

ИСЧИСЛЕНИЕ ХОРД И СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении

E-mail : rhambart@anm.am

Резюме. Под Исчислением Хорд в статье понимаются процедуры интегрирования комбинаторных разложений, полученных при решении задачи Бюффона–Сильвестра для n хорд выпуклой области на плоскости или аналогичной задачи в $\mathbb{R}^3$. Исчисление хорд является источником интегрально–геометрических тождеств, находящих применение в Стохастической геометрии. В настоящей статье эти тождества применяются для некоторых классов случайных выпуклых многоугольников и многогранников, допускающих достаточно простой “томографический” анализ. Выбор этих классов (класс “Независимые Углы” и класс “Независимые Ориентации”) обусловлен характером результатов в теории Исчисления Хорд. В последнем параграфе выпуклые многоугольники из класса “Независимые Углы” применяются к булевским множествам на плоскости (**булевы модели**), распределения которых инвариантны относительно группы евклидовых движений плоскости.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В книге автора [1], а также в обзорной статье [2] интегрированием комбинаторных разложений (см. например [3]) были получены различные интегральные тождества для прямолинейных хорд плоских выпуклых областей и выпуклых тел 3-мерного пространства. Основные применения **Исчисления Хорд** (подходящее название этого направления **Интегральной геометрии**) лежат (см. [1]) в Математической томографии и Стохастической геометрии. Последние разработки с помощью Исчисления Хорд в Математической томографии представлены в [4]. Цель настоящей работы – представить всю последовательность выводов, приводящих к применениям в Стохастической геометрии.

В §1 представлен краткий обзор Исчисления Хорд. Доказательства, которые мож-

но найти в [1] или [2], не приводятся. Для исследования случайных множеств в многоугольных окнах, требуется ранее неопубликованный результат из Ичисления Хорд; детальное доказательство этого результата приведено в пункте 2.7. Пункты 2.5–2.6 содержат упрощённую версию вычисления, которое имеется в монографии [1].

Нужные сведения по Стохастической геометрии можно найти в книге автора [5]. Понятия случайного выпуклого многоугольника и многогранника несомненно принадлежат к первоначальным понятиям Стохастической геометрии. Однако они всегда возникали в контексте **процессов** случайных многоугольников (или многогранников), наделённых свойствами инвариантности вероятностного распределения относительно некоторой группы. В настоящей статье случайные выпуклые многоугольники и многогранники имеют первичный статус, а процессы многоугольников (или многогранников) используются при построении необходимых примеров случайных выпуклых многоугольников или многогранников из классов “Независимые Углы” (НУ) или “Независимые Ориентации” (НО).

Знакомство со стандартной техникой комбинаторных разложений, первоначально представленных в [1], может быть полезным для более глубокого понимания материала §1. Для понимания материала §2 – §4, где исследуются случайные многоугольники и многогранники, читателю необходимо знакомство с результатами §1 и некоторые понятия, касающиеся пуассоновских процессов прямых на плоскости или плоскостей в $\mathbb{R}^3$, изложенные в монографии [5].

§2. ИСЧИСЛЕНИЕ ХОРД

2.1. Тождество Плейеля.

Пусть $\mathbf{D}$ – плоская, ограниченная, **строго выпуклая** область с границей $\partial\mathbf{D}$, (строгая выпуклость означает, что $\partial\mathbf{D}$ не имеет прямолинейных частей),

$[\mathbf{D}]$ = пространство **направленных** хорд области $\mathbf{D}$,

ν = направленная хорда области $\mathbf{D}$, $\nu \in [\mathbf{D}]$

$|\nu|$ = длина хорды ν ,

$\mathbf{G}$ = пространство **ненаправленных** прямых на плоскости,

dg = мера в $\mathbf{G}$, инвариантная относительно евклидовых движений плоскости,

$d\nu$ = мера в $[\mathbf{D}]$, которая **локально** совпадает с мерой dg ,

$[\nu]$ = множество прямых $g \in \mathbf{G}$ пересекающих хорду ν .

Обозначая

l = одномерная координата точки на границе $\partial\mathbf{D}$, где ν **входит** в $\mathbf{D}$,

ψ = угол между хордой ν и прямой касательной к границе $\partial\mathbf{D}$ в точке l ,

dl = элемент длины на границе $\partial\mathbf{D}$,

$d\psi$ = стандартная, инвариантная относительно вращений, мера на $(0, \pi)$,
имеем (см. [3]) :

$$d\nu = \sin \psi \, dl \, d\psi. \quad (2.1)$$

Для $n \geq 2$ хорд $\nu_1, \dots, \nu_n \in [\mathbf{D}]$ рассмотрим задачу Бюффона–Сильвестра [3] :
найти меру dg множества

$$A = \cap[\nu_i] \subset [\mathbf{D}].$$

Рис. 1

Так как никакие три конца хорд $\nu_1, \dots, \nu_n$ не лежат на одной прямой, то можно использовать стандартную формулу четырёх индикаторов [1]. Обозначая через d_i или s_i хорды области $[\mathbf{D}]$ указанные на Рис. 1, запишем комбинаторное разложение

$$\int_A dg = 2 \sum I_{n-1}(\nu_i) |\nu_i| + \sum I_{n-2}(d_i) |d_i| - \sum I_{n-2}(s_i) |s_i|. \quad (2.2)$$

где $I_m(\nu) = 1$, если внутренность хорды ν пересекается точно m хордами из множества $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$.

Интегрирование формулы (2.2) относительно меры

$$d\nu_1 \, d\nu_2 \dots d\nu_n,$$

определённой на произведении пространств $[\mathbf{D}] \times [\mathbf{D}] \times \dots \times [\mathbf{D}]$, где каждый множитель $d\nu_i$ совпадает с мерой $d\nu$ из (2.1), приводит к следующему результату (см. [1]) :

$$\int f(\chi) \, dg = \frac{1}{2} \int \int_{(\partial \mathbf{D})^2} f'(\chi) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \, dl_1 \, dl_2, \quad (2.3)$$

Рис. 2

где χ обозначает либо **длину** хорды $\mathbf{D} \cap g$, либо длину хорды l_1, l_2 , когда $l_1, l_2 \in \partial \mathbf{D}$. Углы α_1, α_2 показаны на Рис. 2.

Отметим, что формула (2.3) вначале доказывается для $f(x) = x^n, n > 1$ (тождество Плейеля [6]), а затем, используя линейность (2.3), для многочленов вида $f(x) = a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ и $f'(x) = 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$. Наконец, по теореме Вейерштрасса, (2.3) имеет место для любой функции $f(x)$ имеющей непрерывную производную $f'(x)$ и удовлетворяющей дополнительному условию $f(0) = 0$.

Наконец, (2.3) можно преобразовать заменой $dl_1 dl_2$ на dg в интеграле в правой части, используя хорошо известный якобиан

$$dg = \frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\chi} dl_1 dl_2,$$

если на границе $\partial \mathbf{D}$ нет прямолинейных участков. При этом дополнительном условии

$$\frac{1}{2} \iint_{(\partial \mathbf{D})^2} f'(\chi) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 = \int_{[\mathbf{D}]} f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg.$$

При $f(0) = 0$, формулу (2.3) можно переписать в виде

$$\int f(\chi) dg = \int f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg. \quad (2.4)$$

Случай, когда граница $\partial \mathbf{D}$ обладает прямолинейными участками (является многоугольником) будет рассмотрен ниже в 2.7.

2.2. Хорды пересекающие хорду.

Здесь вновь $\mathbf{D}$ – строго выпуклая, ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbf{D}$. Для совокупности хорд $\nu_1, \dots, \nu_n$ области $\mathbf{D}$ опять рассмотрим множество

$$A = \bigcap_1^n [\nu_i] \subset [\mathbf{D}].$$

Зафиксируем хорду $\nu_0 \in [\mathbf{D}]$ и рассмотрим в пространстве $[\mathbf{D}]$ дельта-меру δ_0 , сосредоточенную в ν_0 . Имеет место следующий вариант формулы (2.2)

$$2\delta_0(A) = 2 \sum_{i=1}^n I_{n-1}(\nu_i) \delta_0([\nu_i]) + \sum I_{n-2}(d_i) \delta_0([d_i]) - \sum I_{n-2}(s_i) \delta_0([s_i]). \quad (2.5)$$

Проинтегрируем формулу (2.5) относительно меры произведения $d\nu_1 \dots d\nu_n$ как и в пункте 2.1. Результат имеет вид

$$\chi_0^n = \frac{n}{2} \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1} dg - \frac{1}{2} n(n-1) \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1} \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg. \quad (2.6)$$

где

χ_0 = длина хорды $g_0 \cap \tau$,

$[\chi_0]$ = множество хорд, пересекающих хорду ν_0 , $[\chi_0] \subset \mathbf{G}$,

остальные обозначения совпадают с обозначениями в формуле (2.4). Используя линейные свойства (2.6), получаем

$$F(\chi_0) = \frac{1}{2} \int_{[\chi_0]} f(\chi) dg - \frac{1}{2} \int_{[\chi_0]} f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg, \quad (2.7)$$

вначале для многочленов вида $f(x) = a_1 x + \dots + a_n x^n$. В (2.7),

$$F(x) = \int_0^x f(u) du.$$

По теореме Вейерштрасса следует, что (2.7) имеет место для любой функции $f(x)$ с непрерывной производной $f'(x)$.

2.3. Хорды выпуклых тел в трёхмерном пространстве.

Пусть $\mathbf{B}$ – ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, граница $\partial\mathbf{B}$ которой не содержит плоских участков. Обозначим

e = плоскость в $\mathbb{R}^3$,

de = мера в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно группы евклидовых движений.

Выберем функцию $f(x)$, и запишем соотношение (2.4) для сечения $\mathbf{B} \cap e$ и проинтегрируем результат по мере de . Используя

$$dg de = d\gamma d\phi$$

где

dg = мера в пространстве прямых в плоскости e , точная копия меры dg в пункте 2.1,

$d\gamma$ = мера в пространстве прямых в $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно группы евклидовых движений,

$d\phi$ = мера в пространстве плоскостей содержащих γ , инвариантная относительно вращений, получаем

$$\iint f(\chi) dg de = \pi \int f(\chi) d\gamma = \int f'(\chi) \chi d\gamma \int \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d\phi,$$

где χ – длина хорды $\gamma \cap \mathbf{B}$, $\gamma \in \Gamma$. Внутренний интеграл можно вычислить используя формулы сферической тригонометрии. Обозначим

P_1 и P_2 = точки в которых γ пересекает $\partial\mathbf{B}$,

h_i = полуплоскость, ограниченная прямой γ и содержащая внешнюю нормаль к $\partial\mathbf{B}$ в точке P_i , $i = 1, 2$,

ϕ_1, ϕ_2 = плоские углы между h и h_1, h_2 соответственно, где

h = полуплоскость, ограниченная прямой γ и содержащая углы α_1, α_2 . Имеем

$$\cot \alpha_1 = \cot \psi_1 \cos \phi_1, \quad \cot \alpha_2 = \cot \psi_2 \cos \phi_2.$$

Имеем $\phi_1 = \phi$, $\phi_2 = \alpha - \phi$, где $\alpha \in (0, \pi)$ – угол между h_1 и h_2 . Прямым вычислением получаем

$$\int \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 d\phi = \frac{\pi}{2} \cot \psi_1^* \cot \psi_2^* \cos \alpha, \quad (2.8)$$

где

ψ_i^* = угол между хордой $\gamma \cap \mathbf{B}$ и плоскостью касательной к $\partial\mathbf{B}$ в точке P_i , $i = 1, 2$.

Итак, мы получаем следующее тождество (ср. с (2.4))

$$\int f(\chi) d\gamma = \frac{1}{2} \int f'(\chi) \chi \cot \psi_1^* \cot \psi_2^* \cos \alpha d\gamma, \quad (2.9)$$

где χ – длина хорды $\gamma \cap \mathbf{B}$. Если в интеграле в правой части перейти к интегрированию по $\partial\mathbf{B} \times \partial\mathbf{B}$, то используя

$$d\gamma = \frac{\sin \psi_1^* \sin \psi_2^*}{\chi^2} dP_1 dP_2,$$

где

dP_i = элемент площади на границе $\partial\mathbf{B}$ в точке P_i ,

χ = длина хорды, соединяющей $P_1, P_2 \in \partial\mathbf{B}$,

ψ_1^*, ψ_2^* = углы как и в случае прямой γ , содержащей точки P_1, P_2 ,

приходим к тождеству для выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$:

$$\int f(\chi) d\gamma = \frac{1}{4} \iint_{\partial\mathbf{B} \times \partial\mathbf{B}} f'(\chi) \chi^{-1} \cos \psi_1^* \cos \psi_2^* \cos \alpha dP_1 dP_2. \quad (2.10)$$

Как и в (2.9), в (2.10) предполагается, что $f(0) = 0$.

2.4. Игла внутри $\mathbf{D}$.

Пусть $\mathbf{D}$ – плоская, ограниченная выпуклая область с кусочно–гладкой границей $\partial\mathbf{D}$, и P_1, P_2 суть две точки внутри $\mathbf{D}$. Вычислим интеграл :

$$\int_{[P_1, P_2]} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg,$$

где

dg = мера в пространстве $\mathbf{G}$, инвариантная относительно евклидовых движений, $[P_1, P_2]$ = множество хорд области $\mathbf{D}$ отделяющих точку P_1 от P_2 , $[P_1, P_2] \subset \mathbf{G}$. Проведём вычисление этого интеграла с помощью комбинаторного разложения для множества $n + 1$ хорд $\nu_1, \dots, \nu_n \in [\mathbf{D}]$ с добавлением отрезка P_1, P_2 . Используя в основном обозначения пункта (2.1), комбинаторное (Бюффона–Сильвестра) разложение для

$$A \cap [P_1, P_2], \text{ где } A = \bigcap_{i=1}^n [\nu_i].$$

имеет вид

$$\int_{A \cap [P_1, P_2]} = 2 |P_1, P_2| \prod_{i=1 \dots n} I_{[P_1, P_2]}(\nu_i) + S_1 + S_2, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \sum I_{[P_1, P_2]}(\nu_i) I_{n-1}(\nu_i) |\nu_i| + \sum I_{[P_1, P_2]}(d_i) I_{n-2}(d_i) |d_i| - \\ &\quad - \sum I_{[P_1, P_2]}(s_i) I_{n-2}(s_i) |s_i|, \\ S_2 &= \sum_{k=1,2} \sum_{i=1}^n I_{n-1}(P_k, t_i) [I_d(P_k, t_i) - I_s(P_k, t_i)] |P_k, t_i| + \\ &\quad + \sum_{k=1,2} \sum_{i=1}^n I_{n-1}(P_k, h_i) [I_d(P_k, h_i) - I_s(P_k, h_i)] |P_k, h_i|. \end{aligned}$$

Так как $\nu_1, \dots, \nu_n$ суть **направленные хорды**, для каждой ν_i корректно определены

t_i и h_i = **конец** и **начало** хорды ν_i (всегда $t_i, h_i \in \partial \mathbf{D}$).

Требуются следующие дополнительные обозначения :

$I_{[P_1, P_2]}(\nu_i) = 1$, если ν_i пересекает отрезок P_1, P_2 , 0 в остальных случаях,

$I_{[P_1, P_2]}(s_i)$ и $I_{[P_1, P_2]}(d_i)$ определяются аналогично,

P_k, l_i = отрезок, соединяющий концы $l_i \in \partial \mathbf{D}$ хорды ν_i и точку P_k ,

$I_s(P_k, l_i) = 1$, если ν_i и отрезок P_1, P_2 лежат в **одной** полуплоскости относительно прямой P_k, l_i , 0 в остальных случаях,

$I_d(P_k, l_i) = 1$, если ν_i и отрезок P_1, P_2 лежат в **разных** полуплоскостях относительно P_k, l_i , 0 в остальных случаях,

$I_s(P_k, l_i) + I_d(P_k, l_i) = 1$ для почти всех $l_i \in \partial \mathbf{D}$,

$I_n(P_k, l_i) = 1$, если хорда области $\mathbf{D}$, содержащая P_k, l_i , пересекается $n - 1$ хордой ν_i , 0 в остальных случаях.

Проинтегрируем формулу (2.11) относительно меры $d\nu_1 d\nu_2 \dots d\nu_n$, где каждая $d\nu_i$ локально совпадает с мерой dg . Интегрирование левой части формулы (2.11) даёт

$$\int \mu(A \cap [P_1, P_2]) d\nu_1 \dots d\nu_n = \int_{[P_1, P_2]} dg \int I_A(g) d\nu_1 \dots d\nu_n = \int_{[P_1, P_2]} (4\chi)^n dg, \quad (2.12)$$

где $\chi = \chi(g)$ – длина хорды $g \cap \mathbf{D}$. Далее имеем

$$2|P_1, P_2| \int \prod_{i=1 \dots n} I_{[P_1, P_2]}(\nu_i) d\nu_1 \dots d\nu_n = 2(4|Q_1, Q_2|)^n |P_1, P_2|, \quad (2.13)$$

где

Q_1, Q_2 = хорда области $\mathbf{D}$, содержащая отрезок P_1, P_2 (см. Рис. 3).

Интегрируем S_1 в (2.11). Имеем

$$\begin{aligned} \int S_1 d\nu_1 \dots d\nu_n &= n \int_{[P_1, P_2]} (4\chi)^n dg + \\ &+ 2n(n-1) \int |\nu_{12}| I_{n-2}(\nu_{12}) I_{[P_1, P_2]}(\nu_{12}) [I_d(\nu_{12}) - I_s(\nu_{12})] d\nu_1 \dots d\nu_n, \end{aligned}$$

где хорда ν_{12} и индикаторы I_{n-2} , I_d и I_s имеют тот же смысл, что и в (2.2).

Интегрируя по ψ_1 и ψ_2 , получаем

$$\int S_1 d\nu_1 \dots d\nu_n =$$

Рис. 3

$$\begin{aligned}
& n \int_{[P_1, P_2]} (4\chi)^n dg - 2n(n-1) \int \int_{(\partial D)^2} (4|\nu_{12}|)^{n-1} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 I_{[P_1, P_2]}(\nu_{12}) dl_1 dl_2 \\
& = n \int_{[P_1, P_2]} (4\chi)^n dg - 4n(n-1) \int_{[P_1, P_2]} (4\chi)^{n-1} \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

где внутренние углы α_1, α_2 указаны на Рис. 2.

Обратимся к интегрированию слагаемого S_2 в формуле (2.11). По симметрии

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1,2} \sum_{i=1}^n \int I_{n-1}(P_k, t_i) [I_d(P_k, t_i) - I_s(P_k, t_i)] |P_k, t_i| d\nu_1 \dots d\nu_n \\
& = \sum_{k=1,2} \sum_{i=1}^n \int I_{n-1}(P_k, h_i) [I_d(P_k, h_i) - I_s(P_k, h_i)] |P_k, h_i| d\nu_1 \dots d\nu_n,
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\int S_2 d\nu_1 \dots d\nu_n = 2n \sum_{k=1,2} \int_{\partial D} (4\chi_{kl})^{n-1} |P_k, l| dl \int_{\wedge} [I_d(\psi) - I_s(\psi)] \sin \psi d\psi.$$

Здесь

l = одномерная координата, определяющая положение t_1 на границе $\partial \mathbf{D}$,

ψ = угол между ν_1 и прямой, касательной к границе $\partial \mathbf{D}$ в точке l ,

$|P_k, l|$ = длина отрезка P_k, l ,

χ_{kl} = длина хорды области $\mathbf{D}$, проходящей через P_k и $l \in \partial \mathbf{D}$,

$I_d(\psi) = I_d(P_k, l)$ (для фиксированных P_k и l , индикатор $I_d(P_k, l)$ зависит только от направления хорды ν_1),

$$I_s(\psi) = 1 - I_d(\psi),$$

$dl, d\psi$ = меры, определённые в пункте 2.1.

Пусть δ_{kl} – один из двух внутренних для области $\mathbf{D}$ углов с вершиной в точке l , между касательной к границе $\partial\mathbf{D}$ в точке l и P_k, l . Условимся, что (см. Рис. 3)

$$\psi \in \delta_{kl} \text{ влечёт } I_d(\psi) = 1.$$

В этих обозначениях

$$\int_0^\pi [I_d(\psi) - I_s(\psi)] \sin \psi d\psi = -2 \cos \delta_{kl},$$

и поэтому

$$\int S_2 d\nu_1 \dots d\nu_n = -4n \sum_{k=1,2} \int_{\partial\mathbf{D}} (4\chi_{kl})^{n-1} |P_k, l| \cos \delta_{kl} dl. \quad (2.15)$$

Последние интегралы можно преобразовать интегрированием по частям на дугах

L_1 и L_2 = частях границы $\partial\mathbf{D}$, отделяемых прямой, проходящей через отрезок P_1, P_2 (см. Рис. 3).

Выбирая как на L_1 так и на L_2 **положительное направление** от Q_2 к Q_1 , получаем

$$|P_1, l| \cos \delta_{1l} dl = -\frac{1}{2} d|P_1, l|^2 \quad \text{и} \quad |P_2, l| \cos \delta_{2l} dl = \frac{1}{2} d|P_2, l|^2.$$

Следовательно, для обеих частей $L_s, s = 1, 2$ интегрирование по частям даёт : в случае $P_k = P_1$,

$$\begin{aligned} & \int_{L_s} (4\chi_{1l})^{n-1} |P_1, l| \cos \delta_{1l} dl = \\ & = \frac{1}{2} (4|Q_1, Q_2|)^{n-1} [|P_1, Q_2|^2 - |P_1, Q_1|^2] + 2(n-1) \int_{L_s} (4\chi_{1l})^{n-2} |P_1, l|^2 d\chi_{1l}, \end{aligned}$$

а в случае $P_k = P_2$,

$$\begin{aligned} & \int_{L_s} (4\chi_{2l})^{n-1} |P_2, l| \cos \delta_{2l} dl = \\ & = \frac{1}{2} (4|Q_1, Q_2|)^{n-1} [|P_2, Q_1|^2 - |P_2, Q_2|^2] - 2(n-1) \int_{L_s} (4\chi_{2l})^{n-2} |P_2, l|^2 d\chi_{2l}, \end{aligned}$$

где $d\chi_{kl}$ обозначает интеграл Стильтьеса. Так как

$$|P_1, Q_2|^2 - |P_1, Q_1|^2 + |P_2, Q_1|^2 - |P_2, Q_2|^2 = 2|Q_1, Q_2| |P_1, P_2|,$$

то (2.13) можно переписать в виде

$$-\frac{1}{4n} \int S_2 d\nu_1 \dots d\nu_n = \frac{1}{4} (4|Q_1, Q_2|)^n |P_1, P_2| +$$

$$+ 2(n-1) \sum_{s=1,2} \int_{L_s} (4\chi_{1l})^{n-2} |P_1, l|^2 d\chi_{1l} - 2(n-1) \sum_{s=1,2} \int_{L_s} (4\chi_{2l})^{n-2} |P_2, l|^2 d\chi_{2l}.$$

Обозначая

P_k, l^* = отрезок дополняющий P_k, l до полной хорды χ_{kl} , получаем

$$|P_k, l|^2 - |P_k, l^*|^2 = \chi_{kl} (|P_k, l| - |P_k, l^*|), \quad d\chi_{kl} = -d\chi_{kl^*},$$

поэтому, для обоих значений $k = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=1,2} \int_{L_s} (4\chi_{kl})^{n-2} |P_k, l|^2 d\chi_{kl} &= \frac{1}{4} \int_{L_1} (4\chi_{kl})^{n-1} (|P_k, l| - |P_k, l^*|) d\chi_{kl} \\ &= \frac{1}{4} \int_{L_1} (4\chi_{kl})^{n-1} |P_k, l| d\chi_{kl} + \frac{1}{4} \int_{L_2} (4\chi_{kl})^{n-1} |P_k, l| d\chi_{kl} \\ &= \frac{1}{4} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma(l) (4\chi_{kl})^{n-1} |P_k, l| d\chi_{kl}, \end{aligned}$$

где в последнем интеграле

$\partial \mathbf{D}$ = граница области $\mathbf{D}$ с направлением **против часовой стрелки**,

$\sigma(l) = 1$, если $l \in L_1$, $\sigma(l) = -1$, если $l \in L_2$.

Итак, (2.15) получает вид

$$\begin{aligned} \int S_2 d\nu_1 \dots d\nu_n &= -2n (4|Q_1, Q_2|)^n |P_1, P_2| - \\ &- 2n(n-1) \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_1(l) (4\chi_{1l})^{n-1} |P_1, l| d\chi_{1l} - 2n(n-1) \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_2(l) |P_2, l| d\chi_{2l}. \end{aligned}$$

где

$$\sigma_1(l) = \sigma(l), \quad \sigma_2(l) = -\sigma(l).$$

Используя (2.12)–(2.15), запишем результат интегрирования формулы (2.11) :

$$\begin{aligned} (1-n) \int_B (4\chi)^n dg &= \\ &= 2(1-n) (4|Q_1, Q_2|)^n |P_1, P_2| - n(n-1) \int_B (4\chi)^n \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg - \\ &- 2n(n-1) \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_1(l) (4\chi_{1l})^{n-1} |P_1, l| d\chi_{1l} - 2n(n-1) \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_2(l) (4\chi_{2l})^{n-1} |P_2, l| d\chi_{2l}. \end{aligned}$$

Сокращая на множитель $4^n(1-n)$, получаем

$$\int_{[P_1, P_2]} \chi^n dg = 2|Q_1, Q_2|^n |P_1, P_2| + n \int_B \chi^n \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg +$$

$$+ \frac{n}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_1(l) \chi_{1l}^{n-1} |P_1, l| d\chi_{1l} + \frac{n}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_2(l) \chi_{2l}^{n-1} |P_2, l| d\chi_{2l}.$$

Используя линейность и теорему Вейерштрасса, получаем

$$\begin{aligned} \int_{[P_1, P_2]} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg &= 2 f(|Q_1, Q_2|) |P_1, P_2| + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_1(l) f'(\chi_{1l}) |P_1, l| d\chi_{1l} + \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_2(l) f'(\chi_{2l}) |P_2, l| d\chi_{2l}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

вначале для многочленов вида $f(x) = a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, а затем для произвольной функции f , имеющей непрерывную производную f' . Условие $f(0) = 0$ снимается, так как полагая $f(x) = \text{constant}$, из (2.14) получаем тождество $\int_B dg = 2 |P_1, P_2|$. В качестве проверки, вычислим предел (2.16), при $P_k \rightarrow Q_k$, $k = 1, 2$. Имеем $\lim |P_k, l| = \chi_{kl} = |Q_k, l|$, $Q_k, l \in \partial \mathbf{D}$. Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_1(l) f'(\chi_{1l}) |\chi_{1l}| d\chi_{1l} &= \frac{1}{2} \int_{\chi_0}^0 f'(u) u du - \frac{1}{2} \int_0^{\chi_0} f'(u) u du = \\ &= \int_0^{\chi_0} f(u) du - \chi_0 f(\chi_0), \end{aligned}$$

и $\frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_2(l) f'(\chi_{2l}) |\chi_{2l}| d\chi_{2l}$ принимают одинаковые значения, в пределе получаем (2.7).

2.5. Произвольное множество $\{P_i\}$ внутри области $\mathbf{D}$.

Результат (2.16) можно обобщить на множества $B \in r\{P_i\}$ для произвольных конечных множеств $\{P_i\} \subset \text{int} \mathbf{D}$.

Задавая точку $P_k \in \{P_i\}$ и множество $B \in r\{P_i\}$, для $l \in \partial \mathbf{D}$ определим две функции $I_B(k^+, l)$ и $I_B(k^-, l)$ следующим образом: обозначим

$\chi(k, l)$ = **направленная хорда** области $\mathbf{D}$, содержащая точки P_k и $l \in \partial \mathbf{D}$, направление от P_k к l ,

$\chi(k^\pm, l, \varepsilon)$ = два параллельных сдвига хорды $\chi(k, l)$ на расстояние ε ,

и условимся, что

хорда $\chi(k^+, l, \varepsilon)$ оставляет точку P_k в **левой полуплоскости**, а

$\chi(k^-, l, \varepsilon)$ оставляет точку P_k в **правой полуплоскости**.

Далее, пусть

$I_B(k^+, l) = \lim I_B(\chi(k^+, l, \varepsilon))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и

$I_B(k^-, l) = \lim I_B(\chi(k^-, l, \varepsilon))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где

$I_B(\chi)$ = индикатор множества $B \in r\{P_i\}$

Используя эти обозначения, приходим к выражению, зависящему от $B \in r\{P_i\}$ и $\{P_i\} \in \text{int}\mathbf{D}$:

$$\Psi_1(B) = \frac{1}{2} \sum_{P_k} \int_{\partial\mathbf{D}} f'(\chi_{k,l}) [I_B(k^+, l) - I_B(k^-, l)] (|P_k, l| - |P_k, l^*|) d\chi_{k,l},$$

где $f(x)$ как и в (2.16), $\chi_{k,l}$ — длина хорды $\chi(k, l)$, а $\partial\mathbf{D}$ остаётся ориентированной против часовой стрелки.

Нам понадобится также

$$\Psi_2(B) = \sum_{\{P_i, P_j\}} u_{ij}(B) |P_i, P_j| f(\chi_{ij}),$$

где сумма распространена на неориентированные пары $\{P_i, P_j\}$,

χ_{ij} = длина хорды области $\mathbf{D}$, проходящей через точки P_i, P_j ,

$u_{ij}(B)$ = комбинаторные коэффициенты, алгоритм вычисления которых приведён в [2].

(Если хорда, проходящая через точки P_i, P_j не содержит других точек из множества $\{P_i\}$, то $u_{ij}(B)$ определяются по четырём-индикаторной формуле (см. [1])). Фактически, Ψ_1 и Ψ_2 суть валюации, определённые на кольце $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}$ (см. [2]) в пространстве $[\mathbf{D}]$:

$$\mathbf{U}_{\mathbf{D}} = \bigcup_{\{P_i\} \subset \mathbf{D}} r\{P_i\}.$$

Аддитивность как Ψ_1 , так и Ψ_2 на кольце $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}$ выводится из их аддитивности на каждом из колец $r\{P_i\}$, что в свою очередь следует из аддитивности индикаторной функции $I_B(g)$.

Теорема 2.1. Для произвольного конечного множества точек $\{P_i\} \in \text{int}\mathbf{D}$ и любого множества $B \in r\{P_i\}$ имеем

$$\int_B [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = \Psi_1 + \Psi_2. \quad (2.17)$$

Доказательство. Мы используем общее утверждение Комбинаторной интегральной геометрии, которое гласит : если две валюации определённые на кольце $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}$ совпадают на Бюффоновых множествах $[P_1, P_2]$, то они совпадают тождественно. С одной стороны,

$$\Psi_3(B) = \int_B [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg$$

является валюацией на кольце $\mathbf{U}_{\mathbf{D}}$. Значения $\Psi_3([P_1, P_2])$ определяются по (2.16). С другой стороны, имеем (сравните с (2.16))

$$\Psi_1([P_1, P_2]) = \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_1(l) f'(\chi_{1l}) |P_1, l| d\chi_{1l} + \frac{1}{2} \int_{\partial \mathbf{D}} \sigma_2(l) f'(\chi_{2l}) |P_2, l| d\chi_{2l}, \quad (2.18)$$

так как

$$I_{[P_1, P_2]}(1^+, l) = 1 \text{ и } I_{[P_1, P_2]}(1^-, l) = 0, \text{ если } l \in L_1,$$

$$I_{[P_1, P_2]}(1^+, l) = 0 \text{ и } I_{[P_1, P_2]}(1^-, l) = 1, \text{ если } l \in L_2.$$

Вместе с дуальными соотношениями для $I_{[P_1, P_2]}(2^\pm, l)$, это даёт

$$\Psi_2([P_1, P_2]) = 2 |P_1, P_2| f(\chi_{12}). \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что (2.17) имеет место для $B = [P_1, P_2]$. Теорема 2.1 доказана. Отметим, что в [1] доказательство этой теоремы проводится с помощью прямого вычисления.

2.6. Чёрное множество, изолированное от границы

Пусть **внутри** области $\mathbf{D}$ задано **открытое множество** $\mathbf{X}$, граница которого $\partial \mathbf{X}$ есть **ломанная**, т.е. $\partial \mathbf{X}$ является конечным объединением игл ν_i (**стороны** множества $\mathbf{X}$). Предположим, что множество $\mathbf{X}$ раскрашено **чёрным** цветом, а его дополнение $\mathbf{D} \setminus \mathbf{X}$ – **белым**. Множество $\mathbf{X}$ есть объединение (не обязательно непересекающихся) открытых выпуклых многоугольников, поэтому множество $\mathbf{X}$ не обязано быть выпуклым или связным. В этом параграфе предполагается, что граница $\partial \mathbf{D}$ не имеет общих точек с замыканием множества $\mathbf{X}$, т.е. граница $\partial \mathbf{D}$ **изолирована от чёрного множества**. Положим

$\{P_i\}$ = множество **вершин** границы $\partial \mathbf{X}$,

$\mathbf{W}$ = множество целиком белых хорд области $\mathbf{D}$,

$\mathbf{W}^c$ = множество хорд области $\mathbf{D}$, содержащие чёрные интервалы.

Вообще говоря, множество $\mathbf{W}$ не принадлежит кольцу $r\{P_i\}$. Однако

$$\mathbf{W}^c \in r\{P_i\}.$$

При условии, что граница $\partial \mathbf{D}$ не содержит прямолинейных отрезков, из формулы (2.4), получаем

$$\int_{[\mathbf{D}]} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = 0,$$

т.е. имеем

$$\int_{\mathbf{W}} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = - \int_{\mathbf{W}^c} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg.$$

Итак, из формулы (2.17) следует

$$\int_{\mathbf{W}} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = -\Psi_1(\mathbf{W}^c) - \Psi_2(\mathbf{W}^c). \quad (2.20)$$

Вычисление $\Psi_2(\mathbf{W}^c)$.

Для простоты, предположим, что множество $\{P_i\}$ не содержит трёх точек, лежащих на одной прямой. Рассмотрим так называемые **струны** множества $\mathbf{X}$. Струна не является стороной множества $\mathbf{X}$, и бывает двух типов. Будем говорить, что вершины P_j и P_k определяют **струну типа s** (соответственно **типа d**) если, для достаточно малых окрестностей U_j и U_k точек P_j и P_k , множества $\mathbf{X} \cap U_j$ и $\mathbf{X} \cap U_k$ лежат в **одной и той же** (соответственно в **разных**) полуплоскостях, относительно прямой соединяющей точки P_j и P_k .

Значение коэффициента $c_{jk}(\mathbf{W}^c)$ зависит от характера иглы P_j, P_k : если

$P_j, P_k = \nu_i$ = сторона множества $\mathbf{X}$, то $c_{jk}(\mathbf{W}^c) = I_{\mathbf{W}}(\nu_i)$,

$P_j, P_k = s_i$ = струна типа s , то $c_{jk}(\mathbf{W}^c) = I_{\mathbf{W}}(s_i)$,

$P_j, P_k = d_i$ = струна типа d , то $c_{jk}(\mathbf{W}^c) = -I_{\mathbf{W}}(d_i)$, где

$I_{\mathbf{W}}(b) = 1$, если хорда области $\mathbf{D}$, содержащая прямолинейный отрезок b , принадлежит множеству $\mathbf{W}$, 0 в противном случае.

(Так как множество $\mathbf{X}$ было определено как открытое множество, то как стороны, так и вершины множества $\mathbf{X}$ принадлежат белому множеству). Так как во всех оставшихся случаях $c_{jk}(\mathbf{W}^c) = 0$, то получаем

$$\Psi_2(\mathbf{W}^c) = \sum |\nu_i| f(\chi(\nu_i)) I_{\mathbf{W}}(\nu_i) + \sum |s_i| f(\chi(s_i)) I_{\mathbf{W}}(s_i) - \sum |d_i| f(\chi(d_i)) I_{\mathbf{W}}(d_i).$$

Вычисление $\Psi_1(\mathbf{W}^c)$.

Рассмотрим теперь величины $I_{\mathbf{W}^c}(j^+, l)$ и $I_{\mathbf{W}^c}(j^-, l)$. Имеем

$I_{\mathbf{W}^c}(j^+, l) = 1$, если $\chi(j, l) \in \mathbf{W}$ и множество $\mathbf{X} \cap U_j$ лежит **справа** от $\chi(j, l)$;

$I_{\mathbf{W}^c}(j^-, l) = 1$ если $\chi(j, l) \in \mathbf{W}$ и множество $\mathbf{X} \cap U_j$ лежит **слева** от хорды $\chi(j, l)$.

(Обе величины обращаются в нуль, если вершина P_j является точкой вогнутости границы $\partial \mathbf{X}$, другими словами, если "чёрный угол" в точке P_j превышает π .)

Пусть β и β^* — углы пересечения между границей $\partial \mathbf{D}$ и прямой l , P_i, l^* в точках l и l^* соответственно. Выберем углы β и β^* , лежащими внутри области $\mathbf{D}$, в одной полуплоскости вместе с $\mathbf{X} \cap U_j$ (см. Рис. 4). Сделаем замену переменной

$$d\chi_{jl} = \sigma_j(l) (|P_j, l| \cot \beta - |P_j, l^*| \cot \beta^*) d\phi, \quad (2.21)$$

Рис. 4

где угловая переменная ϕ определяет направление хорды $\chi_{jl} = \chi_j(\phi)$, и $\sigma_j(l) = -1$, если $I_{\mathbf{W}^c}(j^+, l) = 1$ и $+1$, если $I_{\mathbf{W}^c}(j^-, l) = 1$.

Получаем

$$\begin{aligned} & [I_{\mathbf{W}^c}(j^+, l) - I_{\mathbf{W}^c}(j^-, l)] (|P_j, l| - |P_j, l^*|) d\chi_{jl} = \\ & = -I_{\mathbf{W}}(\chi_j(\phi)) (|P_j, l| - |P_j, l^*|) (|P_j, l| \cot \beta - |P_j, l^*| \cot \beta^*) d\phi. \end{aligned}$$

Так как эта форма не изменяется при преобразовании $\phi \mapsto \phi + \pi$, находим

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{W}^c) &= -\frac{1}{2} \sum_{P_j} \int_{\partial \mathbf{D}} I_{\mathbf{W}}(\chi_j(\phi)) f'(\chi_j(\phi)) |P_j, l| (|P_j, l| \cot \beta - |P_j, l^*| \cot \beta^*) d\phi = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{P_j} \int_0^\pi I_{\mathbf{W}}(\chi_j(\phi)) f'(\chi_j(\phi)) (|P_j, l| - |P_j, l^*|) (|P_j, l| \cot \beta - |P_j, l^*| \cot \beta^*) d\phi. \end{aligned}$$

Следовательно, из формулы (2.20) для множества $\mathbf{W}$ получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{W}} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg = f(0) |\partial \mathbf{D}| + \\ & - \sum |\nu_i| f(\chi(\nu_i)) I_{\mathbf{W}}(\nu_i) - \sum |s_i| f(\chi(s_i)) I_{\mathbf{W}}(s_i) + \sum |d_i| f(\chi(d_i)) I_{\mathbf{W}}(d_i) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{P_j} \int_0^\pi f'(\chi_j(\phi)) (|P_j, l| - |P_j, l^*|) (|P_j, l| \cot \beta - |P_j, l^*| \cot \beta^*) I_{\mathbf{W}}(\chi_j(\phi)) d\phi. \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.7. Чёрные множества, касающиеся границы многоугольного окна

Обобщим результат (2.22) на случай, когда

1. $\mathbf{D}$ заменяется на ограниченный выпуклый многоугольник $\mathbf{D}_1$ и

2. $\mathbf{X}$ не обязательно изолировано от $\partial\mathbf{D}_1$.

Случай $\partial\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{X} = \emptyset$.

Предположение 1. уже приводит к некоторым изменениям в (2.22). Предположим, что чёрное множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{D}_1$ **изолировано от границы** многоугольника $\mathbf{D}_1$, т.е., что $\partial\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{X} = \emptyset$. Как и в предыдущем параграфе, возьмём выпуклую область $\mathbf{D}$, внутри которой лежит многоугольник $\mathbf{D}_1$. Тогда к паре $\mathbf{X}, \mathbf{D}$ применима формула (2.22). Вычислим предел формулы (2.22), записанной для пары $\mathbf{X}, \mathbf{D}$, в предположении, что область $\mathbf{D}$ стягивается к многоугольнику $\mathbf{D}_1$. Так как $\cot \beta_i$ остаётся ограниченным, в пределе все слагаемые в (2.22) сохраняют свой вид, за исключением $\int_{\mathbf{W}} f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg$. В действительности, предел этого слагаемого можно вычислить, см. (2.3). Имеем

$$\iint_{\mathbf{W}} f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg = \frac{1}{2} \iint_{\mathbf{W}} f'(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2.$$

Итак, для пары $\mathbf{X}, \partial\mathbf{D}_1$ получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{W}} f'(\chi) \chi \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 dl_1 dl_2 = \\ & = \iint_{\mathbf{W}} f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2 dg + \sum_{a_i} \frac{1}{2} \iint_{[a_i] \times [a_i]} f'(\chi) \chi dl_1 dl_2, \end{aligned}$$

где a_i — **стороны** многоугольника $\mathbf{D}_1$, а χ в каждом из интегралов по $[a_i] \times [a_i]$, обозначает расстояние между $l_1, l_2 \in a_i$. Так как

$$\frac{1}{2} \iint_{[a_i] \times [a_i]} f'(\chi) \chi dl_1 dl_2 = \int_0^{|a_i|} f(u) du - f(0) |a_i|,$$

то нужная модификация формулы (2.3) в случае изолированной границы, раскрашивающей многоугольник $\mathbf{D}_1$ получается формальной заменой в (2.22) слагаемого $f(0)|\partial\mathbf{D}|$ на $\sum_{a_i} \int_0^{|a_i|} f(u) du$ (сумма **вкладов сторон**).

Случай $\partial\mathbf{D}_1 \cap \mathbf{X} \neq \emptyset$.

Если чёрное множество $\mathbf{X}$ соприкасается с $\partial\mathbf{D}_1$, то соответствующая модификация формулы (2.22) может быть найдена, используя приближение многоугольника $\mathbf{D}_1$ многоугольником $\mathbf{D}_2$, где

$\mathbf{D}_2$ = **выпуклый многоугольник**, содержащий многоугольник $\mathbf{D}_1$, который не соприкасается с $\mathbf{X}$.

Рассмотрим (2.22), для пары $\mathbf{D}_2, \mathbf{X}$ и вычислим предел, когда область $\mathbf{D}_2$ стягивается к многоугольнику $\mathbf{D}_1$.

Так как $\mathbf{X}$ изолировано от $\partial\mathbf{D}_2$, то сумма вкладов сторон для $\mathbf{D}_2$ присутствует. В пределе она имеет вид $\sum \int_0^{|a_k|} f(u) du$, где a_k — стороны многоугольника $\mathbf{D}_1$.

Обозначим $\mathbf{C}$ = множество сторон многоугольника $\mathbf{D}_1$, которые **соприкасаются** с $\mathbf{X}$, и рассмотрим сторону $a_k \in \mathbf{C}$, см. Рис.5.

В выражении $\Psi_2(\mathbf{W}^c)$ для $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{X}$ два слагаемых T_1, T_2 соответствуют некоторым точкам P_1, P_2 , которые лежат на $a_k \in \mathbf{C}$. Точки P_1, P_2 определяются следующим образом.

Рис. 5

Пусть V_1, V_2 – две вершины многоугольника $\mathbf{D}_1$, являющиеся концами отрезка a_k . Тогда $P_i \in a_k$, $i = 1, 2$ является вершиной $\mathbf{X}$ ближайшей к V_i .

Предположим, что при некотором соответствии между $\partial\mathbf{D}_1$ и $\partial\mathbf{D}_2$ (скажем, растяжение с центром в некоторой точке $O \in \mathbf{D}_1$), w_i есть часть границы $\partial\mathbf{D}_2$, которая в процессе приближения стягивается к P_i, V_r ($r = 2$, если $i = 1$ и $r = 1$, если $i = 2$) (см. Рис. 5). Обозначим через Φ_i угол под которым отрезок w_i виден из точки P_r . Далее, пусть

$\chi = \chi(l)$ = длина хорды многоугольника $\mathbf{D}_2$, проходящей через P_i , $l \in \partial\mathbf{D}_2$. Рассмотрим предел (см. (2.21) и (2.22))

$$\begin{aligned} \lim T_i &= \lim \int_{\Phi_i} f'(\chi) (|P_i, l| - |P_i, l^*|) (|P_i, l| \cot \beta - |P_i, l^*| \cot \beta^*) I_{\mathbf{W}}(\chi) d\phi = \\ &= \lim \int_{w_i} f'(\chi) (|P_i, l| - |P_i, l^*|) d\chi_{il}. \end{aligned}$$

Находим, $i = 1, 2$

$$\lim T_i = \int_{|V_i, P_i|}^{|a_k|} f'(x) (x - |V_i, P_i|) dx = (|a_k| - |V_i, P_i|) f(|a_k|) - \int_{|V_i, P_i|}^{|a_k|} f(x) dx.$$

Наконец, слагаемое, соответствующее стороне $a_k \in \mathbf{C}$ в сумме $\Psi_1(\mathbf{W}^c)$ имеет вид $-|P_1, P_2| f(|a_k|)$. Поэтому сумма

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^{|a_k|} f(u) du + \frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \lim T_i - |P_1, P_2| f(|a_k|) = \\ &= \frac{|a_k| + |P_1 P_2|}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{|V_1 P_1|} f(u) du + \frac{1}{2} \int_0^{|V_2 P_2|} f(u) du \end{aligned} \quad (2.23)$$

будет общим вкладом стороны a_k для пары $\mathbf{D}_1, \mathbf{X}$.

Результат.

В силу 1.- 2. надо изменить в (2.22) слагаемое $f(0)|\partial \mathbf{D}|$ на сумму слагаемых, соответствующих сторонам a_k . Каждое слагаемое равно либо $\int_0^{|a_i|} f(u) du$, либо b_k в (2.23). Так как все остальные слагаемые сохраняют свой вид, то получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{W}} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \alpha_1 \cot \alpha_2] dg &= \sum_{a_i \in \mathbf{C}^c} \int_0^{|a_i|} f(u) du + \sum_{a_k \in \mathbf{C}} b_k - \\ &- \sum |\nu_i| f(\chi(\nu_i)) I_{\mathbf{W}}(\nu_i) - \sum |s_i| f(\chi(s_i)) I_{\mathbf{W}}(s_i) + \sum |d_i| f(\chi(d_i)) I_{\mathbf{W}}(d_i) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{P_j} \int_0^\pi f'(\chi_j) (|P_j, l| - |P_j, l^*|) (|P_j, l| \cot \beta - |P_j, l^*| \cot \beta^*) I_{\mathbf{W}}(\chi_j(\phi)) d\phi, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $\mathbf{C}^c$ означает множество сторон многоугольника $\mathbf{D}_1$, замыкание которых не соприкасается с $\mathbf{X}$; среди ν_i, s_i или d_i нет отрезков принадлежащих стороне многоугольника $\mathbf{D}_1$; если P_j принадлежит стороне многоугольника $\mathbf{D}_1$, то $|P_j, l| = 0$.

§3. СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ : КЛАСС НУ

В этом параграфе

$\mathcal{D}$ = пространство ограниченных выпуклых многоугольников в $\mathbb{R}^2$,

D = ограниченный выпуклый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ (элемент множества $\mathcal{D}$),

$\mathbf{P}$ = вероятностная мера в $\mathcal{D}$.

Случайный многоугольник определяется как (измеримое) отображение

$\mathbf{D}$ = отображение из некоторого вероятностного пространства в пространство $\mathcal{D}$.

Для любого $\mathbf{D}$ его вероятностное распределение $\mathbf{P}$ определяется как **индуцированная вероятностная мера на $\mathcal{D}$** . Дадим несколько тематических примеров случайных многоугольников (отображений) $\mathbf{D}$, опирающихся на следующие стандартные понятия стохастической геометрии ([7], [5]) :

$\{g_i\}_\lambda$ = случайный пуассоновский процесс прямых на плоскости $\mathbf{R}^2$, управляемый мерой λdg , где

dg = инвариантная относительно евклидовых движений мера в $\mathbf{G}$,

$\mathbf{G}$ = пространство прямых на евклидовой плоскости $\mathbf{R}^2$, $g \in \mathbf{G}$.

Ниже нам понадобятся следующие обозначения :

$\mathbf{G}^\infty$ = пространство реализаций точечных процессов в $\mathbf{G}$, $\{g_i\} \in \mathbf{G}^\infty$,

Π_λ = вероятностное распределение процесса $\{g_i\}_\lambda$.

$\{D_i\}_\lambda$ = случайное множество многоугольных компонент D_i на которые $\{g_i\}_\lambda$ разбивает плоскость $\mathbf{R}^2$.

Понятие **взвешенного типичного многоугольника** в случайном процессе многоугольников определено в [5].

Мы предполагаем, что на плоскости $\mathbf{R}^2$ задана декартова система координат O, x, y .

Пример 3.1. $\mathbf{D}_a$ = взвешенный по площади типичный многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$. Выбираем вероятностное пространство $(\mathbf{G}^\infty, \Pi_\lambda)$. Положим

$$\mathbf{D}_a : \{g_i\} \rightarrow D_1$$

где D_1 = многоугольник из случайного множества $\{D_i\}$, накрывающий начало координат O . С вероятностью 1 такой многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$ существует и единственен.

Пример 3.2. $\mathbf{D}_p$ = типичный многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$, взвешенный по длине периметра H .

Выбираем вероятностное пространство $(\mathbf{G}^\infty, \Pi_\lambda)$, но теперь

$$\mathbf{D}_p : \{g_i\} \rightarrow D_2,$$

где D_2 = один из двух многоугольников, на которые D_1 из Примера 3.1 разбивается осью x . Мы выбираем тот, внутренность которого лежит в полуплоскости $y > 0$.

Пример 3.3. $\mathbf{D}_v$ = типичный многоугольник в $\{D_i\}_\lambda$ взвешенный по числу вершин.

Выбираем вероятностное пространство $(\mathbf{G}^\infty \times [O], \Pi_\lambda \times \frac{1}{2} \sin \psi d\psi)$, где

$[O]$ = пучок прямых, проходящих через начало координат O ,

ψ = угол между прямой из пучка $[O]$ и осью x ,

таким образом, $\frac{1}{2} \sin \psi d\psi$ определяет вероятностную меру на пучке $[O]$. Положим

$$\mathbf{D}_v : (\{g_i\}, g_\psi) \rightarrow D_3$$

где

D_3 = один из двух многоугольников на которые D_2 из Примера 3.2 разбивается прямой g_ψ ,

g_ψ = прямая, содержащая O и образующая угол ψ с осью x .

Полагаем, что D_3 имеет сторону на полуоси $x > 0$.

Пример 3.4. $\mathbf{D}_\lambda$ = типичный многоугольник (вес 1) в $\{D_i\}_\lambda$.

Вероятностное пространство имеет вид $(\mathbf{G}^\infty \times [O] \times (0, 2\pi), \Pi_\lambda \times \frac{1}{2} \sin \psi d\psi \times d\mathbf{r})$,

где

$(0, 2\pi)$ = группа вращений плоскости вокруг начала координат O ,

$\mathbf{r} \in (0, 2\pi)$ обозначает вращение,

$d\mathbf{r}$ = равномерное распределение на $(0, 2\pi)$.

Полагаем

$$\mathbf{D}_\lambda = (\{g_i\}_\lambda, g_\psi, \mathbf{r}) \rightarrow D_4$$

где

D_4 = часть многоугольника D_1 из Примера 3.1, образованного сечениями $\mathbf{r}g_\psi$ и $\mathbf{r}Ox$, и лежащего внутри полуплоскости $x > 0$,

$\mathbf{r}g_0$ = образ g_0 из Примера 3.3, при вращении $\mathbf{r}$,

$\mathbf{r}Ox$ = образ оси x при том же вращении $\mathbf{r}$.

Ниже случайный многоугольник $\mathbf{D}_\lambda$ Примера 3.4 будет играть особую роль.

Вероятностное распределение случайного многоугольника $\mathbf{D}_\lambda$ будем обозначать через $\mathbf{P}_\lambda$.

3.1. Класс НУ

Дадим список функций определённых в пространстве $\mathcal{D}$ (или множеств, зависящих от $D \in \mathcal{D}$), которые будем использовать ниже :

H = длина периметра области D

$||D||$ = площадь области D

$[D]$ = множество прямых g , пересекающих D ,

N = число сторон многоугольника D .

Как только определена вероятностная мера $\mathbf{P}$ на $\mathcal{D}$, все функции в этом списке становятся случайными. Мы будем всегда предполагать, что

$$H_0 = \int H d\mathbf{P} < \infty. \quad (3.1)$$

С $(\mathbf{P}, \mathcal{D})$ удовлетворяющими условию (3.1), мы связываем другое вероятностное пространство $(\mathcal{D} \times \mathbf{G}, \mathbf{P}^*)$:

$\mathcal{D} \times \mathbf{G}$ = пространство пар (D, g) , где $D \in \mathcal{D}$, $g \in \mathbf{G}$, и

$$\mathbf{P}^* = \frac{1}{H_0} I_{[D]}(g) d\mathbf{P} dg, \quad (3.2)$$

где $I_{[D]}(g) = 1$, если $g \in [D]$, 0 в противном случае.

Так как

$$\frac{1}{H_0} \int \int I_{[D]}(g) d\mathbf{P} dg = 1$$

то (3.2) является вероятностной мерой. Это следует из тождества

$$\int I_{[D]}(g) dg = H.$$

Случайные величины, определённые на вероятностном пространстве $(\mathcal{D} \times \mathbf{G}, \mathbf{P}^*)$ мы снабжаем звёздочками. Важным примером является отображение

$$(D, g) \mapsto (\chi^*, \psi_1^*, \psi_2^*) \quad (3.3)$$

где

χ^* = длина хорды $D \cap g$,

ψ_1^*, ψ_2^* = два угла пересечения прямой g со сторонами многоугольника D .

Проекция $\mathbf{P}^*$ на пространство $(0, \infty) \times (0, \pi) \times (0, \pi)$ является вероятностным распределением случайной тройки $(\chi^*, \psi_1^*, \psi_2^*)$. Для любой функции $f(\chi, \psi_1, \psi_2)$, определённой для $\chi \in (0, \infty)$, $\psi_1, \psi_2 \in (0, \pi)$, будем писать

$$\int f(\chi, \psi_1, \psi_2) d\mathbf{P}^* = \mathbf{E} f(\chi^*, \psi_1^*, \psi_2^*),$$

$\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание случайной величины.

Определение. Случайный многоугольник $\mathbf{D}$ (или его вероятностное распределение $\mathbf{P}$) **принадлежит классу НУ**, если удовлетворяется (3.1), и случайные величины $\chi^*, \psi_1^*, \psi_2^*$ независимы. Эквивалентно, распределение $\mathbf{P}$ принадлежит классу НУ тогда и только тогда, когда для любой факторизируемой $f(\chi, \psi_1, \psi_2) = f_1(\chi)f_2(\psi_1)f_3(\psi_2)$ имеем

$$\mathbf{E} f_1(\chi^*)f_2(\psi_1^*)f_3(\psi_2^*) = \mathbf{E} f_1(\chi^*) \mathbf{E} f_2(\psi_1^*) \mathbf{E} f_3(\psi_2^*).$$

Покажем, что класс НУ не пуст. Как показано в [5], для пуассоновского процесса прямых $\{g_i\}_\lambda$ случайный точечный процесс пересечений прямых g_i с осью x является пуассоновским, а углы пересечения, образованные прямыми g_i с осью

x , суть независимые случайные величины с общей плотностью распределения $\frac{1}{2} \sin \psi d\psi$. Отсюда вытекает :

Случайный многоугольник D_λ Примера 3.4 принадлежит классу НУ.
Кроме того,

χ^* = экспоненциально распределённая случайная величина со средним $\frac{1}{2\lambda}$,

ψ_1^*, ψ_2^* = независимые случайные углы с общей плотностью распределения $\frac{1}{2} \sin \psi d\psi$.

Мы можем отличать углы ψ_1^* и ψ_2^* в формуле (3.3), если прямые g будут направленными. Тогда случайные углы будут симметрично зависимы. Следующая лемма легко доказывается методом **фиксированных реализаций** [5], и является следствием представления меры $d\mathbf{g}$ в виде (3.2) и (1.1).

Лемма 3.1. Для любого распределения $\mathbf{P}$, удовлетворяющего условию (3.1), маргинальная плотность распределения каждого из углов ψ_i^* (определённых в (3.3)) всегда имеет вид $\frac{1}{2} \sin \psi d\psi$ (условие $\mathbf{P} \in$ классу НУ не требуется).

Насколько богат класс НУ случайных многоугольников?

Теорема 3.1. Для любой функции распределения $F(x)$, сосредоточенной на интервале $(0, \infty)$, с конечными моментами

$$\lambda_1 = \int_0^\infty \lambda dF(\lambda), \quad \lambda_2 = \int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda),$$

смесь

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda_2} \int_0^\infty \lambda^2 \mathbf{P}_\lambda dF(\lambda) \quad (3.4)$$

где $\mathbf{P}_\lambda$ – вероятностное распределение случайного многоугольника Примера 3.4, принадлежит классу НУ. Плотность распределения $\rho(u)$ случайной величины χ^* , соответствующей формуле (3.4) является смесью экспоненциальных плотностей

$$\rho(u) = \frac{2}{\lambda_1} \int_0^\infty \exp(-2\lambda u) \lambda dF(\lambda).$$

Доказательство Теоремы 3.1 следует из того, что (3.4) соответствует типичному (с весом 1) многоугольнику в смеси случайных процессов многоугольников $\{D_i\}_\lambda$, где параметр λ является случайной величиной с функцией распределения $F(x)$.

3.2. Томография в классе НУ

Пусть $\mathbf{F} = \mathcal{F}(D)$ – функционал, определённый в пространстве $\mathcal{F}$ многоугольников. Будем говорить, что $\mathbf{F}$ **томографический** для некоторого класса вероятностных мер $\mathbf{P}$, удовлетворяющих (3.1), если существует функция $f(x)$, определённая на действительной оси такая, что для каждого распределения $\mathbf{P}$ из этого

класса имеем

$$\mathbf{E} \mathbf{F} = \int \mathbf{F}(D) d\mathbf{P} = H_0 \mathbf{E} f(\chi^*). \quad (3.5)$$

Отметим, что все функционалы В. Бляшке (см. [8])

$$\mathcal{F}_n(D) = \int \chi^n dg, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \chi = |D \cap g| \quad (3.6)$$

томографические для **каждого** распределения $\mathbf{P}$, удовлетворяющего (3.1), так как по теореме Фубини имеем

$$\mathbf{E} \mathcal{F}_n(D) = \int \mathcal{F}_n(D) d\mathbf{P} = H_0 \mathbf{E} (\chi^*)^n.$$

Из формул (см. [8])

$$\mathcal{F}_1(D) = \pi \|D\|, \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_3(D) = 3 \|D\|^2,$$

($\|D\|$ = площадь многоугольника D), вытекает, что **для класса (3.1), как $\|D\|$ так и $\|D\|^2$ суть томографические функционалы.**

Теорема 3.2. Для класса НУ, функционал

$$\mathcal{F}(D) = \sum_k \int_0^{a_k} f(u) du$$

где a_k — стороны многоугольника D , является томографическим для любой функции $f(u)$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{P}$ вероятностная мера на $\mathcal{D}$ из класса НУ. Запишем (2.24) для пустого $\mathbf{W}$

$$\int_{[D]} [f(\chi) - f'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2] dg = \sum_{a_i} \int_0^{a_i} f(u) du,$$

и проинтегрируем это тождество относительно $\mathbf{P}$. Так как для $i = 1, 2$ по Лемме 3.1 имеем

$$\mathbf{E} \cot \psi_i^* = \frac{1}{2} \int \cot \psi \sin \psi d\psi = 0,$$

то, очевидно

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{P} \int_{[D]} f'(\chi) \chi \cot \psi_1 \cot \psi_2 dg &= H_0 \mathbf{E} f'(\chi^*) \chi^* \cot \psi_1^* \cot \psi_2^* = \\ &= H_0 \mathbf{E} f'(\chi^*) \chi^* \mathbf{E} \cot \psi_1^* \mathbf{E} \cot \psi_2^* = 0, \end{aligned}$$

Следовательно результат усреднения имеет вид

$$H_0 \mathbf{E} f(\chi^*) = \int d\mathbf{P} \sum_k \int_0^{a_k} f(u) du. \quad (3.7)$$

Теорема 3.2 доказана.

Следствие 3.1. Для каждого $\mathbf{P}$ из класса НУ, средние функционалов В. Бляшке (3.6) имеют вид

$$\mathbf{E} \mathcal{F}_n(D) = \frac{1}{n+1} \mathbf{E} \sum_k a_k^{n+1}.$$

В частности,

$$\mathbf{E} \|D\| = \frac{1}{2\pi} \mathbf{E} \sum_k a_k^2, \quad \mathbf{E} \|D\|^2 = \frac{1}{6} \mathbf{E} \sum_k a_k^4.$$

3.3. Распределения длины стороны.

Пусть $\mathbf{P}$ – вероятностная мера в пространстве $\mathcal{D}$, а H_0 задаётся по формуле (3.1).

Определим новое вероятностное распределение в пространстве $\mathcal{D}$:

$$d\mathbf{P}_* = \frac{H}{H_0} d\mathbf{P}$$

(H = длина периметра многоугольника D).

Определим случайную величину $\mathbf{a}_1$ следующим образом : вначале выберем многоугольник D из вероятностного распределения $\mathbf{P}_*$, затем выберем случайную сторону a_k многоугольника D , с вероятностью $\frac{|a_k|}{H}$. Пусть

$\mathbf{a}_1$ = равняется длине выбранной стороны. В этих обозначениях

$$\int d\mathbf{P} \sum_k \int_0^{a_k} f(u) du = H_0 \mathbf{E} F(\mathbf{a}_1),$$

где

$$F(u) = u^{-1} \int_0^u f(x) dx.$$

Итак (3.7) можно записать в виде (H_0 сокращается)

$$\mathbf{E} f(\chi^*) = \mathbf{E} F(\mathbf{a}_1). \quad (3.8)$$

В частности, если

$$f(u) = \exp(-su), \quad F(u) = u^{-1} \frac{1 - \exp(-su)}{s},$$

то для преобразования Лапласа $L_{\chi^*}(s) = \mathbf{E} \exp(-s\chi^*)$ получаем следующее выражение

$$L_{\chi^*}(s) = \mathbf{E} \frac{1 - \exp(-s\mathbf{a}_1)}{s\mathbf{a}_1}. \quad (3.9)$$

Как следует из следующего примера, (3.9) иногда позволяет найти точное вероятностное распределение для $\mathbf{a}_1$.

3.4. Пример анализа.

Если для распределения $\mathbf{P}$ из класса НУ длина случайной хорды χ^* имеет экспоненциальное распределение с параметром λ т.е., если

$$L_{\chi^*}(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda},$$

то (3.9) принимает вид

$$\frac{\lambda}{s + \lambda} = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-sv)}{sv} \rho_1(v) dv,$$

где $\rho_1(v)dv$ — плотность распределения случайной величины $\mathbf{a}_1$. Функцию $\rho_1(v)$ можно легко найти, если предположить, что

$$\int_0^\infty \frac{1}{v} \rho_1(v) dv = C < \infty. \quad (3.10)$$

При этом предположении

$$\int_0^\infty \exp(-sv) \frac{\rho_1(v)}{v} dv = C - s \frac{\lambda}{s + \lambda} = \frac{(C - \lambda)s + C\lambda}{s + \lambda}.$$

Выражение $C^{-1} \frac{(C - \lambda)s + C\lambda}{s + \lambda}$ является распределением Лапласа неотрицательной случайной величины тогда и только тогда, когда $C = \lambda$, и выражение принимает вид $\frac{\lambda}{s + \lambda}$. Это означает, что $\frac{\rho_1(v)}{v} = \lambda^2 \exp(-\lambda v)$ и наконец

$$\rho_1(v) = \lambda^2 v \exp(-\lambda v).$$

Мы доказали следующее утверждение.

Если распределение $\mathbf{P}$ принадлежит классу НУ, а длина случайной хорды χ^* имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , то при дополнительном условии сходимости (3.10) длина случайной стороны $\mathbf{a}_1$ имеет плотность распределения вида $\lambda^2 v \exp(-\lambda v) dv$.

3.5. Другая плотность.

Определим случайную величину $\mathbf{a}_2$ следующим образом : вначале выберем многоугольник D из вероятностного распределения $\frac{N}{N_0} d\mathbf{P}$, где N = случайное число сторон многоугольника D со средним

$$N_0 = \int N d < \infty.$$

Далее выберем случайную сторону a_2 многоугольника D , выбирая сторону с вероятностью $\frac{1}{N}$.

Если $\mathbf{P}$ принадлежит классу НУ и длина случайной хорды χ^* имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , то длина случайной стороны $\mathbf{a}_2$ также имеет экспоненциальное распределение с параметром λ .

Доказательство. Обозначим через $\rho_2(v)$ плотность распределения длины случайной стороны $\mathbf{a}_2$. Ввиду (3.7), тождество

$$N_0 \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{a}_2} f(u) du = \int d\mathbf{P} \sum_k \int_0^{a_k} f(u) du$$

принимает вид (3.5)

$$H_0 \mathbf{E} f(\chi^*) = N_0 \mathbf{E} \int_0^{\mathbf{a}_2} f(u) du. \quad (3.11)$$

Повторением этапов, которые привели к (3.10), задача сводится к нахождению плотности $\rho_2(v)$ из соотношения

$$\frac{H_0}{N_0} \frac{\lambda}{s + \lambda} = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-sv)}{s} \rho_2(v) dv.$$

Для преобразования Лапласа плотности $\rho_2(v)$ находим

$$\int_0^\infty \exp(-sv) \rho_2(v) dv = \frac{\lambda + s(1 - H_0(N_0)^{-1}\lambda)}{s + \lambda}$$

Это выражение является преобразованием Лапласа случайной величины тогда и только тогда, когда

$$\frac{H_0}{N_0} = (\lambda)^{-1},$$

т.е. когда выражение принимает вид $\frac{\lambda}{s + \lambda}$. Итак плотность распределения $\rho_2(v)$ имеет экспоненциальное распределение, без дополнительных условий.

3.6. Проверка.

Проверим последние два утверждения для случайного многоугольника $\mathbf{D}_\lambda$ Примера 3.4.

С точностью до евклидовых движений, случайный многоугольник $\mathbf{D}_p$ Примера 3.2 имеет вероятностное распределение $\frac{H}{H_0} d\mathbf{P}_\lambda$. Распределение случайной величины $\mathbf{a}_1$ совпадает с распределением стороны $\mathbf{D}_p$, лежащей на оси x . По хорошо известному свойству пуассоновских процессов на прямой, сторона $\mathbf{a}_1$ распределена как сумма двух независимых, экспоненциально распределённых случайных величин. Этот результат согласуется с первым из двух утверждений.

С точностью до евклидовых движений, случайный многоугольник $\mathbf{D}_v$ Примера 3.3 имеет вероятностное распределение $\frac{N}{N_0} d\mathbf{P}_\lambda$. Распределение случайной величины $\mathbf{a}_2$ совпадает с распределением стороны $\mathbf{D}_v$, лежащей на оси x . Для пуассоновских процессов на прямой, расстояние из начала координат O до первой точки на полуоси $x > 0$ имеет экспоненциальное распределение. Этот результат согласуется со вторым утверждением.

§4. СЛУЧАЙНЫЕ МНОГОГРАННИКИ В $\mathbb{R}^3$: КЛАСС НО

Для случайных ограниченных и с вероятностью 1 выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$ понятие класса НУ обобщается на две различные версии : для сечений случайных многогранников прямыми, мы определяем класс НО, а для сечений случайных многогранников плоскостями, мы определяем класс “Независимые Плоские Углы”. Здесь мы кратко рассмотрим класс НО.

Случайный многогранник в $\mathbb{R}^3$ можно отождествить с вероятностной мерой $\mathbf{P}$ в

$\mathcal{B}$ = пространство ограниченных, выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^3$, $B \in \mathcal{B}$,

Как и в плоском случае, конкретные построения вероятностных мер $\mathbf{P}$ в пространстве $\mathcal{B}$ осуществляются с помощью отображений

$\mathbf{V}$ = отображение некоторого вероятностного пространства в $\mathcal{B}$.

Пример 4.1 использует стандартные понятия Стохастической Геометрии (см. [5]). Пусть

de = инвариантная относительно евклидовых движений, мера в пространстве плоскостей в $\mathbb{R}^3$,

$\{e_i\}_\lambda$ – случайный пуассоновский процесс плоскостей e_i в $\mathbb{R}^3$, управляемый мерой λde , $\lambda > 0$,

$\{B_i\}_\lambda$ = многогранные компоненты на которые пуассоновский процесс плоскостей $\{e_i\}_\lambda$ разбивает пространство $\mathbb{R}^3$.

Пример 4.1. $\mathbf{V}_\lambda$ = типичный (с весом 1) случайный многогранник из $\{B_i\}_\lambda$.

Предполагая, что в пространстве $\mathbb{R}^3$ определена декартова система координат O, x, y, z , в $\mathbb{R}^3$ построим две случайные плоскости, проходящие через начало координат O . В плоскости x, y проведём прямую g_ψ как в Примере 3.3 и положим

e' = плоскость, проходящая через прямую g_ψ , и образующая случайный плоский угол ψ' с плоскостью x, y ,

e'' = плоскость, проходящая через ось x , и образующая случайный плоский угол ψ'' с плоскостью x, y , причём

ψ', ψ'' суть независимые, одинаково распределённые случайные величины с плотностью $\frac{2}{\pi} \sin^2 \psi d\psi$ на интервале $(0, \pi)$.

Также выберем независимо

$\mathbf{r}$ = случайное **равномерно распределённое** вращение пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг начала координат O и

$\mathbf{V}_O$ = многогранник из $\{B_i\}_\lambda$, содержащий начало координат O .

Используя эти случайные элементы, построим случайный многогранник $\mathbf{V}_\lambda$ следующим образом :

$\mathbf{B}_\lambda$ = часть многогранника $\mathbf{B}_0$, лежащего в полупространстве $x > 0$, и ограниченного $\mathbf{re}'$, $\mathbf{re}''$ и $\mathbf{r}$ (плоскость x, y).

Пусть $\mathbf{P}$ – вероятностная мера на $\mathcal{B}$, удовлетворяющая условию

$$S_0 = \int S d\mathbf{P} < \infty, \quad (4.1)$$

где S = площадь поверхности ∂B . В пространстве $\mathcal{B} \times \Gamma$ пар (B, γ) где $B \in \mathcal{B}$ и $\gamma \in \Gamma$, рассмотрим вероятностную меру $\mathbf{P}^*$, определённую следующим соотношением

$$d\mathbf{P}^* = \frac{2}{\pi S_0} I_{[B]}(\gamma) d\mathbf{P} d\gamma, \quad (4.2)$$

где

$d\gamma$ = мера в пространстве прямых в $\mathbf{R}^3$, инвариантная относительно евклидовых движений,

Рассмотрим случайные величины :

χ^* = длина (пространственной) хорды $B \cap \gamma$,

ω_1^*, ω_2^* = пространственные направления внешних нормалей к двум граням многогранника B , которые пересекают прямую γ .

Для произвольного распределения вероятностей $\mathbf{P}$, удовлетворяющего (4.1), и произвольной функции $f(\chi, \omega_1, \omega_2)$, определённой на произведении интервала $(0, \infty)$ с произведением единичной сферы на себя, имеем

$$\int d\mathbf{P} \int_{[B]} f(\chi, \omega_1, \omega_2) d\gamma = \frac{\pi S_0}{2} \mathbf{E} f(\chi^*, \omega_1^*, \omega_2^*)$$

где $\mathbf{E}$ обозначает математическое ожидание.

Лемма 4.1. Если $\mathbf{B}$ удовлетворяет (4.1), то каждое случайное направление ω_i^* имеет плотность распределения $\frac{1}{\pi} \cos(\tau, \omega) d\omega$, где $d\omega$ – элемент телесного угла, а τ – направление хорды χ .

Определение. Случайный многогранник $\mathbf{B}$ (или его распределение вероятностей $\mathbf{P}$) принадлежит классу НО, если (4.1) имеет место и случайные величины $\chi^*, \omega_1^*, \omega_2^*$ независимы.

Ниже $\mathbf{P}_\lambda$ обозначает распределение вероятностей случайного многогранника $\mathbf{B}_\lambda$ Примера 4.1, а доказательства повторяют доказательства аналогичных утверждений §3.

Теорема 4.1. Случайный многогранник $\mathbf{B}_\lambda$ (или его вероятностное распределение $\mathbf{P}_\lambda$) принадлежит классу НО. Для $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\lambda$ случайная величина χ^* имеет экспоненциальное распределение с параметром $\pi\lambda^{-1}$.

Теорема 4.2. Для любой функции распределения $F(x)$, определённой на $(0, \infty)$ с конечными моментами

$$\lambda_1 = \int_0^\infty \lambda dF(\lambda), \quad \lambda_2 = \int_0^\infty \lambda^2 dF(\lambda), \quad \lambda_3 = \int_0^\infty \lambda^3 dF(\lambda),$$

смесь

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\lambda_3} \int_0^\infty \mathbf{P}_\lambda \lambda^3 dF(\lambda) \quad (4.3)$$

принадлежит классу НО. Плотность распределения $\rho(u)$ случайной величины χ^* для (4.3) является смесью экспоненциальных плотностей

$$\rho(u) = \frac{\pi}{\lambda_1} \int_0^\infty \exp(-\pi \lambda u) \lambda dF(\lambda).$$

Основное тождество, мотивирующая наше определение класса НО есть версия формулы (2.10) для **многогранника В**. Если мы запишем эту версию для $f(x) = x^n$, то эта версия содержит функционалы В. Бляшке

$$\mathcal{F}_n(D_k) = \int_{[D_k]} \chi^{n+1} dg$$

для **многоугольных граней** многогранника **В**. Как было показано в [1] эта версия формулы (2.10) имеет вид

$$\int \chi^n d\gamma = \frac{n}{2} \int \chi^n \cot \psi_1 \cot \psi_2 \cos \alpha d\gamma + \frac{1}{2(n+1)} \sum_k \int_{[D_k]} \chi^{n+1} dg. \quad (4.4)$$

Проинтегрируем (4.4) по вероятности $\mathbf{P}$ из класса НО. Используя факторизацию, получаем

$$\int d\mathbf{P} \int \chi^n \cot \psi_1 \cot \psi_2 \cos \alpha d\gamma = 0.$$

Следовательно, для любого распределения $\mathbf{P}$ из класса НО, имеем

$$\frac{\pi S_0}{2} \mathbf{E}(\chi^*)^n = \frac{1}{2(n+1)} \int d\mathbf{P} \sum_k \mathcal{F}_{n+1}(D_k). \quad (4.5)$$

Этот результат можно сформулировать так : **для любого случайного многогранника В из класса НО, сумма $\sum_k \mathcal{F}_{n+1}(D_k)$ функционалов В. Бляшке от его граней D_k есть томографическая величина.**

4.1. Хорды на гранях В

Пусть $\mathbf{P}$ – вероятностное распределение на $\mathcal{B}$, а N = число граней многогранника B . Предположим, что

$$N_0 = \int N d\mathbf{P} < \infty. \quad (4.6)$$

Случайную величину χ_* , определим следующим образом : вначале выберем многогранник B из вероятностного распределения $d\mathbf{P}_1 = \frac{N}{N_0} d\mathbf{P}$, затем выберем грань D многогранника B , каждая грань D_k имеет вероятность $\frac{1}{N}$. Поместив D в плоскости $\mathbf{R}^2$, получим случайный многоугольник $\mathbf{D}_*$ в смысле §3, и пусть $\mathbf{P}_*$ – его распределение вероятностей. Предположим, что пара (D, g) имеет вероятностное распределение пропорциональное $I_D(g)d\mathbf{P}_* dg$. Определим случайную хорду $\chi_* = D \cap g$, и дадим набросок доказательства следующего утверждения.

Если $\mathbf{P}$ принадлежит классу НО и χ_ имеет экспоненциальное распределение, то длина случайной хорды χ_* распределена экспоненциально с тем же параметром.*

Доказательство. Для произвольной функции $f(x)$, формула (4.5) принимает вид

$$\frac{\pi S_0}{2} \mathbf{E} f(\chi_*) = H_0 \mathbf{E} \int_D F(|D \cap g|) dg, \quad F(u) = \int_0^u f(x) dx,$$

где H_0 = среднее значение периметра для $\mathbf{D}$. Подставляя

$$f(u) = \exp(-su), \quad F(u) = u^{-1} \frac{1 - \exp(-su)}{s},$$

для преобразования Лапласа $L_{\chi^*}(s) = \mathbf{E} \exp(-s\chi^*)$, получаем следующее выражение

$$\frac{\pi S_0}{2H_0} L_{\chi^*}(s) = \mathbf{E} \frac{1 - \exp(-s\chi^*)}{s\chi^*}. \quad (4.7)$$

В случае, когда χ^* имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , т.е., при

$$L_{\chi^*}(s) = \frac{\lambda}{s + \lambda}$$

выражение (4.7) принимает вид

$$\frac{\pi S_0}{2H_0} \frac{\lambda}{s + \lambda} = \int_0^\infty \frac{1 - \exp(-sv)}{s} \rho_*(v) dv,$$

где $\rho_*(v)dv$ плотность распределения случайной величины χ_* .

Отсюда следует, что

$$\frac{\pi S_0}{2H_0} = (\lambda)^{-1},$$

и ρ_* является плотностью экспоненциального распределения с параметром λ .

4.2. Распределение длины ребра.

Предположим дополнительно, что случайная грань D_* многогранника B принадлежит классу НУ в смысле параграфа 3. Соответствующий класс случайных многогранников будем называть классом НО—НУ. Этот класс не пуст : **случайный многоугольник B_λ (или вероятностная мера P_λ) принадлежит классу НО—НУ. Аналогичный результат имеет место также и для смесей распределений P_λ .**

Для случайной многоугольной грани D_* определим случайную сторону a тем же способом как и a_2 в параграфе 3. Ясно, что a является ребром многоугольника B . Опишем алгоритм построения случайной стороны a :

выбираем грань многогранника B с равномерным распределением, т.е. получаем многоугольник D , далее

выбираем сторону многоугольника D с равномерным распределением ; получим случайную сторону a .

Из результата относительно случайной стороны a_2 параграфа 3 вытекает следующее следствие.

Пусть P принадлежит классу НО—НУ. Если случайная величина χ^ имеет экспоненциальное распределение с параметром λ , то случайное ребро a необходимо имеет экспоненциальное распределение с тем же параметром λ .*

§5. СЛУЧАЙНЫЕ БУЛЕВЫ МОДЕЛИ В МНОГОУГОЛЬНЫХ ОКНАХ

Цель этого параграфа – указать на применение уравнения (1.24) к случайным множествам на плоскости, если вероятностные распределения этих множеств инвариантны относительно группы евклидовых движений плоскости. Идея состоит в усреднении уравнения (1.24) записанного для куска случайного множества, наблюдаемого в случайном многоугольном окне. Выбор случайного окна из класса НО приводит к значительным упрощениям. Рассмотрим один пример.

5.1. Случайные булевы модели

По определению, плоская случайная булева модель есть объединение счётного числа выпуклых случайных областей K_i :

$$S = \bigcup K_i, \quad (5.1)$$

где число областей K_i , пересекающих круг на плоскости $\mathbb{R}^2$ должно быть конечным. Для того, чтобы непосредственно использовать (1.24), мы будем предполагать, что области K_i суть случайные многоугольники.

Пример 5.1. Пуассоновская булева модель.

Пусть

dM = мера Хаара на группе M всех евклидовых движений плоскости,

$\{M_i\}$ = пуассоновский точечный процесс на группе M , управляемый мерой dM

$\{K^{(i)}\}$ = последовательность независимых и одинаково распределённых случайных многоугольников.

Если в (5.1)

$K_i = M_i K^{(i)}$ – результат действия евклидова движения M_i на $K^{(i)}$, то получаем пуассоновскую булеву модель.

Таким образом построенная булева модель S будет инвариантной относительно группы евклидовых движений. Пользуясь терминологией пунктов 2.6 и 2.7, назовём S (случайным) **чёрным множеством** и обозначим

P_1 = вероятностное распределение булевой модели S .

5.2. Случайные Многоугольные Окна

Пусть D – случайный многоугольник, вероятностное распределение которого обозначим через P_2 ; назовём D **многоугольным окном**. S индуцирует случайную раскраску многоугольника D :

случайное чёрное подмножество в D есть $X = D \cap S$

случайное белое подмножество в D есть дополнение подмножества X в D .

Предположим, что S и D независимы, т.е., их совместное распределение имеет вид $P_1 \times P_2$. Если многоугольное окно D принадлежит классу НО, то результат усреднения формулы (1.24) относительно $P_1 \times P_2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \int_{\mathbf{W}} f(\chi) dg &= \mathbf{E} \sum_{a_i \in \mathbf{C}^c} \int_0^{|a_i|} f(u) du + \mathbf{E} \sum_{a_k \in \mathbf{C}} b_k - \\ &- \mathbf{E} \sum |\nu_i| f(\chi(\nu_i)) I_{\mathbf{W}}(\nu_i) - \mathbf{E} \sum |s_i| f(\chi(s_i)) I_{\mathbf{W}}(s_i) + \mathbf{E} \sum |d_i| f(\chi(d_i)) I_{\mathbf{W}}(d_i), \end{aligned} \quad (5.2)$$

так как благодаря независимости углов пересечений хорд многоугольника D с ∂D средние некоторых слагаемых в (1.24) обращаются в нуль. Отметим, что это упрощение имеет место для общего S (пуассоновость булевой модели S не предполагается). В связи с (5.2) возникает следующий вопрос томографического характера : **Какие выводы можно сделать о булевой модели S на основе информации о сумме**

$$\mathbf{E} \sum_{a_i \in \mathbf{C}^c} \int_0^{|a_i|} f(u) du + \mathbf{E} \sum_{a_k \in \mathbf{C}} b_k,$$

зависящей от индуцированной случайной раскраски периметра окна $\mathbf{D}$. В случае симметрии, т.е. когда

$$- \mathbf{E} \sum |s_i| f(\chi(s_i)) I_{\mathbf{W}}(s_i) + \mathbf{E} \sum |d_i| f(\chi(d_i)) I_{\mathbf{W}}(d_i) = 0 \quad (5.3)$$

(в случае пуассоновской Булевой модели всегда имеет место) оставшиеся слагаемые могут допускать достаточно простые аналитические интерпретации задача может быть сведена к удобным функциональным уравнениям. Автор надеется вернуться к этой тематике в будущих публикациях.

Abstract. Chord calculus is a collection of integration procedures applied to the combinatorial decompositions that give the solution of the Buffon–Sylvester problem for n needles in a plane or the similar problem in $\mathbf{R}^3$. It is a source of various integral geometry identities, some of which find their application in Stochastic geometry. In the present paper these applications are focused on random convex polygons and polyhedrons, where we define certain classes where rather simple tomography analysis is possible. The choice of these classes (the Independent Angles class and the Independent Orientations class) is due to the nature of the results of the Chord calculus. The last section points at an application of the convex polygons from the Independent Angles class to Boolean sets in the plane (**Boolean models**) whose probability distributions are invariant with respect to the group of Euclidean motions of the plane.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. Р. В. Амбарцумян, “Аналитические результаты комбинаторной интегральной геометрии : Обзор,” Известия Национальной Академии наук Армении, серия Математика, том 34, № 6, стр. 2 – 46, 1999.
3. R. V. Ambartzumian, “The solution to the Buffon–Sylvester problem and stereology”, Transactions ICM, vol. 2, Vancouver (Canada), 1974.
4. Р. В. Амбарцумян, “ Интегрирование комбинаторных разложений для δ -мер”, Известия Национальной Академии наук Армении, серия Математика, том 40, № . 4, стр. 2 – 21, 2005.
5. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
6. A. Pleijel, “Zwei kennzeichnende Kreiseigenschaften der Kreis”, Archiv der Math., vol. 7, pp. 420 – 424, 1956.
7. E. F. Harding, D. G. Kendall (Eds), Stochastic Geometry, J.Wiley, London, 1974.
8. W. Blaschke, Vorlesungen über Integralgeometrie, Deutscher Verlag d. Wissensch., Berlin, 1955.

Поступила 22 сентября 2006