Известия НАН Армении. Математика, 41, № 6, 2006, 33–38

ОДНО ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТИПА СВЁРТКИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Б. Н. Енгибарян

Институт математики НАН Армении
E-mail : b.yengibaryan@eif.am

Резюме. Рассматривается интегральное уравнение

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S(t)dt,$$

где $K, K_0 \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1$, $\lambda(t) > 1$, а g – неотрицательная суммируемая функция. Такое уравнение возникает, в частности, в теории переноса нейтронов в неоднородном полупространстве, при возможности их размножения. При некоторых дополнительных ограничениях на функции λ и K_0 доказывается существование положительного локально интегрируемого решения.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующее интегральное уравнение типа свёртки на полупрямой :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S(t)dt, \tag{1}$$

где

$$0 \leq g(\tau) \in L_1(0, \infty). \tag{2}$$

Ядерные функции K и K_0 удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} 0 \leq K \in L_1(-\infty, \infty), \quad 0 \leq K_0 \in L_1(0, \infty), \\ \int_\tau^\infty K(t)dt > 0, \quad \forall \tau > 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1 \end{gathered} \tag{3}$$

а $\lambda = \lambda(\tau)$ – неотрицательная, ограниченная функция, т.е.

$$0 \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_1 < \infty. \tag{4}$$

К рассматриваемому уравнению сводятся ряд линейных и нелинейных задач переноса излучения в неоднородном полупространстве (см. [1]). Аргумент τ имеет смысл расстояния переменной точки от плоской границы среды. Альбедо рассеяния λ представляет собой среднее число частиц, возникающих в результате элементарного акта взаимодействия частицы с веществом. Неоднородность среды проявляется в зависимости λ от τ, а вид ядра K_0 обусловлен законом отражения частицы из границы $\tau = 0$ среды.
Известный интерес представляют задачи, в которых величина λ, может оказаться больше 1 вследствие размножения частиц в результате их взаимодействия с радиоактивными ядрами (см. [2]).
При $\lambda(t) \geq 1$, уравнение (1) возникает также в результате линеаризации некоторых нелинейных задач переноса излучения.
В случае $K_0 = 0$, уравнение (1) обращается в основное интегральное уравнение переноса в неоднородном плоском слое :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt. \tag{5}$$

Н. Б. Енгибаряном была поставлена задача описания классов функций $\lambda(t) \geq 1$ таких, при которых уравнение (5) обладает положительным, "физическим" решением. Первые результаты в данном направлении были получены в работе Л. Г. Арабаджяна и А. С. Хачатряна [3]. В [3] уравнение (5) рассмотрено в случае, когда ядерная функция K несимметрична и обладает отрицательным моментом первого порядка $\int_{-\infty}^{\infty} x\,K(x)\,dx < 0$. Также в [3] получены результаты по существованию положительного решения однородного ($g = 0$) уравнения и неоднородного уравнения, при выполнении условия

$$1 \leq \lambda(\tau) \leq \left(\int_{-\infty}^{\tau} K(t)dt\right)^{-1}. \tag{6}$$

В случае неоднородного уравнения, получен следующий интересный результат (см. [3]) : если функция $\lambda g \in L_1(0,\infty)$ невозрастающая и ограниченная, то существует положительное, ограниченное решение уравнения (5).
В настоящей заметке рассматривается аналогичная задача построения положительного решения неоднородного уравнения (1) при $\lambda(\tau) \geq 1$. В работе приводится одно достаточное условие на функцию λ, при котором существует положительное, локально интегрируемое решение уравнения (1). Это условие имеет

простой физический смысл и примыкает к условию (6). Никаких дополнительных условий на функции K и $g \in L_1(0,\infty)$ не накладываются. Излагаемый подход основан на одном способе оценки итераций для уравнений (5), который исходит из работы [4].

§ 2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

Пусть L_1^{loc} – линейное топологическое пространство измеримых по Лебегу функций на $[0,\infty)$, снабженное топологией сходимости по $L_1(0,r)$, $\forall r < +\infty$, которую мы назовем топологией T. Через W обозначим ядро уравнения (1) и через $\widehat{W}$ – интегральный оператор с этим ядром :

$$W(\tau,t) = [K(\tau - t) + K_0(\tau + t)]\lambda(t), \qquad \left(\widehat{W}S\right)(\tau) = \int_0^\infty W(\tau,t)S(t)dt.$$

Из отмеченных выше свойств функций K, K_0 и λ легко следует, что оператор $\widehat{W}$ действует в пространстве $L_1^+ = L_1(0,\infty)$, причём

$$||\widehat{W}|| \leq \lambda_1 \left(1 + \int_0^\infty K_0(t)dt\right). \tag{7}$$

При $\lambda(\tau) \equiv \lambda_1$, уравнение (5) обращается в уравнение Винера–Хопфа. В консервативном случае $\lambda_1 = 1$ символ этого уравнения вырождается. Это уравнение не может иметь решение в L_1^+ при нетривиальном $g \in L_1^+$, $g \geq 0$ (см. [5]). Отсюда непосредственно следует, что аналогичным свойством обладает уравнение (1) при $\lambda(\tau) \geq 1$, $K_0 \geq 0$. Сказанное означает, что при $\lambda(\tau) \geq 1$ уравнение (1) относится к критическому или суперкритическому случаю. Его решение мы будем искать в некотором расширении пространства L_1^+.

Рассмотрим следующие последовательные приближения для уравнения (1) :

$$\begin{aligned} S_{n+1}(\tau) =& g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S_n(t)dt + \int_0^\infty K_0(\tau + t)\lambda(t)S_n(t)dt, \\ S_0 = 0,& \quad n = 0,1,2,\cdots \end{aligned} \tag{8}$$

В силу (2) и (7), итерации (8) определяют последовательность S_n в L_1^+ со свойствами

$$S_n \in L_1(0,\infty), \quad 0 \leq S_n \uparrow \quad \text{по} \quad n. \tag{9}$$

Можно показать, что если S_n сходится по топологии T, то её предел S удовлетворяет уравнению (1). Функцию S мы назовём основным решением уравнения (1). Аналогичный факт для некоторых других интегральных уравнений с положительными ядрами установлен в [5].

Обозначим $\gamma_n = \int_0^\infty S_n(\tau)d\tau < +\infty$. Тогда $0 \le \gamma_n \uparrow$ по n. Интегрируя равенство (8) по τ от 0 до ∞, с учётом (3) получаем

$$\gamma_{n+1} = \mu + \gamma_n - \int_0^\infty \rho(t)S_n(t)dt, \tag{10}$$

где $\mu = \int_0^\infty g(\tau)d\tau < +\infty$ и

$$\rho(t) = 1 - \lambda(t)\left(\int_{-t}^\infty K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz\right). \tag{11}$$

Наложим на функцию K_0 следующее ограничение

$$\int_t^\infty K_0(z)dz < \int_{-\infty}^{-t} K(z)dz, \forall t < +\infty. \tag{12}$$

Условие (12) выполняется в важном случае, когда $K_0(\tau) = \varepsilon K(\tau), \tau > 0, 0 \le \varepsilon < 1$ и функция K чётная. Случай чётной функции K представляет основной интерес в теории переноса, а данный вид функции $K_0(\tau)$ соответствует зеркальному отражению из границы с вероятностью $\varepsilon < 1$.
С учётом равенства $\int_{-\infty}^\infty K(\tau)d\tau = 1$ (см. [3]) и неравенства (12) получаем

$$\int_{-t}^\infty K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz = 1 - \int_{-\infty}^{-t} K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz < 1. \tag{13}$$

Наложим на функцию λ условие

$$\lambda(t) < \lambda_0(t) := \left(\int_{-t}^\infty K(z)dz + \int_t^\infty K_0(z)dz\right)^{-1}. \tag{14}$$

Из (12) следует, что $\lambda_0(t) > 1$ поэтому условие (14) допускает возможность неравенства $\lambda(t) > 1$ на всей полуоси $[0,\infty)$.
Из (11) и (14) следует выполнение неравенства $0 < \rho(z) \le 1$, то есть ρ является весовой функцией в пространстве L_1^+. Через $L(\rho) \supset L_1^+$ обозначим банахово пространство $L(\rho)$ функций, интегрируемых с весом ρ на $(0,\infty)$ с конечной нормой $||f|| = \int_0^\infty |f(t)|\rho(t)dt < \infty$.
Вернёмся к рассмотрению итераций (8). Используя равенство (10) и монотонность последовательности γ_n мы приходим к следующей лемме.

Лемма 1. *Итерационная последовательность S_n обладает свойствами (9), и имеет место оценка*

$$||S_n||_{L(\rho)} = \int_0^\infty S_n(t)\rho(t)dt \le \mu. \tag{15}$$

Согласно теореме Б. Леви (см. [6]), из (9) и (15) следует сходимость последовательности S_n в $L(\rho)$:

$$S_n \to S \in L(\rho), \quad 0 \le S_n \le S, \quad \int_0^\infty S(t)\rho(t)dt \le \mu. \tag{16}$$

Итак, нам остаётся совершить предельный переход в (8). Из (8) и (16) имеем

$$g(\tau) + \int_0^\infty W(\tau,t)S_n(t)dt \le S(\tau), \quad n = 0,1,2,\cdots$$

откуда, согласно теореме Б. Леви следует сходимость интеграла

$$\int_0^\infty W(\tau,t)\lambda(t)S(t)dt, \qquad \tau > 0,$$

и неравенство

$$g(\tau) + \int_0^\infty W(\tau,t)S(t)dt \le S(\tau). \tag{17}$$

С другой стороны, из (7) и (15) имеем

$$S_{n+1}(\tau) \le g(\tau) + \int_0^\infty W(\tau,t)S(t)dt \le S(\tau), \quad n = 0,1,2,\cdots,$$

откуда следует неравенство, противоположное к (17). Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие (14). Тогда для произвольного* $g \in L_1(0,\infty)$, $g \ge 0$, *уравнение (1) обладает основным решением* $S \in L(\rho)$, *которое обладает свойствами (16).*

Заметим, что функция S является минимальным положительным решением уравнения (1), т.е. если $\tilde{S}$ – произвольное положительное решение уравнения (1), то $S \le \tilde{S}$.

Перечислим некоторые возможные обобщения Теоремы 1.

a) Теорема 1 допускает распространение на более реальные задачи переноса нейтронов, описываемых векторными интегральными (или интегро-дифференциальными) уравнениями, в которых участвуют индикатриса рассеяния (из $L_1(-1,1)$) и закон перераспределения нейтронов по скоростям при элементарном акте рассеяния.

b) Широкий круг скалярных интегральных уравнений переноса при достаточно общих законах отражения из границы $\tau = 0$ среды имеет вид :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^\infty K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^\infty K_1(\tau,t)\lambda(t)S(t)dt, \tag{18}$$

где $K_1 \geq 0$. Помимо зеркального отражения, так обстоит дело в случае изотропного рассеяния, ламбертова рассеяния и др. При соответствующих ограничениях на функции K_1 и $\lambda(\tau) > 1$, можно доказать существование положительного решения уравнения (18).

c) Аналогичным образом, может быть изучено следующее уравнение на всей прямой :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt,$$

где $\lambda(\tau) < 1$, $\tau < 0$ или $\lambda(\tau) > 1$, $\tau > 0$.

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе.

Abstract. In a nonhomogeneous half-space in the presence of neutron multiplication the following integral equation arises :

$$S(\tau) = g(\tau) + \int_0^{\infty} K(\tau - t)\lambda(t)S(t)dt + \int_0^{\infty} K_0(\tau + t)\lambda(t)S(t)dt,$$

where $K, K_0 \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)d\tau = 1$, $\lambda(t) > 1$ and g is a nonnegative integrable function. Existence of a positive, locally integrable solution $S(\tau)$ is proved under some additional conditions on the functions λ and K_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Соболев, Рассеяние света в атмосферах планет, Наука, Москва, 1972.
2. Б. Дэвисон, Теория переноса нейтронов, Атомиздат, Москва, 1960.
3. Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об уравнении переноса в случае возможности размножения частиц", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 41, № 3, 2004.
4. Н. Б. Енгибарян, "О неподвижной точке монотонного оператора в критическом случае", Изв. РАН, серия Математическая, том 70, № 5, стр.79–96, 2006.
5. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свёртках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, Мат. анализ, Москва, ВИНИТИ АН СССР, том 22, стр. 175 – 244, 1984.
6. А. Н. Колмогоров, В. С. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, Наука, Москва, 1981.

Поступила 10 сентября 2006