Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 39–56

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян

Ереванский государственный университет

Резюме. Линейный дифференциальный оператор $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ с постоянными коэффициентами называется почти гипоэллиптическим, если все производные $D^\alpha P$ характеристического многочлена, т.е. полного символа $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ оцениваются через $P(\xi)$. В работе доказывается, что все решения дифференциального уравнения $P(D)u = 0$, которые интегрируемы с квадратом с определёнными экспоненциальным весом, являются бесконечно дифференцируемыми функциями тогда и только тогда, когда оператор $P(D)$ почти гипоэллиптичен.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В настоящей статье будем пользоваться следующими стандартными обозначениями : $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0$ – множество n-мерных мультииндексов, $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ – соответственно n-мерные вещественные пространства точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{E}^n$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, обозначим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$ и $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \partial/\partial\xi_j$ либо $D_j = \frac{1}{i}\partial/\partial x_j$ $(j = 1, \ldots n)$. Наконец обозначим $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$.

Предполагая, что суммы распространяются по конечному набору мультииндексов $(P) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$, допустим, что $P(D) = \sum_\alpha \gamma_\alpha D^\alpha$ есть линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а $P(\xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha \xi^\alpha$ – отвечающий ему символ, т.е. характеристический многочлен. Пусть $m = ordP =$

$\max\{|\alpha|, \alpha \in (P)\}$.

Заметим, что оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ называются гипоэллиптическими (см. [1]), если все решения $u \in D'$ (где $D' = D'(\mathbb{E}^n)$ – множество распределений) уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, т.е. принадлежат $C^\infty = C^\infty(\mathbb{E}^n)$.

Л. Хермандером доказано (см. [1], Теоремы 11.1.1 и 11.1.3), что если выполняется одно из следующих эквивалентных условий, то оператор $P(D)$ является гипоэллиптическим :

1) $Sing Supp\, u = Sing Supp\, P(D)$ для всякого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{E}^n$ и $u \in D'$,
2) если $\Omega \subset E^n$, $u \in D'(\Omega)$ и $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$,
3) если $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$, то $P^{(\nu)}(\xi)/P(\xi) \equiv D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$,
4) $d_P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$; где $d_P(\xi)$ – расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до многообразия $D(P) = \{\zeta : \zeta \in \mathbb{C}^n,\ P(\zeta) = 0\}$.

Возникает естественный вопрос : пусть символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ удовлетворяет более слабому условию, чем 3) :

$$|D^{(\nu)}P(\xi)| \Big/ [1 + |P(\xi)|] \leq C < \infty, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \nu \in \mathbb{N}_0^n, \tag{1.1}$$

или пусть 4) будет заменено требованием

$$d_P(\xi) \geq \varepsilon > 0 \tag{1.2}$$

для достаточно больших $\xi \in \mathbb{R}^n$. Каким условиям должны удовлетворять решения $u \in D'(\mathbb{E}^n)$ уравнения $P(D)u = 0$, чтобы они являлись бесконечно дифференцируемыми решениями в $\mathbb{E}^n$?

В настоящей работе мы даём ответ на этот вопрос для одного класса операторов, удовлетворяющих условию (1.1) или эквивалентному условию (1.2).

Нам понадобятся следующие классы операторов и функций. Через I_n обозначим множество дифференциальных операторов $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ с постоянными коэффициентами, символы $P(\xi)$ которых удовлетворяют условию

$$|P(\xi)| \to \infty \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty. \tag{1.3}$$

Для любых $\delta > 0$ и $m \in \mathbb{N}$, через $L_{2,\delta} \equiv L_{2,e^{-\delta|x|}}$ обозначим множество локально суммируемых функций с конечной нормой

$$||u||_{L_{2,\delta}} = \left[\int_{\mathbb{E}^n} |u(x)|^2 e^{-2\delta|x|} dx\right]^{1/2}, \tag{1.4}$$

а через $W^m_{2,\delta}$ – множество функций $u \in L_{2,\delta}$ с конечной нормой

$$\|u\|_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha u\|_{L_{2,\delta}}. \tag{1.5}$$

Наконец, положим

$$W^\infty_{2,\delta} = \bigcap_{m=1}^{\infty} W^m_{2,\delta} \quad \text{и} \quad N(P,\delta) = \{u \in L_{2,\delta} : \langle u, P(-D)\varphi\rangle = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty\}$$

и заметим, что $L_{2,\delta}$ и $W^m_{2,\delta}$, очевидно, являются банаховыми пространствами, а $W^\infty_{2,\delta}$ – пространство Фреше, при этом $W^\infty_{2,\delta} \subset C^\infty$ при любом $\delta > 0$.

Определение 1.1. Оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ назовём **почти гипоэллиптическими**, если многочлен P удовлетворяет одному из эквивалентных условий (1.1), (1.2).

По Лемме 11.1.4 работы [1] для любого многочлена $Q(\xi)$ существует постоянная $C = C(Q) > 0$ такая, что справедливы неравенства

$$C^{-1} \le d_Q(\xi) \sum_{|\alpha|>0} \left|\frac{Q^\alpha(\xi)}{Q(\xi)}\right|^{1/|\alpha|} \le C \tag{1.6}$$

для всех тех точек $\xi \in \mathbb{R}^n$, для которых $Q(\xi) \ne 0$. С другой стороны, если $P \in I_n$, то, за счёт добавления константы, можно считать, что для многочленов $P \in I_n$ существуют некоторые числа $\varepsilon = \varepsilon(P) > 0$ и $M \ge 0$ такие, что $|P(\xi)| \ge \varepsilon$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| \ge M$.

Согласно приведённым определениям, почти гипоэллиптичность многочлена $P \in I_n$ можно дать также следующим образом : **многочлен $P \in I_n$ почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда**

$$\rho(P) = \lim_{t\to\infty} \inf_{|\xi|=t} d_P(\xi) > 0. \tag{1.7}$$

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

Теорема. *Если $P \in I_n$, то оператор $P(D)$ является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда существует число $\delta > 0$ такое, что $N(P,\delta) \subset W^\infty_{2,\delta}$.*

Для удобства, вместо весовой функции $e^{-\delta|x|}$ рассмотрим эквивалентную ей гладкую весовую функцию $g_\delta \in C^\infty$, которая будет определена ниже.

Пусть $g \in C^\infty$ – произвольная фиксированная положительная функция такая, что

$$\kappa^{-1} e^{-|x|} \le g(x) \le \kappa e^{-|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n,$$

для некоторого $\kappa > 0$. При этом, допустим, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_n^0$ существует число $\kappa_\alpha > 0$ такое, что

$$|D^\alpha g(x)| \leq \kappa_\alpha g(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n.$$

Заметим, что в качестве такой функции g можно брать регуляризацию (усреднение) функции $H(x) = e^{-|x|}$ при $|x| > 1$ и $H(x) = e^{-1}$ при $|x| \leq 1$, с помощью произвольной фиксированной весовой функции $\varphi \in C_0^\infty$ такой, что $\int \varphi(x)dx = 1$.

Для $\delta > 0$ положим $g_\delta(x) = g(\delta x)$. Тогда из определения функции g следует, что с теми же постоянными (κ, κ_α) справедливы неравенства

$$\kappa^{-1}e^{-\delta|x|} \leq g_\delta(x) \leq \kappa e^{-\delta|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.8}$$

$$|D^\alpha g_\delta(x)| \leq \kappa_\alpha \delta^{|\alpha|} g_\delta(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \quad \forall x \in \mathbb{E}^n. \tag{1.9}$$

Рассмотренной в настоящей заметке тематике посвящены работы многих авторов. Прежде всего отметим работы [2]–[3] Гординга, Мальгранжа и Эренпрайса, где доказана бесконечная дифференцируемость решений так называемых частично-гипоэллиптических уравнений $P(D)u = 0$, если априори предполагать их бесконечную дифференцируемость по определённым переменным.

В работах [3]–[4] доказано, что для определённого класса частично-гипоэллиптических операторов $\{P\}$ из условий $u \in C^\infty$ и $P(D)u \in C^\infty$ вне некоторой выпуклой поверхности Γ следует, что $u \in C^\infty$ в окрестности Γ. Общие результаты о распространении гладкости решений частично-гипоэллиптических уравнений вдоль более общих поверхностей принадлежат Л. Хермандеру (см. [5] или [1]).

Я. С. Бугровым в работе [6] построен пример негипоэллиптического уравнения, решения которого в полупространстве являются бесконечно гладкими, как только они суммируемы с квадратом вместе с некоторыми производными.

В. И. Буренков в работе [7] нашёл необходимые и достаточные условия для того, чтобы все решения $\{u\}$ так называемого глобально гипоэллиптического уравнения $P(D)u = 0$, которые определённым образом стремятся к нулю в бесконечности, являлись бесконечно гладкими. Эти условия носят алгебраический характер и для гипоэллиптического оператора P они совпадают с условиями 3) или 4) Л. Хермандера.

Общая закономерность, наблюдающаяся в алгебраических условиях гладкости решений дифференциальных уравнений, побудила нас в работе [8] ввести понятия носителя и числа гипоэллиптичности. Оказалось, что эта числовая характеристика делит дифференциальные операторы на разные классы. При такой классификации гипоэллиптические по Л. Хермандеру и гиперболические по Л. Гордингу (и тем самым гиперболические по И. Г. Петровскому, см. [9]) операторы занимают крайние позиции.

В работе [10], опираясь на результаты работы [8], нами получены "внутренние" оценки решений уравнения $P(D)u = 0$ с данным носителем гипоэллиптичности.

В работах [11], [12], введено понятие почти гипоэллиптического многочлена и найдены некоторые достаточные условия почти гипоэллиптичности в терминах порядков однородности и кратностей нулей подмногочленов.

В работе [13] О. Р. Габриеляна приведены некоторые необходимые и достаточные условия почти гипоэллиптичности двумерных многочленов в терминах кратностей нулей соответствующих однородных подмногочленов. В тех же терминах в работе [14] найдены необходимые и достаточные условия для $P \in I_2$.

В алгебраической трактовке класс почти гипоэллиптических многочленов является "минимальным" расширением класса гипоэллиптических многочленов. В настоящей работе показано, что это расширение является минимальным в некотором смысле.

Приведём теперь ряд вспомогательных предложений, необходимых в следующих параграфах.

Лемма 1.1. *Если множество $G \subset \mathbb{E}^n$ лежит в шаре $S_T = \{x \in \mathbb{E}^n : |x| \le T\}$, то для любого $\delta > 0$ справедливы неравенства*

$$\sup_{y\in G} g_\delta(x+y) \le \sigma_1 g_\delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.10}$$

$$\sup_{y\in G} |g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| \le \sigma_2 g_\delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n, \tag{1.11}$$

где функция g_δ определена выше, $\sigma_1 = \kappa^2 e^{\delta T}$ и $\sigma_2 = \kappa^2 \delta T e^{\delta T} (\max_{|\alpha|=1} \kappa_\alpha)\sqrt{n}$.

Доказательство. Из неравенства $|x+y| \ge |x| - |y|$ и в силу (1.8) имеем

$$\sup_{y\in G} |g_\delta(x+y)| \le \kappa \sup_{y\in G} e^{-\delta|x+y|} \le \kappa e^{-\delta|x|} \sup_{y\in G} e^{\delta|y|} \le \kappa^2 e^{\delta T} g_\delta(x), \quad \forall x \in \mathbb{E}^n,$$

откуда вытекает (1.10). Для доказательства (1.11) предположим, что точки $x \in \mathbb{E}^n$ и $y \in G$ фиксированы и положим $f(t) = g_\delta(x+ty)$. Так как f дифференцируема, то для некоторого числа $\theta = \theta(x,y) \in (0,1)$ получаем

$$|g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| = |f(1) - f(0)| = |f'(\theta)| \le$$

$$\leq |(\text{grad } g_\delta(x+\theta y), y)| \leq |\text{grad } g_\delta(x+\theta y)||y|.$$

Следовательно, в силу (1.9) и (1.10) получаем

$$|g_\delta(x+y) - g_\delta(x)| \leq \sigma_2 g_\delta(x)$$

поскольку $\theta y \in S_T$. Это доказывает (1.11), так как пара (x, y) произвольна. Лемма 1.1 доказана.

Лемма 1.2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $a_i, b_i \geq 0$ $(i = 0, 1, \dots, m)$, $d > 0$ и $t > 1$. Тогда*

a) *Если $a_0 = b_0$ и*

$$a_k \leq b_k + d\sum_{j=0}^{k-1} t^j a_j, \quad (k = 1, 2, \dots, m), \tag{1.12}$$

то при $\sigma_3 = 2[2dt^{m-1} + 1]^m$ имеет место неравенство :

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \leq \sigma_3 \sum_{k=0}^{m} b_k. \tag{1.13}$$

b) *Если $a_m = b_m$ и*

$$t^k a_k \leq t^k b_k + d \sum_{j=k-1}^{m} t^j a_j, \quad (k = 0, 1, \dots, m-1), \tag{1.14}$$

то

$$\sum_{k=0}^{m} t^k a_k \leq \sum_{k=0}^{m} (1+d)^k t^k b_k. \tag{1.15}$$

Доказательство. Пусть $h = (\sigma_3/2)^{-1/m}$. Умножая неравенства (1.12) на h^k и суммируя их по $k = 1, 2, \dots, m$, получим

$$\sum_{k=1}^{m} h^k a_k \leq \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + d \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=0}^{k-1} t^j a_j \right) h^k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + d \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k \left(\sum_{j=k+1}^{m} h^j \right) \leq \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + d \sum_{k=0}^{m-1} t^k a_k \frac{h^{k+1}}{1-h}.$$

Следовательно, в силу того, что $a_0 = b_0$, имеем

$$h^m a_m + \sum_{k=1}^{m-1} \left(h^k - d\frac{t^k h^{k+1}}{1-h} \right) a_k \leq \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + \frac{dh}{1-h} b_0.$$

Так как $t > 1$, то из определения числа h имеем

$$h^m a_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} h^k a_k \le \sum_{k=1}^{m} h^k b_k + \frac{dh}{1-h} b_0.$$

Следовательно, для $h < 1$ получаем

$$\frac{h^m}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{h^m}{2} a_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} h^m a_k$$
$$\le h^m a_m + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1} h^k a_k \le \sum_{k=1}^{m} b_k + \frac{d.h}{1-h} b_0,$$

С учётом $\frac{h^m}{2} a_0 = \frac{h^m}{2} b_0$, получаем

$$\frac{h^m}{2}\sum_{k=0}^{m} a_k \le \sum_{k=1}^{m-1} b_k + \left(\frac{dh}{1-h} + \frac{h^m}{2}\right) b_0.$$

Так как $h^m/2 = 1/\sigma_3 < 1/2$ и $t > 1$, то легко показать, что коэффициент при b_0 меньше единицы. Тогда, умножая обе части полученного неравенства на σ_3, получим (1.13).

Для доказательства (1.15) умножим (1.14) на $h_1^k \equiv (1+d)^k$ и просуммируем полученные неравенства по $k = 0, 1, \ldots, m-1$. После некоторых простых выкладок получаем

$$\sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k b_k + d\sum_{j=1}^{m} \frac{h_1^j - 1}{h_1 - 1} t^j a_j.$$

Поэтому, в силу $a_m = b_m$, получаем

$$a_0 + \sum_{k=1}^{m-1}\left(h_1^k - d\frac{h_1^k - 1}{h_1 - 1}\right) t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k b_k + d\frac{h_1^m - 1}{h_1 - 1} t^m b_m.$$

Так как

$$h_1^k - d\frac{h_1^k - 1}{h_1 - 1} = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

то это влечёт неравенство

$$\sum_{k=0}^{m} t^k a_k \le \sum_{k=0}^{m-1} h_1^k t^k b_k + \left[d\frac{h_1^m - 1}{h_1 - 1} + 1\right] t^m b_m = \sum_{k=0}^{m} (1+d)^k t^k b_k.$$

Лемма 1.2 доказана.

Замечание 1.1. Очевидно, утверждение Леммы 1.2 остаётся в силе при $t \in (0,1)$. В этом случае, достаточно заменить число σ_3 на $\sigma_3' = 2\left[2d(1+t)^{m-1}+1\right]^m$.

Следствие 1.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $\{a_\alpha\}$, $\{b_\alpha\}$ и $\{d_\alpha\}$ ($|\alpha| = 0,1,\ldots,m$) – неотрицательные числа, $t > 0$, и $\sigma_4 = 1 + 2\max\{d_\alpha : |\alpha| \le m\}$, $\sigma_5 = 1 + (0,5)(1+2\sigma_4)^m$, $\sigma_6 = (1+\sigma_5)^m$. Тогда

a) Если $a_0 = b_0$ и для всех $k = 1,2,\ldots,m$ имеем

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \le \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{|\alpha|=j} d_\alpha t^{|\alpha|} a_\alpha,$$

поэтому

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha \le \sum_{k=1}^{m}\sum_{|\alpha|=k} \sigma_4^{m-k} b_\alpha + \sigma_5 b_0 \le \sigma_5 \sum_{|\alpha|\le m} b_\alpha. \tag{1.16}$$

b) Если $a_\alpha = b_\alpha$ при $|\alpha| = m$ и для всех $k = 0,1,\ldots,m-1$ имеем

$$t^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha \le t^k \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha + \sum_{j=k+1}^{m}\sum_{|\alpha|=j} d_\alpha t^{|\alpha|} a_\alpha,$$

тогда

$$\sum_{|\alpha|\le m} t^{|\alpha|} a_\alpha \le \sum_{|\alpha|\le m} (1+\sigma_4)^{|\alpha|} t^{|\alpha|} b_\alpha \le \sigma_6 \sum_{|\alpha|\le m} t^{|\alpha|} b_\alpha. \tag{1.17}$$

Доказательство. Неравенство (1.16) следует из (1.13), а (1.17) из (1.15) при помощи замен

$$a_k = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha, \quad b_k = \sum_{|\alpha|=k} b_\alpha, \quad d = \max\{d_\alpha : |\alpha| \le m\}, \quad k = 1,2,\ldots,m.$$

§ 2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМЫ И ПЛОТНОСТЬ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

В этом параграфе мы рассматриваем почти гипоэллиптические операторы в весовых функциональных пространствах типа С. Л. Соболева.

Сначала отметим, что из соотношения (1.8) для функции g следует, что в $L_{2,\delta}$ можно ввести следующую норму, эквивалентную норме (1.4) :

$$\|u\|'_{L_{2,\delta}} = \|ug_\delta\|_{L_2}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Нормы*

$$\|u\|'_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2}\,, \quad (2.2)$$

$$\|u\|''_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha (ug_\delta)\|_{L_2} \quad (2.3)$$

эквивалентны норме (1.5) в $W^m_{2,\delta}$.

Доказательство. Эквивалентность норм (2.2) и (1.5) следует из свойства (1.8) функции g_δ. Для доказательства эквивалентности норм (2.3) и (1.5) заметим, что

$$\sum_{|\alpha|=m} (D^\alpha u)\, g_\delta = \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (ug_\delta) - \sum_{j=1}^{m}\sum_{|\beta|=j} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha-\beta} u D^\beta g_\delta.$$

Применяя свойство (1.9) функции g_δ, получаем

$$\sum_{|\alpha|=m} \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2} \le \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha (ug_\delta)\|_{L_2} + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{|\alpha|=j} \delta^j \kappa'_\alpha \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2}\,,$$

где $\kappa'_\alpha = \max\{C_{\alpha,\beta}\kappa_\alpha : \beta \le \alpha\}$.

Отсюда и из Следствия 1.1, при $t=\delta$ имеем

$$a_\alpha = \|(D^\alpha u)\, g_\delta\|_{L_2}\,, \quad b_\alpha = \|D^\alpha (ug_\delta)\|_{L_2}\,, \quad d_0 = 1, d_\alpha = \kappa_\alpha \quad (|\alpha| = 1,\dots,m),$$

откуда вытекает эквивалентность норм (2.3) и (1.5).

Лемма 2.2. *Множество* $W^\infty_{2,\delta}$ *плотно в* $L_{2,\delta}$.

Доказательство. Пусть $u \in L_{2,\delta}$, $S_1 = \{x \in \mathbb{E}^n : |x| < 1\}$, $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, $\varphi(x) \ge 0$, $\int \varphi(x)dx = 1$ и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ и положим

$$u_\varepsilon(x) = u * \varphi_\varepsilon = \int u(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy = \varepsilon^{-n}\int u(x-y)\varphi(y/\varepsilon)dy.$$

Чтобы доказать $u_\varepsilon \in W^\infty_{2,\delta}$, отметим, что из Леммы 2.1, (1.10) и неравенства Юнга имеем

$$\|u_\varepsilon\|_{W^m_{2,\delta}} = \sum_{|\alpha|\le m} \|[D^\alpha (u*\varphi_\varepsilon)]\, g_\delta\|_{L_2} = \sum_{|\alpha|\le m} \|(u * D^\alpha\varphi_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2}$$

$$= \sum_{|\alpha|\le m} \left[\int \left|\int u(x-y) D^\alpha\varphi_\varepsilon(y) g_\delta(x)dy\right|^2 dx\right]^{1/2}$$

$$\le \kappa^2 e^\delta \sum_{|\alpha|\le m} \|ug_\delta\|_{L_2} \|D^\alpha\varphi_\varepsilon\|_{L_1} = \kappa^2 e^\delta \|ug_\delta\|_{L_2} \sum_{|\alpha|\le m} \varepsilon^{-|\alpha|}\, \|(D^\alpha\varphi)_\varepsilon\|_{L_1} \quad (2.4)$$

для любого $m \in \mathbb{N}_0$.

Так как норма (2.1) эквивалентна исходной норме (1.4) пространства $L_{2,\delta}$ и $\varphi \in C_0^\infty(S_1)$, то $u_\varepsilon \in W_{2,\delta}^m$ для любого $m \in \mathbb{N}_0$, т.е. $u_\varepsilon \in W_{2,\delta}^\infty$. Для завершения доказательства осталось показать, что

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0. \tag{2.5}$$

Отметим, что $\int \varphi_\varepsilon(y)dy = 1$ для любого $\varepsilon > 0$. Из эквивалентности норм (2.1), (1.4) и $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} = \int \left| \int [u(x-y)g_\delta(x) - u(x)g_\delta(x)]\, \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx = \\
&= \int \left| \int [[u(x-y)g_\delta(x-y) - u(x)g_\delta(x)] + \right. \\
&\left. + [u(x-y)g_\delta(x) - u(x-y)g_\delta(x-y)]]\varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx \\
&\le 2\int \left| \int [u(x-y)g_\delta(x-y) - u(x)g_\delta(x)]\, \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx + \\
&+ 2\int \left| \int u(x-y)\, [g_\delta(x) - g_\delta(x-y)]\, \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь отметим, что

$$\int u(x-y)g_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy = [ug_\delta] * \varphi_\varepsilon = (ug_\delta)_\varepsilon,$$

и по определению φ, для любого $\varepsilon > 0$

$$\int u(x)g_\delta(x)\varphi_\varepsilon(y)dy = u(x)g_\delta(x).$$

Итак, первое слагаемое в правой части (2.6) стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ согласно Лемме 5.2 работы [15].

Для оценки второго слагаемого применим (1.11) при $T = \varepsilon$ и неравенство Юнга :

$$\begin{aligned}
&\int \left| \int u(x-y)\, [g_\delta(x) - g_\delta(x-y)]\, \varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx \\
&\le (\delta\varepsilon)^2 \kappa^4 \max_{|\alpha|=1} \{\kappa_\alpha^2\}\, e^{\delta\varepsilon} \int \left| \int |u(x-y)|g_\delta(x-y)\varphi_\varepsilon(y)dy \right|^2 dx \\
&\le C\varepsilon^2 \|ug_\delta\|_{L_2}^2 \|\varphi_\varepsilon\|_{L_1}^2 = C\varepsilon^2 \|ug_\delta\|_{L_2}^2.
\end{aligned}$$

Так как $u \in L_{2,\delta}$, то правая часть полученного соотношения стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, что доказывает (2.5). Лемма доказана.

Следующее следствие является непосредственным следствием Леммы 2.2 и вложения $W_{2,\delta}^{\infty} \subset C^{\infty}$.

Следствие 2.1. Множество C_0^{∞} плотно в $L_{2,\delta}$.

Пусть $P(D)$ – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $\delta > 0$. Обозначим

$$W(P,\delta) = \left\{u \in L_{2,\delta} : \|u\|_{W(P,\delta)} = \|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} < \infty\right\}.$$

Из Леммы 2.2 следует :

Следствие 2.2. Множество $W_{2,\delta}^{\infty}$ плотно в $W(P,\delta)$.

Доказательство. Как показано в [15], $P(D)u_\varepsilon(x) = (P(D)u)_\varepsilon(x)$. Следовательно, утверждение следует из Леммы 2.2.

Лемма 2.3. *Если $P \in I_n$ – почти гипоэллиптический оператор, то существуют числа $\Delta = \Delta(P) > 0$ и $C = C(\Delta, P) = C(P) > 0$ такие, что для всех $\delta \in (0, \Delta)$ и $u \in W(P,\delta)$*

$$\sum_{\alpha} \left\|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} \leq C\|u\|_{W(P,\delta)}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Согласно Следствию 2.2, достаточно доказать (2.7) для $u \in W_{2,\delta}^{\infty}$. Для этого отметим, что определения почти гипоэллиптичности и класса I_n влекут $\rho(P) > 0$ (см. (1.7)). Пусть $\rho = \rho(P)$, если $\rho(P) < \infty$ и возьмем ρ произвольным, если $\rho(P) = \infty$, т.е., если оператор P гипоэллиптичен.

Теперь, обозначим через $F(v)$ преобразование Фурье функции $v \in L_2$. В силу равенства Парсеваля, неравенства (1.6) и почти гипоэллиптичности оператора P имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha} \rho^{|\alpha|} \left\|P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta)\right\|_{L_2} = \sum_{\alpha} \rho^{|\alpha|} \left\|P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)\right\|_{L_2} \\
&= \sum_{\alpha} \left\|\rho^{|\alpha|} P^{(\alpha)}(\xi)F(ug_\delta)(\xi)\right\|_{L_2} \leq C_1 \sum_{\alpha} \left\|\left[d_P^{|\alpha|}(\xi) + 1\right] |P^{(\alpha)}(\xi)||F(ug_\delta)(\xi)|\right\|_{L_2} \\
&\leq C_2 \||P(\xi)||F(ug_\delta)(\xi)|\|_{L_2} + C_2 \|[|P(\xi)| + 1]|F(ug_\delta)(\xi)|\|_{L_2} \\
&\leq C_3 \left[\|P(D)(ug_\delta)\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2}\right]
\end{aligned}$$

для некоторых положительных постоянных C_1, C_2, C_3 и для произвольной функции $u \in W_{2,\delta}^{\infty}$. Отсюда, в силу формулы Лейбница и свойства (1.9) функции

g_δ получаем

$$\sum_\alpha \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} \leq$$
$$\leq C_4 \left[\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \sum_{\alpha>0} \frac{1}{\alpha!} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u \right] D^\alpha g_\delta \right\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right]$$
$$\leq C_4 \left[\|(P(D)u)g_\delta\|_{L_2} + \sum_{\alpha>0} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u \right] g_\delta \right\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right], \quad (2.8)$$

где $C_4 > 0$ и $\kappa' = \max\left\{ \left[\kappa_\alpha/(\alpha!)\right]^{1/|\alpha|} : |\alpha| \leq m \right\}$. Еще раз применяя формулу Лейбница и оценку (1.9), для всех $k = 1, 2, \ldots, m$ получим

$$\sum_{|\alpha|=k} (\kappa'\delta)^k \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u \right] g_\delta \right\|_{L_2} \leq$$
$$\leq \sum_{|\alpha|=k} (\kappa'\delta)^k \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} + (\kappa'\delta)^k \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|>0} \left\| \left[P^{(\alpha+\beta)}(D)u \right] \frac{D^\beta g_\delta}{\beta!} \right\|_{L_2}$$
$$\leq \sum_{|\alpha|=k} (\kappa'\delta)^k \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} + C_5 \sum_{j=k+1}^{m} (\kappa'\delta)^j \sum_{|\alpha|=j} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u \right] g_\delta \right\|_{L_2},$$

где $C_5 = \max\{card(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = \gamma,\ |\gamma| \leq m\}$. Применив здесь неравенство (1.16) при $t = \kappa'\delta$, $a_\alpha = \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u \right] g_\delta \right\|$, $d_\alpha = C_5$, $b_\alpha = \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|$ ($|\alpha| = 1, \ldots, m$) получим с некоторой постоянной $C_6 > 0$

$$\sum_{|\alpha|=1}^{m} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| \left[P^{(\alpha)}(D)u \right] g_\delta \right\|_{L_2} \leq C_6 \sum_{|\alpha|=1}^{m} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2}.$$

Отсюда и из (2.8) получим, что для некоторого постоянного $C_7 > 0$

$$\sum_\alpha \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} \leq C_7 \|[P(D)u]\, g_\delta\|_{L_2}$$
$$+ C_7 \left[\sum_{|\alpha|>0} (\kappa'\delta)^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right]. \quad (2.9)$$

Пусть

$$\Delta = \Delta(P) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\kappa'} \min\left\{ C_7^{-1}, C_7^{-1/m} \right\}. \quad (2.10)$$

Тогда из (2.9) следует, что

$$\sum_\alpha \rho^{|\alpha|} \left\| P^{(\alpha)}(D)(ug_\delta) \right\|_{L_2} \leq 2C_7 \left[\|[P(D)u]\, g_\delta\|_{L_2} + \|ug_\delta\|_{L_2} \right]$$

для всех $\delta \in (0, \Delta)$. Отсюда следует, что (2.7) выполняется для всех $\delta \in (0, \Delta)$, поскольку $\rho > 0$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Если $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$, $m_0 > m_1$ и $0 < \delta_0 < \delta_1$, то $W^{m_0}_{2,\delta_0}$ компактно вложено в $W^{m_1}_{2,\delta_1}$.*

Доказательство. $g_{\delta_1}(x)/g_{\delta_0}(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $\delta_1 > \delta_0$, следовательно лемма верна в силу Теоремы 1.16 работы [15], о компактном вложении $W^{m_0}_2$ в $W^{m_1}_2$ при $m_0 > m_1$. Лемма доказана.

§ 3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Приведённые ниже теоремы 3.1 и 3.2 лежат в основе доказательства основного результата настоящей статьи, формулированной в §1.

Теорема 3.1. *Пусть $P(D)$ – линейный, дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а множество $N(P, \delta)$ определено как в §1.*
Если $N(P, \delta) \subset W^{\infty}_{2,\delta}$ для некоторого числа $\delta > 0$, то оператор P почти гипоэллиптичен.

Доказательство. Достаточно показать, что $\rho(P) > 0$ для функции, определенной по формуле (1.7). Мы докажем, что $\rho = \rho(P) \geq \delta$.
В силу замкнутости дифференциального оператора, множество $N(P, \delta)$ является замкнутым подпространством банахого пространства $L_{2,\rho}$. Таким образом, $N(P, \delta)$ является банаховым пространства (см., например, [16]). Обозначим через $N_W(P, \delta)$ множество $N(P, \delta)$ с индуцированной из $W^{\infty}_{2,\delta}$ топологией, а через J – тождественный оператор $J : N_W(P, \delta) \to N(P, \delta)$. Так как оператор вложения $W^{\infty}_{2,\delta}$ в $L_{2,\delta}$ непрерывен, то в силу теоремы Банаха (см., например, [16]) оператор J^{-1} также непрерывен. Это означает, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $C = C_m > 0$ такая, что для всех $u \in N(P, \delta)$

$$||u||_{W^{m}_{2,\delta}} \leq C||u||_{L_{2,\delta}}. \tag{3.1}$$

Так как $m \in \mathbb{N}$, то отсюда следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\int |(D_j u) g_\delta|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq C||u g_\delta||_{L_2}, \quad \forall u \in N(P, \delta). \tag{3.2}$$

Допустим, что верно обратное утверждение, т.е. при условиях теоремы $\delta > \rho$. Тогда из определения числа $\rho = \rho(P)$ следует существование некоторых последовательностей $\{t_s\}$ и $\{\xi^s\}$ чисел и точек из R^n таких, что $|\xi^s| = t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$d(\xi^s) = d_P(\xi^s) = \inf_{|\xi|=t_s} d(\xi) < \rho + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(\rho + \delta), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{3.3}$$

где $\varepsilon = \delta - \rho > 0$. Пусть точки $\zeta^s \in D(P)$ выбраны так, что

$$d(\xi^s) = |\xi^s - \zeta^s|, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{3.4}$$

Положим $u_s(x) = e^{i(x,\zeta^s)}$ $(s \in \mathbb{N})$. Тогда $u_s \in N(P, \delta)$ $(s \in \mathbb{N})$. Так как $\delta > \rho$, то в силу (3.3)-(3.4) имеем

$$|\mathrm{Im}\, \zeta^s| \leq d(\xi^s) < \frac{1}{2}(\rho + \delta) < \delta, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Из (3.2), (1.8) и (3.5) получаем, что для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\int |(D_j u_s) g_\delta|^2 \, dx \right]^{1/2} = \sum_{j=1}^{n} \left[\int \left| \zeta_j^s e^{i(x,\zeta^s)} g_\delta(x) \right|^2 dx \right]^{1/2}$$
$$\leq C \left\| e^{i(x,\zeta^s)} g_\delta \right\|_{L_2} \leq C\kappa \left\| e^{\frac{1}{2}(\rho+\delta)|x|} e^{-\delta|x|} \right\|_{L_2} < \infty. \tag{3.6}$$

С другой стороны, по неравенству (1.8)

$$\int \left| e^{i(x,\zeta^s)} g_\delta(x) \right|^2 dx \geq \kappa^{-1} \int \left[e^{-\frac{1}{2}(\rho+\delta)|x|} e^{-\delta|x|} \right]^2 dx = const > 0.$$

Следовательно, из (3.6) следует, что последовательность $\{|\zeta^s|\}$ ограничена, что в силу (3.3)–(3.4) противоречит тому, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.2. *Если $P \in I_n$ является почти гипоэллиптическим оператором, то существует число $\Delta > 0$ такое, что $N(P, \delta) \subset W^{\infty}_{2,\delta}$ при всех $\delta \in (0, \Delta)$.*

Доказательство : Из условия $P \in I_n$ и теоремы Зайденберга–Тарского (см. [1], Теоремы А.2.2 и А.2.5) следует существование некоторых чисел $C > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ таких, что

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \leq C \left[|P^k(\xi)| + 1 \right], \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.7}$$

Отметим, что многочлен $Q(\xi) = P^k(\xi)$ почти гипоэллиптичен и $d_Q(\xi) \equiv d_P(\xi)$, следовательно $\rho(Q) = \rho(P)$. Пусть для многочлена Q число $\Delta = \Delta(Q)$ выбрано по формуле (2.10). Тогда для всех $\delta \in (0, \Delta)$ выполняется утверждение Леммы 2.3 для оператора $Q(D)$.

Пусть $\delta \in (0,\Delta)$ и $u \in N(P,\delta)$. Покажем теперь, что $u \in W^{\infty}_{2,\delta}$. Для этого зафиксируем функцию $\varphi \in C_0^{\infty}$ такую, что $\varphi(x) \geq 0$ и $\int \varphi(x)dx = 1$, и обозначим $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$ для некоторого любого $\varepsilon > 0$. Тогда, ввиду доказательства Леммы 2.2, $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon \in W^{\infty}_{2,\delta}$ и $\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, $u_\varepsilon \in N(Q,\delta)$ для любого $\varepsilon > 0$, поскольку $Q(D)u_\varepsilon = P^{k-1}(D)(P(D)u_\varepsilon) = 0$.

Докажем, что при фиксированной функции $u \in N(P,\delta)$ и $r \in \mathbb{N}_0$ множество $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ равномерно ограничено в $W^{r}_{2,\delta}$. Для этого докажем существование числа $C = C(r,P) > 0$ такого, что для всех $\varepsilon \in (0,1)$

$$\sum_{|\alpha|\leq r} \|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C\|u g_\delta\|_{L_2}. \tag{3.8}$$

Доказательство проведём по индукции по r. При $r = 0$ неравенство (3.8) следует из неравенства (2.4) при $m = 0$. Пусть (3.8) доказано для $k = 0,1,\ldots,r-1$; докажем его для $k = r$. Пусть $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ и $|\alpha| = r$. Тогда $\beta \equiv \alpha - e^j \in \mathbb{N}_0^n$ для некоторого $j : 1 \leq j \leq n$, где $e^j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, с единицей на j-том месте. Используя формулу Лейбница, равенство Парсеваля и оценку (3.7) получим, что с некоторой постоянной $C > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon) g_\delta\|_{L_2} = \left\| \left[D^{e^j}\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\right] g_\delta \right\|_{L_2} \leq \left\| D^{e^j}\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} +$$
$$+ \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\left(D^{e^j} g_\delta\right)\right\|_{L_2} = \left\|\xi_j F\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\left(D^{e^j} g_\delta\right)\right\|_{L_2}$$
$$\leq C\left\|Q(\xi) F\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + C\left[\left\|F\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right)\left(D^{e^j} g_\delta\right)\right\|_{L_2}\right].$$

Применяя равенство Парсеваля и свойство (1.9) функции g_δ заключаем, что для некоторой постоянной $C_1 = C_1(P^k) > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C_1\left[\left\|Q(D)\left[\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right]\right\|_{L_2} + \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right\|_{L_2}\right].$$

Следовательно, в силу Леммы 2.3, для некоторой постоянной $C_2 > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C_2\left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right\|_{L_2}$$

поскольку $D^\beta u_\varepsilon \in N(Q,\delta)$ при $u \in N(P,\delta) \subset N(Q,\delta)$. В силу того, что мультииндекс α ($|\alpha| = r$) – произвольный, по индукции получаем, что для некоторых постоянных $C_3 > 0$ и $C_4 > 0$

$$\|(D^\alpha u_\varepsilon)\, g_\delta\|_{L_2} \leq C_3 \sum_{|\beta|=r-1} \left\|\left(D^\beta u_\varepsilon\right) g_\delta\right\|_{L_2} \leq C_4\|u g_\delta\|_{L_2},$$

т.е. неравенство (3.8) доказано.

Теперь отметим, что в силу Леммы 2.4, множество $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ предкомпактно в W^{r-1}_{2,δ_1} при $\delta_1 > \delta$. Так как W^{l}_{2,δ_1} $(l = 0,1,\ldots)$ является полным пространством (пространством Банаха) и оператор обобщенного дифференцирования является замкнутым, то существует функция $v \in W^{r-1}_{2,\delta_1}$, являющаяся предельной точкой множества $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ по норме W^{r-1}_{2,δ_1}. С другой стороны, $\|u_\varepsilon - u\|_{L_{2,\delta}} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. функция u также является предельной точкой множества $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ в $L_{2,\delta}$, и следовательно, предельной точкой в L_{2,δ_1} для любого $\delta_1 > \delta$. В силу единственности предела в D' и в силу вложения $u, v \in D'$ следует, что $u = v$, т.е. $u \in W^{r-1}_{2,\delta_1}$. Так как $r \in \mathbb{N}_0$ произвольно, то $u \in W^{\infty}_{2,\delta_1}$.

Итак, $u, u_\varepsilon \in W^{\infty}_{2,\delta} \subset C^\infty$ для произвольных $\delta > 0$ и $\delta_1 > \delta$, а для любого $r_1 \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{W^{r_1}_{2,\delta_1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|(u_\varepsilon - u)g_{\delta_1}\|_{W^{r_1}_2} = 0.$$

Отсюда и из теоремы вложения пространства Соболева $W^{r_1}_2$ в $C^{(m)}$ (см. [15], теорема 10.4) и из того, что число $r_1 \in \mathbb{N}_0$ – произвольно, заключаем, что для любого $r \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|(u_\varepsilon - u)g_{\delta_1}\|_{C^{(r)}} = 0,$$

что вместе со свойством (1.8) функции g_δ влечет

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u_\varepsilon - u\|_{C^{(r)}(K)} = 0 \tag{3.9}$$

для любого $r \in \mathbb{N}$ и для произвольного компакта K.

Наконец докажем, что $u \in W^{\infty}_{2,\delta}$. По теореме о переходе к пределу под знаком интеграла из (3.9) имеем

$$\sum_{|\alpha|\le r} \int_K |D^\alpha u(x)|^2 g^2_\delta(x)dx = \sum_{|\alpha|\le r} \int_K \left(\lim_{\varepsilon\to 0} |D^\alpha u_\varepsilon(x)|\right)^2 g^2_\delta(x)dx$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\alpha|\le r} \int_K |D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 g^2_\delta(x)dx. \tag{3.10}$$

С другой стороны, по уже доказанной части теоремы, множество $\{u_\varepsilon : \varepsilon \in (0,1)\}$ равномерно ограничено в $W^{r}_{2,\delta}(\mathbb{E}^n)$, и поэтому для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ и произвольного компакта $K \in \mathbb{E}^n$ имеем

$$\sum_{|\alpha|\le r} \int_K |D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 g^2_\delta(x)dx \le \sum_{|\alpha|\le r} \int_{\mathbb{E}^n} |D^\alpha u_\varepsilon(x)|^2 g^2_\delta(x)dx = \|u_\varepsilon\|_{W^{r}_{2,\delta}} \le C_5,$$

где $C_5 > 0$ – постоянная. Отсюда и из (3.10) следует, что $u \in W^r_{2,\delta}$. Теорема доказана.

Объединяя утверждения теорем 3.1 и 3.2, приходим к основному результату, теореме 1 сформулированной в параграфе 1.

Abstract. A linear, differential operator $P(D) = P(D_1, \ldots, D_n)$ with constant coefficients is called almost hypoelliptic if all derivatives $D^\alpha P$ of the characteristic polynomial, i.e. of the complete symbol $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ can be estimated by $P(\xi)$. The paper proves that all solutions of the differential equation $P(D)u = 0$ that are square summable with a definite exponential weight are infinitely differentiable functions if and only if the operator $P(D)$ is almost hypoelliptic.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators, vol. 2, Springer - Verlag, 1983.
2. L. Gording, B. Malgrange, "Operateurs differentiels partiellement hypoelliptiques", Math. Scand. vol. 9, pp. 5-21, 1961.
3. L. Ehrenpreis, "Solutions of some problems of division", Amer. J. Math., vol. 82, pp. 522-588, 1960.
4. f. John, "Continuous dependence on data for solutions of PDE with a prescribed bound", Comm. Pure Appl. Math., vol. 13, pp. 551-585, 1960.
5. L. Hörmander, "On the singularities of solutions of PDE with constant coefficients", Israel Math. J., vol. 13, pp. 82-105, 1972.
6. Я. С. Бугров, "Теоремы вложения для некоторых функциональных классов", Труды МИАН СССР, том 77, стр. 45-64, 1965.
7. В. И. Буренков, "Аналог теоремы Л. Хермандера о гипоэллиптичности для функций, стремящихся к нулю на бесконечности", Сб. докладов 7-ого Советско-Чехословацкого семинара, стр. 63-67, Ереван, 1982.
8. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Носитель гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 5, стр. 453 - 470, 1986.
9. L. Gording, "Linear hyperbolic PDE with constant coefficients", Acta Math., vol. 85, pp. 1 - 62, 1951.
10. Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян, "Оценки решений негипоэллиптических уравнений с данным носителем гипоэллиптичности", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 4, стр. 315-336, 1987.
11. Г. Г. Казарян, "Некоторые оценки производных многочленов с постоянными коэффициентами", Известия НАН Армении, серия Математика, том 34, № 3, стр. 44-63, 1999.
12. G. G. Kazaryan, "On almost-hypoelliptic polynomials", Doklady Ross. Acad. Nauk., vol. 398, no. 6, pp. 701-703, 2004.
13. O. R. Gabrielyan, "Comparison of power and strength of polynomials in R^2", in : Complex Analysis, Diff. Equations and Related Topics, Proc. of ISAAC Conf. on Analysis, pp. 41 - 51, Yerevan, 2002.

14. H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan , "Behavior at infinity of polynomials of two variables", in : Topics in Analysis and its Appl., NATO Sci. Series, pp. 163-190, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht-Boston-London, vol. 147, 2004.
15. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные представления функций и теоремы вложения, Наука, Москва, 1996.
16. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1981.

Поступила 9 сентября 2006