Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 57–64

О ЗАДАЧЕ КОШИ В КЛАССАХ МНОГОЧЛЕНОВ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Н. Маргарян, В. М. Харатян

Институт математики НАН Армении
Армянский государственный педагогический университет

Резюме. Найдено необходимое и достаточное условие на эллиптический оператор второго порядка от двух переменных, при котором задача Коши разрешима в классах многочленов.

Как известно (см. [1]) задача Коши для эллиптических операторов (в частности для уравнения Лапласа) при произвольных непрерывных данных неразрешима. Несмотря на это в работе С. Н. Мергеляна [1] доказано, что каковы бы ни были произвольные непрерывные функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, заданные на окружности σ, и число $\varepsilon > 0$, значения функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ можно изменить не более чем на ε так, чтобы для новых данных, задача Коши для уравнения Лапласа была разрешима, причём решение представляется гармоническим полиномом. Более того, при $\varepsilon \to 0$ степень соответствующего полинома возрастает. В работе [1] также получены оценки для степеней полинома в зависимости от числа ε и функций $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$.

В работе [2] указаны условия на коэффициенты дифференциального уравнения, при которых рассмотренная там задача Коши в полупространстве всегда разрешима, а соответствующая однородная задача имеет конечное число линейно независимых решений. Там же приведён метод решения этой задачи.

В работе [3] рассмотрена задача Коши для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

в комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ переменных x, y, z, с начальными условиями вида

$$U|_{z=0} = g(x,y), \quad \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0} = f(x,y),$$

где f и g функции голоморфные в некоторой бицилиндрической области $D \subset \mathbb{C}^2$. Для решения этой задачи получено новое интегральное представление, исследовано распределение особенностей ядра этого интегрального представления.

В [4] рассмотрена следующая задача : **Требуется найти регулярное решение эллиптической системы**

$$\sum_{i+j\le 2} A_{ij}\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j} = h \tag{1}$$

принадлежащее классу Гёльдера $C_{\alpha'}(\overline{D})$, удовлетворяющее граничному условию

$$B_{10}u_x + B_{01}u_y + B_{00}u = f \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{2}$$

где $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – искомый вектор, а $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ суть заданные действительные векторы соответственно в $\overline{D}$ и на Γ, A_{ij} и B_{ij} – действительные квадратные матрицы n-го порядка, заданные соответственно в D и на Γ. Предполагается, что матрицы A_{ij} и B_{ij} принадлежат классам $C_\alpha^{i+j}(\overline{D})$ и $C_\alpha^{i+j}(\Gamma)$ соответственно, а f и h принадлежат классам $C_\alpha(\Gamma)$ и $C_\alpha(\overline{D})$ соответственно.

В [4] показано, что при выполнении некоторых условий на коэффициенты A_{ij} и B_{ij}, однородная задача (1)–(2) имеет конечное число линейно независимых решений. Получено также необходимое и достаточное условие для разрешимости неоднородной задачи (1)–(2).

В настоящей работе исследуется задача Коши для эллиптических операторов второго порядка от двух переменных в классах многочленов. Найдены необходимые и достаточные условия на оператор, при которых соответствующая задача Коши разрешима при любых начальных данных из $\bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$.

Обозначим через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а через $\mathbb{E}^n$ обозначим евклидово пространство точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n$, $\mathbb{E}^n_+ = \{x \in \mathbb{E}^n \mid x_n > 0\}$, Ω – область из $\mathbb{E}^n$ или $\mathbb{E}^n_+$, а $L_k(\Omega)$ $(k \in N_0)$ – множество многочленов от n переменных, порядок которых не превосходит k.

Следующие леммы используются при доказательстве основных результатов статьи.

Лемма 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ и $f \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Если хотя бы одно из следующих двух уравнений*

$$LU \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial t} + cU = f(x) \tag{3}$$

$$LU \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} + b\frac{\partial U}{\partial t} + cU = tf(x) \tag{3'}$$

имеет нетривиальное решение вида $U = t^2h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$, $k \in N_0$, то $b = 0 = c$.

Доказательство. Предположим, что уравнение (3) имеет решение вида

$$U(x,t) = t^2h(x,t), \qquad \text{где} \quad h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+).$$

Далее, пусть $U(x,t) = t^2h(x,t) = \sum_{j=0}^{r} t^{2+j}q_j(x)$, где $r \in \mathbb{N}_0$, $q_r(x) \not\equiv 0$ и $q_j(x) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Тогда

$$\begin{aligned} LU = \sum_{j=0}^{r} \big[& t^j(j+2)(j+1)q_j(x) + t^{j+2}q_j''(x) + at^{j+2}q_j'(x) + \\ & + b(j+2)t^{j+1}q_j(x) + ct^{j+2}q_j(x)\big] \equiv f(x), \end{aligned}$$

или, что тоже самое,

$$\begin{cases} q_r''(x) + aq_r'(x) + cq_r(x) \equiv 0 \\ q_{r-1}''(x) + aq_{r-1}'(x) + cq_{r-1}(x) + b(r+2)q_r(x) \equiv 0 \\ q_{j-2}''(x) + aq_{j-2}'(x) + cq_{j-2}(x) + b(j+1)q_{j-1}(x) + (j+2)(j+1)q_j(x) \equiv 0, \\ \qquad\qquad j = 2, \dots, r \\ 2bq_0(x) + 6q_1(x) \equiv 0 \\ 2q_0(x) \equiv f(x) \end{cases} \tag{4}$$

Так как $q_r \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$ и $q_r(x) \not\equiv 0$, то из первого равенства системы (4) следует, что $c = 0$. Кроме того, очевидно, $ord\, q_r \leq 1$. Докажем, что $b = 0$. Предположим обратное, что $b \neq 0$. Тогда из второго тождества системы (4) при $c = 0$ непосредственно следует, что $q_{r-1}(x) \not\equiv 0$ и $ord\, q_{r-1} \geq 1 + ord\, q_r$. В силу третьих тождеств системы (4) по индукции (при $c = 0$) получаем, что $ord\, q_{j-2} \geq 1 + ord\, q_{j-1}$, $j = 2, \dots, r$. Это противоречит предпоследнему тождеству, так как $b \neq 0$ по предположению. Полученное противоречие доказывает, что $b = 0$.

Теперь докажем утверждение леммы для уравнения (3′). Действуя как и в первом случае, получаем

$$\begin{cases} q_r''(x) + aq_r'(x) + cq_r(x) \equiv 0 \\ q_{r-1}''(x) + aq_{r-1}'(x) + cq_{r-1}(x) + b(r+2)q_r(x) \equiv 0 \\ q_{j-2}''(x) + aq_{j-2}'(x) + cq_{j-2}(x) + b(j+1)q_{j-1}(x) + (j+2)(j+1)q_j(x) \equiv 0, \\ \qquad\qquad j = 2, \dots, r \\ 2bq_0(x) + 6q_1(x) \equiv f(x) \\ 2q_0(x) \equiv 0 \end{cases} \tag{4'}$$

Так как $q_r(x) \not\equiv 0$ и $q_r \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$, то из первого тождества системы (4′) следует, что $c = 0$ и $ord\, q_r \leq 1$. Покажем, что $b = 0$. Предполагая обратное ($b \neq 0$) и действуя аналогично, получаем, что $ord\, q_{j-2} \geq 1 + ord q_{j-1}$, $j = 2, \dots, r$. Это противоречит последнему тождеству системы (4′). Следовательно, утверждение леммы верно и для уравнения (3′). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $f \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Тогда оба уравнения*

$$LU = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} = f(x) \tag{5}$$

и

$$LU = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\frac{\partial U}{\partial x} = tf(x) \tag{5'}$$

имеют решение вида $t^2 h(x,t)$, где $h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2)$.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (5). Пусть $ord\, f = r$, Обозначим через $P \equiv P\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx}$, $P^j f \equiv P(P^{j-1}f)$, $j = 1, 2, \dots$, $P^0 = I$ (тождественный оператор), $q_{2j}(x) \equiv (-1)^j \frac{P^j f}{(2(j+1))!}$, $j = 0, 1, \dots$ Очевидно,

$$P^j f = 0 \quad \text{when} \quad j \geq r+1. \tag{6}$$

Далее, положим

$$h(x,t) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j t^{2j} \frac{P^j f}{(2(j+1))!} \quad \text{и} \quad U(x,t) = t^2 h(x,t).$$

Покажем, что многочлен U является решением уравнения (5). В силу (6) имеем

$$LU \equiv \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \left[(2j+2)(2j+1)t^{2j}\frac{P^j f}{(2(j+1))!} + t^{2+2j}\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P^j f)}{(2(j+1))!} + \right.$$

$$\left. + at^{2+2j}\frac{\frac{\partial}{\partial x}(P^j f)}{(2(j+1))!}\right] == 2\frac{P^0 f}{2!} + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j t^{2j}\frac{P^j f}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j t^{2+2j}\frac{P^{j+1} f}{(2(j+1))!} +$$

$$+ (-1)^r t^{2+2r}\frac{P^{r+1} f}{(2(r+1))!} = f + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j t^{2j}\frac{P^j f}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j t^{2+2j}\frac{P^{j+1} f}{(2(j+1))!} =$$

$$= f + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j t^{2j}\frac{P^j f}{(2j)!} - \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j t^{2j}\frac{P^{j+1} f}{(2j)!} \equiv f.$$

Теперь рассмотрим уравнение (5'T). Пусть $ord\, f = r$, $P = \frac{d^2}{dx^2} + a\frac{d}{dx}$. Положим

$$h(x,t) = \sum_{j=0}^{r} t^{2j+1}(-1)^j \frac{P^j f}{(2j+3)!} \quad \text{и} \quad U(x,t) = t^2 h(x,t).$$

Покажем, что многочлен $U(x,t)$ является решением уравнения (5'). Так как $P^j f(x) \equiv 0$ при $j \geq r+1$, то имеем

$$LU = \sum_{j=0}^{r}(-1)^j \frac{1}{(2j+3)!}\left[(2j+3)(2j+2)t^{2j+1}P^j f(x) + t^{2j+3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(P^j f(x)) + \right.$$

$$\left. + at^{2j+3}\frac{\partial}{\partial x}(P^j f(x))\right] = tf(x) + \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}t^{2j+1}P^j f(x) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r-1}(-1)^j \frac{t^{2j+3}}{(2j+3)!}P^{j+1} f(x) + (-1)^r \frac{t^{2r+3}}{(2r+3)!}P^{r+1} f(x) =$$

$$= tf(x) + \sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}t^{2j+1}P^j f(x) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^{j-1}\frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}P^j f(x) +$$

$$+ (-1)^r \frac{t^{2r+3}}{(2r+3)!}P^{r+1} f(x) = tf + (-1)^r \frac{t^{2r+3}}{(2r+3)!}P^{r+1} f(x) = tf(x).$$

Лемма 2 доказана.

Основными результатами настоящей работы являются следующие три теоремы.

Теорема 1. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^1$. Если для любых $f_0, f_1 \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$ следующая задача Коши*

$$\begin{cases} LU \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} + b\dfrac{\partial U}{\partial t} + cU = 0 \\ U(x,0) = f_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,0) = f_1(x) \end{cases} \tag{7}$$

имеет решение из $\bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$, то $b = c = 0$.

Доказательство. Пусть $f_0, f_1 \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$ такие многочлены, что

$$g_0(x) + tg_1(x) \equiv -(f_0'' + af_0' + cf_0 + bf_1) - t(f_1'' + af_1' + cf_1) \not\equiv 0.$$

Обозначим $V(x,t) = U(x,t) - f_0(x) - tf_1(x)$, где $U(x,t)$ является решением задачи Коши (7). Тогда многочлен $V(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$ является решением следующей задачи Коши :

$$\begin{cases} LU \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}V + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}V + a\dfrac{\partial V}{\partial x} + b\dfrac{\partial V}{\partial t} + cV = \\ \qquad = -(f_0'' + af_0' + cf_0 + f_1) - t(f_1'' + af_1' + cf_1) \equiv g_0(x) + tg_1(x) \\ V(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}V(x,0) = 0 \end{cases} \tag{7'}$$

Из условия $g_0(x) + tg_1(x) \not\equiv 0$ следует, что $V(x,t) \not\equiv 0$ в $\mathbb{E}^2_+$. Тогда в силу леммы 1 имеем $b = c = 0$, ибо из начальных условий задачи (7′) следует, что многочлен $V(x,t)$ можно представить в виде $t^2h(x,t)$, где $h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}^1$ и $f_0, f_1 \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^1)$. Тогда следующая задача Коши*

$$\begin{cases} LU \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}U + \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U + a\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ U(x,0) = f_0(x) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,0) = f_1(x) \end{cases} \tag{8}$$

имеет решение из $\bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$.

Доказательство. Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial t^2}V + a\frac{\partial V}{\partial x} = -(f_0'' + af_0') - t(f_1'' + af_1'). \tag{9}$$

Если $(f_0'' + af_0') + t(f_1'' + af_1') \equiv 0$, то $ord\, f_0 \leq 1$, $ord\, f_1 \leq 1$ и, следовательно, многочлен $U = f_0(x) + tf_1(x) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$ является решением задачи Коши (8).
Если $f_1'' + af_1'' \not\equiv 0$ и $f_0'' + af_0'' \equiv 0$, то $ord\, f_0 \leq 1$. Поэтому в силу Леммы 2 (см. (5)) уравнение (9) имеет решение V вида $t^2h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Тогда многочлен

$$U(x,t) = t^2h(x,t) + f_0(x) + tf_1(x), \quad t > 0,$$

будет решением задачи Коши (8).
Если $f_0'' + af_0'' \not\equiv 0$ и $f_1'' + af_1'' \equiv 0$, то $ord\, f_1 \leq 1$. Поэтому в силу леммы 2 (см. (5′)) уравнение (9) имеет решение V вида $t^2h(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Тогда многочлен

$$U(x,t) = t^2h(x,t) + tf_1(x) + f_0(x), \quad t > 0,$$

будет решением задачи Коши (8).
Наконец, если $f_0'' + af_0'' \not\equiv 0$ и $f_1'' + af_1'' \not\equiv 0$, то в силу леммы 2 уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}H + \frac{\partial^2}{\partial t^2}H + a\frac{\partial H}{\partial x} = -(f_0'' + af_0') \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}H + \frac{\partial^2}{\partial t^2}H + a\frac{\partial H}{\partial x} = -t(f_1'' + af_1')$$

имеют решения H_1, H_2 вида $t^2h_1(x,t)$, $t^2h_2(x,t) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$. Следовательно,

$$U(x,t) = t^2h_1(x,t) + f_0(x) + t^2h_2(x,t) + tf_1(x) \in \bigcup_k L_k(\mathbb{E}^2_+)$$

будет решением задачи Коши (8). Теорема доказана.

Определение. (см. [5], стр. 178) Функция $U(x,t) \in C^2(\mathbb{E}^2)$ называется решением обобщённой задачи Коши (7), если

$$\begin{cases} LU(x,t) \equiv 0, & \forall (x,t) \in \mathbb{E}^2 \\ U(x,0) = f_0(x), & x \in \mathbb{E}^1 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,0) = f_1(x), & x \in \mathbb{E}^1 \end{cases} \tag{10}$$

Замечание. Из доказательства теоремы 2 непосредственно следует, что аналитическое продолжение построенного решения задачи Коши (7) является решением обобщённой задачи Коши (10).

Авторы благодарят профессора Н. Е. Товмасяна за постановку задачи и полезные обсуждения.

Abstract. The paper gives some necessary and sufficient conditions under which the Cauchy problem for second order elliptic operator of two variables is solvable in the class of polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Мергелян, "Гармоническая аппроксимация и приближённое решение задачи Коши для уравнения Лапласа", УМН, том XI, вып. 5(71), 1956.
2. Н. Е. Товмасян, "Задача Коши для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве в классе обобщённых функций", Дифференциальные уравнения, том 18, № 1, стр. 132 – 138, 1982.
3. С. Д. Шалагинов, "Задача Коши для уравнения Лапласа в комплексном пространстве", Дифференциальные уравнения, том 16, № 5, стр. 947 – 949, 1980.
4. Н. Е. Товмасян, "Некоторые граничные задачи для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости", Доклады АН СССР, том 160, стр. 1275 – 1278, 1965.
5. С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Наука, Москва, 1988.

Поступила 18 сентября 2006