$) будем понимать представление её в виде :

$$W(t) = W_-(t)\Lambda_{\bar{\kappa}}W_+(t), \quad t \in \gamma,$$

где

- 1). $W_+ \in [L_q^+]^{n \times n}$, $W_+^{-1} \in [L_p^+]^{n \times n}$, $W_- \in [L_p^-]^{n \times n}$ и $W_-^{-1} \in [L_q^-]^{n \times n}$
 $\left(q = \frac{p}{1-p}\right)$,
- 2). $\Lambda_{\bar{\kappa}} = \text{diag} (t^{\kappa_1}, t^{\kappa_2}, \dots, t^{\kappa_n})$, $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n$,
- 3). оператор $W_+ P_+ W_+^{-1}$ ограничен.

Числа $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ называются **частными индексами** матрицы-функции W ; если $\kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n = 0$, то факторизация называется канонической.

2. Через $T(\bar{\chi})$, где $\bar{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, обозначим класс ниже-треугольных матриц-функций, т.е. тех функций $W \in L_\infty^{n \times n}(\gamma)$, диагональные элементы которого допускают факторизацию вида $w_{m,m} = w_{m,m}^- t^{\chi_m} w_{m,m}^-$ ($m = 1, 2, \dots, n$). Известно [1], [2], что такие матрицы-функции сами допускают факторизацию.

Для заданной последовательности $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbf{Z}^n$, $\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n$, будем писать $\bar{\kappa} \in \Phi(\bar{\chi})$, если существует некоторая матрица-функция $W \in T(\bar{\chi})$ с частными индексами $\bar{\kappa}$.

В книге [2] поставлена задача описания множества $\Phi(\bar{\chi})$. В статье [5] дается описание множества $\Phi(\bar{\chi})$ при $n = 3$.

Структура множества $\Phi(\bar{\chi})$ сильно зависит от упорядоченности компонент вектора $\bar{\chi}$. Использование метода описания множества $\Phi(\bar{\chi})$, приведённого в статье [5], приводит к рассмотрению $n!$ случаев, что весьма затруднительно при $n > 3$. В настоящей статье предлагается рекуррентный метод описания множества $\Phi(\bar{\chi})$ при произвольном n , основанный на алгоритме факторизации ниже-треугольных матриц-функций, приведённой в [4].

3. Через P^+ (или P^-) обозначим класс всех ниже-треугольных полиномиальных относительно t (или t^{-1}) матриц-функций V_+ (или V_-) таких, что $\det V_+ = 1$ (или $\det V_- = 1$), а через $P^-(\bar{\chi})$ – класс всех ниже-треугольных полиномиальных относительно t^{-1} матриц-функций $V_- = \{\nu_{m,k}\}_{m,k=1}^n$ с элементами вида :

$$\nu_{m,k} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{l_{m,k}} a_{m,k}^{(l)} t^{-l} & \text{если } 1 \leq m < k \leq n \vee \chi_m - \chi_k \geq 2, \quad l_{m,k} \leq \chi_m - \chi_k - 1 \\ \delta_{m,k} & \text{если } 1 \leq m \leq k \leq n \vee \chi_m - \chi_k \leq 1, \end{cases}$$

где $\delta_{m,k}$ – символ Кронекера.

Отметим, что если $\chi_m - \chi_k \leq 1$ и $1 \leq m < k \leq n$, то $P^-(\bar{\chi}) = \{E\}$. Обозначим

$$P_j^-(\bar{\chi}) = \{V_- = \{\nu_{m,k}\}_{m,k=1}^n \in P^-(\bar{\chi}) : \nu_{m,k}(t) = \delta_{m,k}, \quad k > j\}.$$

Очевидно, что $P_{n-1}^-(\bar{\chi}) = P^-(\bar{\chi})$.

В силу известной теоремы Гохберга-Крейна [1], [2], любую матрицу-функцию $W(t) \in T(\bar{\chi})$ можно представить в виде

$$W = \Lambda_{\bar{\chi}} V, \quad \text{где} \quad \Lambda_{\bar{\chi}} = \text{diag} (t^{\chi_1}, t^{\chi_2}, \dots, t^{\chi_n}),$$

а матрица-функция V допускает каноническую факторизацию $V = V_- V_+$, где V_- и V_+ – некоторые нижне-треугольные матриц-функции. В [4] доказано, что имеет место следующее представление :

$$W = V_-^{(2)} \Lambda_{\bar{\chi}} V_-^{(1)} V_+, \quad \text{где} \quad V_-^{(1)} \in P^-(\bar{\chi}), \quad V_-^{(2)} \in L_p^-, \quad V_+ \in L_p^+.$$

Таким образом, множество $\Phi(\bar{\chi})$ совпадает с множеством частных индексов всех полиномиальных матриц-функций вида $W(t) = \Lambda_{\bar{\chi}} V_-$, где $V_- \in P^-(\bar{\chi})$.

При $1 \leq j < i \leq n$, $l \in \mathbf{N}$, преобразование $\varphi_{i,l} : \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{Z}^n$, определённое формулой

$$\varphi_{i,l}(\bar{\chi}) = \begin{cases} \overline{\chi^{(1)}} & \text{если} \quad \chi_i - \chi_j \geq 2, \quad l \leq \chi_i - \chi_j, \\ \bar{\chi} & \text{если} \quad \chi_i - \chi_j \leq 1 \vee l \geq \chi_i - \chi_j, \end{cases}$$

где

$$\chi_m^{(1)} = \begin{cases} \chi_m & \text{если} \quad m \neq i, \quad m \neq j, \\ \chi_j + l & \text{если} \quad m = i, \\ \chi_j - l & \text{если} \quad m = j, \end{cases}$$

назовём (j, i, l) -преобразованием, причём

$$\bar{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in \mathbf{Z}^n, \quad \overline{\chi^{(1)}} = (\chi_1^{(1)}, \chi_2^{(1)}, \dots, \chi_n^{(1)}) \in \mathbf{Z}^n.$$

Пусть $I_j(\bar{\chi}) = \{i \in \{j+1, \dots, n\}, \chi_i - \chi_j \geq 2\}$. Преобразование $\varphi : \mathbf{Z}^n \mapsto \mathbf{Z}^n$ назовём j -преобразованием, если её можно представить в виде композиции (j, i_s, l_s) -преобразований, т.е.

$$\varphi = \varphi_{i_k, l_k} \circ \varphi_{i_{k-1}, l_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1}, \quad (1)$$

где

$$\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_k) \in \mathbf{N}^k, \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k, \quad i_s \in I_j(\bar{\chi}), \quad s = 1, \dots, k.$$

Число k назовём **длиной j -преобразования** φ , а преобразование φ назовём **простым**, если в представлении (1) $i_1, i_2, \dots, i_k$ попарно различны.

Замечание 1. Если $l_s \geq \chi_{i_s}^{(s-1)} - \chi_j^{(s-1)}$ для некоторого $s \in \{1, \dots, k\}$, где $\overline{\chi^{(m)}} = \varphi_{i_m, l_m}(\overline{\chi^{(m-1)}})$, $m = 1, \dots, k$, и $\chi^{(0)} = \overline{\chi}$, то

$$(\varphi_{i_k, l_k} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1})(\overline{\chi}) = (\varphi_{i_k, l_k} \circ \dots \circ \varphi_{i_{s+1}, l_{s+1}} \circ \varphi_{i_{s-1}, l_{s-1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1})(\overline{\chi}).$$

В частности, если $l_s \geq \chi_{i_s}^{(s-1)} - \chi_j^{(s-1)}$ для любого $s \in \{1, \dots, k\}$, то

$$(\varphi_{i_k, l_k} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1})(\overline{\chi}) = \overline{\chi}.$$

Через $\Phi_j^*(\overline{\chi})$ обозначим множество образов вектора $\overline{\chi} \in \mathbf{Z}^n$ при всевозможных j -преобразованиях, а через $\Phi_j(\overline{\chi})$ – множество всех векторов $\overline{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbf{Z}^n$ ($\kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_n$), который равняется вектору $\overline{\kappa}$ после некоторой перестановки его компонент.

Если $A \subset \mathbf{Z}^n$, то $\Phi_j(A) = \bigcup_{\overline{\chi} \in A} \Phi_j(\overline{\chi})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\overline{\chi} \in \mathbf{Z}^n$. Тогда справедливо включение $\Phi_j(\overline{\chi}) \subset \Phi(\overline{\chi})$.

Доказательство. Пусть $\overline{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in \Phi_j(\overline{\chi})$. Тогда существует j -преобразование $\varphi = \varphi_{i_k, l_k} \circ \varphi_{i_{k-1}, l_{k-1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1}$ такое, что $\varphi(\overline{\chi}) = \overline{\kappa^*}$, где $\overline{\kappa}$ получается упорядочением компонент вектора $\overline{\kappa^*}$.

Чтобы построить матрицу-функцию $W = \Lambda_{\overline{\chi}} V_-$, $W \in T(\overline{\chi})$, с частными индексами $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, положим

$$V_- = E + \sum_{s=1}^k t^{-l_s} E_{i_s, j},$$

где $E_{i, j} = \{e_{m, k}\}_{m, k=1}^n$,

$$e_{m, k} = \begin{cases} 1, & m = i, \quad k = j \\ 0, & m \neq i \vee k \neq j \end{cases}, \quad E = \{\delta_{m, k}\}_{m, k=1}^n,$$

$$\Lambda_{\overline{\chi}} = \text{diag} (t^{\chi_1}, t^{\chi_2}, \dots, t^{\chi_n}),$$

$$\overline{\chi^{(s)}} = \varphi_{i_s, l_s}(\overline{\chi^{(s-1)}}), \quad s = 1, \dots, k, \quad \text{и} \quad \overline{\chi^{(0)}} = \overline{\chi}.$$

Далее, пусть

$$V_-^{(s)} = E + (t^{\chi_j - \chi_{i_s} + l_{i_s}} - 1) E_{j, j} - E_{i_s, i_s} + E_{i_s, j} - E_{j, i_s},$$

$$V_+^{(s)} = E + t^{l_{i_s}} E_{j, i_s} - \sum_{m=s+1}^k t^{l_{i_s} - l_{i_m}} E_{i_m, i_s} \quad \text{при} \quad l_s \leq \chi_{i_s}^{(s-1)} - \chi_j^{(s-1)} - 1,$$

где $s = 1, \dots, k$,

$$V_-^{(s)} = E + t^{\chi_{i_s} - \chi_j + l_s} E_{i_s, j} \quad \text{и} \quad V_+^{(s)} = E \quad \text{если} \quad l_s \geq \chi_{i_s}^{(s-1)} - \chi_j^{(s-1)}.$$

Если предположить, что $W_-^{(0)} = W_-^{(k)} = E$ и

$$W_-^{(s)} = E + \sum_{m=s+1}^k t^{-l_s} E_{i_s, j}, \quad s = 0, \dots, k-1,$$

то нетрудно проверить, что

$$\Lambda_{\chi^{(s)}} W_-^{(s)} = V_-^{(s+1)} \Lambda_{\chi^{(s+1)}} W_-^{(s+1)} V_+^{(s+1)}, \quad s = 0, \dots, k,$$

т.е.

$$W = V_-^{(i_1)} V_-^{(i_2)} \dots V_-^{(i_k)} \Lambda_{\chi^{(k)}} V_+^{(i_k)} \dots V_+^{(i_2)} V_+^{(i_1)}.$$

Очевидно, что $\overline{\chi^{(k)}} = \overline{\kappa^*}$. Теперь пусть матрица A такая, что $\Lambda_{\overline{\kappa^*}} = A^T \Lambda_{\overline{\kappa}} A$. Тогда, взяв

$$V^- = V_-^{(1)} \dots V_-^{(k)} A^T \quad \text{и} \quad V^+ = A V_+^{(k)} \dots V_+^{(1)}$$

получим искомую факторизацию $W = V^- \Lambda_{\overline{\kappa}} V^+$. Следовательно, $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ являются частными индексами $W \in T(\overline{\chi})$. Теорема 1 доказана.

Лемма 1. Для любых $\overline{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in \mathbf{Z}^n$ и $\overline{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \Phi_j^*(\overline{\chi})$ существует простое j -преобразование φ такое, что $\varphi(\overline{\chi}) = \overline{\kappa}$.

Доказательство. Пусть $\overline{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \Phi_j^*(\overline{\chi})$. По определению множества $\Phi_j^*(\overline{\chi})$ существует j -преобразование $\varphi = \varphi_{i_s, l_s} \circ \varphi_{i_{s-1}, l_{s-1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1}$ такое, что $\varphi(\overline{\chi}) = \overline{\kappa}$. Два j -преобразования φ и φ^* назовём $\overline{\chi}$ -эквивалентными, если $\varphi(\overline{\chi}) = \varphi^*(\overline{\chi})$.

Пусть для некоторых $m, p \in \{1, \dots, s\}$, ($m > p$) $i_m = i_p$ и $i_{p+1}, \dots, i_{m-1}$ попарно различны. Рассмотрим j -преобразование

$$\varphi^{(1)} = \varphi_{i_s, l_s} \circ \dots \circ \varphi_{i_{m-1}, l_{m-1}^*} \circ \dots \circ \varphi_{i_{p+1}, l_{p+1}^*} \circ \varphi_{i_p, l_p} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1},$$

где $l_{m-1}^* = \chi_{i_{m-1}} - \chi_j - l_p + l_m$ и

$$l_s^* = \chi_{i_{m-1}} - \chi_j - l_{m-1} + l_m - l_m - l_p + l_s, \quad s = p, \dots, m-1.$$

Легко проверить, что φ и $\varphi^{(1)}$ — $\overline{\chi}$ -эквивалентны, причём длина $\varphi^{(1)}$ меньше длины φ . Следовательно, j -преобразование наименьшей длины, и эквивалентное φ , будет простым j -преобразованием. Лемма 1 доказана.

Теорема 2. Для любого $\bar{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in \mathbf{Z}^n$ и $j \in \{1, \dots, n-1\}$ имеет место $\bar{\chi} \in \Phi_j^*(\bar{\chi})$. Если $\bar{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbf{Z}^n$ и $\bar{\kappa} \neq \bar{\chi}$, то $\bar{\kappa} \in \Phi_j^*(\bar{\chi})$ тогда и только тогда, когда существуют отличные друг от друга $i_s \in I_j(\bar{\chi})$, $s = 1, \dots, k$ такие, что компоненты вектора $\bar{\kappa}$ удовлетворяют следующим условиям :

$$\kappa_m = \chi_m, \quad m \neq i_s, \quad \forall s = 1, \dots, k, \quad m \neq j, \quad (2)$$

$$\kappa_{i_s} \leq \min \{ \chi_{i_s} - 1, \chi_{i_{s-1}} \}, \quad \forall s = 2, \dots, k, \quad (3)$$

$$\kappa_{i_1} \leq \chi_{i_1} - 1, \quad \kappa_j \leq \chi_{i_k} - 1. \quad (4)$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Чтобы доказать второе утверждение предположим, что $\bar{\kappa} \neq \bar{\chi}$. Тогда в силу Леммы 1 и Замечания 1, вложение $\bar{\kappa} \in \Phi_j^*(\bar{\chi})$ выполняется тогда и только тогда, когда существует простое j -преобразование $\varphi_{i_s, l_s} \circ \varphi_{i_{s-1}, l_{s-1}} \circ \dots \circ \varphi_{i_1, l_1}$ такое, что $\varphi(\bar{\chi}) = \bar{\kappa}$ и

$$\overline{\chi^{(s)}} = \varphi_{i_1, l_1} \left(\overline{\chi^{(s-1)}} \right),$$

$$l_s \leq \chi_{i_s}^{(s-1)} - \chi_j^{(s-1)} - 1, \quad s = 1, \dots, k,$$

$$\overline{\chi^{(0)}} = \bar{\chi}, \quad \overline{\chi^{(k)}} = \bar{\kappa}.$$

Из определения j -преобразования имеем следующую систему равенств и неравенств :

$$l_1 = \kappa_{i_1} - \chi_j,$$

$$l_s = \kappa_{i_1} + \dots + \kappa_{i_s} - \chi_j - \chi_{i_1} - \dots - \chi_{i_{s-1}}, \quad s = 2, \dots, k,$$

$$\chi_m^{(s)} = \chi_m, \quad m \neq i_p, \quad p = 1, \dots, s, \quad m \neq j,$$

$$\chi_j^{(s)} = \chi_j^{(s)} = \chi_{i_s} - \chi_j, \quad \chi_{i_1}^{(s)} = \chi_j + l_1,$$

$$\chi_{i_p}^{(s)} = \chi_{i_{p-1}} - l_{p-1} + l_p, \quad p = 2, \dots, s,$$

$$l_s \in \mathbf{Z}, \quad l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_k.$$

Из Замечания 1 имеем $l_s \leq \chi_{i_s}^{(s-1)} - \chi_j^{(s-1)} - 1$ ($s = 1, \dots, k$). Нетрудно убедиться, что эта система равенств и неравенств эквивалентна условиям (2)-(4). Теорема 2 доказана.

В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 3. Пусть $W = \Lambda_{\overline{\chi}} V_-$, где

$$V_- = \{\nu_{m,k}\}_{m,k=1}^n \in P_j^-(\overline{\chi}), \quad \overline{\chi} = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n) \in \mathbf{Z}^n,$$

$$\nu_{m,j} = \sum_{l=1}^{l_{m,j}} a_{m,j}^{(l)} t^{-l}, \quad j+1 \leq m \leq n, \quad l_{i,j} = \max_{j+1 \leq m \leq n} l_{m,j}.$$

Тогда W можно представить в виде $W = V_-^{(2)} \Lambda_{\overline{\chi}} V_-^{(1)} V_+$, где $\overline{\chi}^*$ – образ $(j, i, l_{i,j})$ -преобразования вектора $\overline{\chi}$. При этом,

$$V_-^{(1)} = \left\{ {}^{(1)}\nu_{m,k} \right\}_{m,k=1}^n \in P_j(\overline{\chi}), \quad V_-^{(2)} \in P^-, \quad V_+ \in P^+,$$

и степень полинома ${}^{(1)}\nu_{m,j}$ ($m \neq i$) относительно t^{-1} равна степени полинома $\nu_{m,j}$, а степень полинома ${}^{(1)}\nu_{i,j}$ меньше степени полинома $\nu_{i,j}$.

Из Теорем 2 и 3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4. Если $W(t) \in T(\overline{\chi})$, то $\Phi(\overline{\chi}) = \Phi_1(\Phi_2^* \dots (\Phi_{n-1}^*(\overline{\chi}))) \subset \mathbf{Z}^n$.

Следствие. Пусть $W(t) \in T(\overline{\chi})$. Если $\chi_i - \chi_m \leq 1$ для всех i и m таких, что $j \leq m < i \leq n$, то верно равенство $\Phi(\overline{\chi}) = \Phi_1(\Phi_2^* \dots (\Phi_{j-1}^*(\overline{\chi})))$.

В частности, если $\chi_i - \chi_m \leq 1$ для всех i и m таких, что $j \leq m < i \leq n$, то верно $\Phi(\overline{\chi}) = \{\overline{\chi}\}$ с точностью до перестановки компонент вектора $\overline{\chi}$.

Это утверждение содержит в себе известный результат Гохберга-Крейна [1], [2].

Abstract. The paper gives an exhaustive description of the partial indices of triangular matrix functions, the diagonal elements of which are factorable, by the indices of diagonal elements.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. K. Clancey and I. Gohberg, “Factorization of Matrix Functions and Singular Integral Operators,” In : Operator Theory : Advances and Appl. 3, Birkhauser, Basel, 1981.
2. G. S. Litvinchuk and I. M. Spitkovskii, Factorization of Matrix-functions, Akademie-Verlag, Berlin, 1987.
3. А. Г. Камалян, “Формулы типа Гохберга-Лерера-Родмана для частных индексов матриц-функций”, Изв. НАН Армении, серия Математика, том 29, № 5, стр. 31 – 41, 1994.
4. К. В. Арутюнян, “Об одном методе факторизации треугольных матриц-функций третьего порядка”, Математика в высшей школе, том 2, № 2, стр. 66 – 69, 2006.
5. А. Г. Камалян, К. В. Арутюнян, “Об описании частных индексов треугольных матриц-функций третьего порядка”, Математика в высшей школе, том 2, № 3, стр. 29 – 33, 2006.

Поступила 13 октября 2006