

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ ОБОБЩЁННЫЕ ФУНКЦИИ

Ю. Н. Дрождинов, Б. И. Завьялов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

E-mail : drozzin@mi.ras.ru

Резюме. Медленно растущие обобщённые функции, имеющие (квази)асимптотику на асимптотической шкале правильно меняющихся функций называются асимптотически однородными. В статье приводится сферическое представление распределений таких функций, которые описываются в терминах таких представлений. Результаты применяются для изучения особенностей функций, голоморфных в трубчатых областях над конусом.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известна роль, которую играют однородные функции в различных областях математики. Напомним, что $f(t)$ есть однородная функция степени α , если

$$\frac{1}{k^\alpha} f(kt) = f(t), \quad k > 0. \quad (1)$$

Для обобщения можно было бы потребовать, например, выполнение соотношения

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) = g(t), \quad k > 0, \quad (2)$$

где $\rho(k) > 0$ – непрерывная функция такая, что $\rho(1) = 1$. Но тогда, обязательно $\rho(k) = k^\alpha$ с некоторым α и $g(t) = f(t)$. Ничего нового на этом пути не получим. Рассмотрим другое обобщение. Обозначим через $S(\mathbb{R}^n)$ пространство Шварца быстро убывающих основных функций, а через $S(\mathbb{R}^n)'$ – пространство медленно растущих обобщённых функций.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты НШ-6705.2006.1 и 07-01-00144.

Определение 1. Пусть $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(k)$ положительная непрерывная функция при $k > 0$. Будем говорить, что $f(t)$ асимптотически однородна на бесконечности или в нуле относительно $\rho(k)$ и будем писать $f(t) \in AO_\rho$ или $f(t) \in AO^\rho$ если, соответственно,

$$\frac{1}{\rho(k)} f(kt) \longrightarrow g(t) \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho(k)} f\left(\frac{t}{k}\right) \longrightarrow g(t) \quad (3)$$

при $k \rightarrow \infty$ в $S'(\mathbb{R}^n)$, где $g(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Если $g(t) \equiv 0$, то $f(t)$ тривиально асимптотически однородна относительно $\rho(k)$. Если выполнено (3), причём $g(t) \not\equiv 0$, то $\rho(k)$ обязательно является автомодельной (правильно меняющейся) функцией. То есть, для любого $a > 0$ и некоторого α

$$\frac{\rho(ak)}{\rho(k)} \rightarrow a^\alpha, \quad k \rightarrow \infty,$$

равномерно на компактах по a в $(0, +\infty)$. Число α называется порядком автомодельности ρ . В качестве примеров мы можем упомянуть следующие функции

$$k^\alpha, k^\alpha \ln k, k^\alpha \ln \ln k, k^\alpha (1 + \frac{1}{2} \sin \ln \ln k), k^\alpha e^{\sqrt{\ln k}}, k^\alpha \left(1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln k}}\right) \sin \sqrt{\ln k}\right)$$

(эти функции служат наиболее общей асимптотической шкалой).

Порядок α автомодельной функции $\rho(k)$ из (3) называется порядком AO_ρ . Отметим, что $g(t)$ в (3) является однородной обобщённой функцией степени α . При $\alpha \leq -n$, свойство функции быть асимптотически однородной не является чисто асимптотическим, а зависит от глобальных свойств обобщённой функции в целом. Например, обобщённые функции с финитными носителями асимптотически однородны относительно $\rho(k) = k^\alpha$, $\alpha = -n - p$, при некотором $p = 0, 1, \dots$, при этом предельная функция представляется линейной комбинацией дельта функций и их производных.

Асимптотически однородные функции обладают рядом интересных свойств и участвуют в формулировке многих тауберовых теорем и в различных задачах математической физики. Например, известная тауберова теорема Н. Винера формулируется следующим образом :

Теорема Винера. Для того, чтобы функция $f(t) \in L_\infty(0, +\infty)$ была асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k) = 1$ (в $L'_1(0, +\infty)$), то есть для любой $\varphi(t) \in L_1(0, \infty)$ выполнялось бы

$$\int_0^\infty f(kt)\varphi(t) dt = (f(kt), \varphi(t)) \rightarrow c_\varphi \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для некоторой функции $\varphi_0(t) \in L_1(0, +\infty)$ преобразование Меллина которой

$$\widehat{\varphi}_0(x) \equiv \int_0^{\infty} t^{-ix} \varphi_0(t) dt \neq 0 \quad \text{для всех } x \in (-\infty, +\infty).$$

имело место

$$(f(kt), \varphi_0(t)) \rightarrow c \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Здесь в качестве пространства основных функций фигурирует пространство $L_1(\mathbb{R}_+^1)$, а обобщённые функции это функции из L_∞ .

Описание и свойства асимптотически однородных функций хорошо изучены для функций из $S(\mathbb{R}^n)'_+$ – пространство обобщённых функций медленного роста с носителями на положительной полуоси. В частности, для того чтобы функция $f(r) \in S(\mathbb{R}^n)'_+$ была асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $N > -\alpha - 1$, что

$$\frac{f^{(-N)}(r)}{r^N \rho(r)} \rightarrow C \neq 0 \quad \text{при } r \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

где $f^{(-N)}(r)$ – первообразная порядка N функции $f(r)$.

Первообразная (производная) порядка β обобщённой функции $f(r) \in S(\mathbb{R}^n)'_+(\mathbb{R}^1)$ определяется формулой

$$f^{(-\beta)}(r) = f_\beta(r) * f(r), \quad (5)$$

где ядро дробного (дифференцирования) интегрирования

$$f_\beta(r) = \begin{cases} \frac{\Theta(r)r^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} & \text{при } \beta > 0, \\ \frac{d^N}{dr^N} f_{\beta+N}(r) & \text{при } \beta \leq 0, \beta + N > 0, \text{ рекуррентно по } N, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Gamma(\beta)$ – гамма функция. Как известно, $\frac{N!}{r^N} f^{(-N)}(r) = S_r^N(f)$ – чезаровское среднее порядка N , таким образом, понятие асимптотической однородности в случае $S(\mathbb{R}^n)'_+$ адекватно отражает асимптотическое поведение чезаровских средних.

Другой частный случай, где асимптотически однородные обобщенные функции также имеют простое описание, правда, в несколько других терминах, демонстрирует тесную связь асимптотически однородных функций с граничными свойствами функций, голоморфных в трубчатых конусах.

Пусть $F(z) \in H(T^C)$, где C острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C . Это означает, что $F(z)$ – голоморфна в T^C и удовлетворяет там оценке

$$|F(z)| \leq A \frac{(1 + |z|)^d}{\Delta_C^b(y)}, \quad z = x + iy, \quad y \in C.$$

Здесь A , b и d суть постоянные, а $\Delta_C(y)$ – расстояние от $y \in C$ до границы конуса C . Отметим, что при $y \rightarrow +0$ существует граничное значение функции $F(z)$ в S' , так что $f(x) = \lim_{y \rightarrow +0} F(x + iy)$, причём носитель его преобразования Фурье $\tilde{f}(t)$ лежит в конусе, сопряжённом конусу C , то есть $\text{supp } \tilde{f}(t) \subset \Gamma = C^*$.

Определение 2. Будем говорить, что голоморфная функция $F(z) \in H(T^C)$ ведёт себя как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ в T^C , где $\rho(k)$ – автомодельная функция, если

1. существует $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho(k)} F\left(\frac{z}{k}\right)$ для любого $z \in T^C$,
2. существуют числа b, c, ε такие, что

$$|F(z)| \leq \rho\left(\frac{1}{|z|}\right) \frac{c}{\varphi^b}, \quad |z| < \varepsilon, \quad \text{где } \varphi = \min \left\{ \Delta_C\left(\frac{y}{|y|}\right), \frac{|y|}{|z|} \right\}.$$

Имеет место :

Теорема 1. Пусть C – острый, выпуклый, открытый конус в $\mathbb{R}^n$, а $T^C = \mathbb{R}^n + iC$ – трубчатая область над конусом C . Тогда голоморфная функция $F(z) \in H(T^C)$ ведёт себя в T^C как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ при $z \rightarrow 0$, тогда и только тогда, когда ее граничное значение $f(x)$ асимптотически однородно в нуле относительно $\rho(k)$.

Хорошо бы иметь "подобные" описания асимптотически однородных обобщённых функций и в общем случае.

§1. СФЕРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим в $S(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$ подпространство

$$V = \left\{ \psi(\tau, e) \in S(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1}) : \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \right)^p \psi(\tau, e) \Big|_{\tau=0} = P_p(e), \quad p = 0, 1, \dots, e \in S^{n-1} \right\},$$

где $P_p(t)$ – однородный многочлен степени p . Топология в V индуцируется топологией в пространстве $S(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Нетрудно видеть, что V замкнутое подпространство пространства $S(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Если $\varphi(t) \in S(\mathbb{R}^n)$, то отображение

$$\tau : \varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n) \mapsto \psi(\tau, e) = \varphi(\tau e_1, \dots, \tau e_n)$$

осуществляет изоморфизм пространств $S(\mathbb{R}^n)$ и V , при этом обратное отображение τ^{-1} задаётся формулой

$$\tau^{-1} : \psi(\tau, e) \mapsto \varphi(t) = \psi\left(|t|, \frac{t}{|t|}\right), \quad \forall \psi(\tau, e) \in V.$$

Определение 3. Пусть $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$, тогда обобщённая функция

$$(f_s(\tau, e), \psi(\tau, e)) = \left(f(t), \psi\left(|t|, \frac{t}{|t|}\right)\right), \quad \forall \psi \in V,$$

принадлежит V' . Так как V замкнутое подпространство в $S(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$, то по теореме Хана-Банаха, функцию f_s можно продолжить на всё пространство $S(\bar{\mathbb{R}}_+ \times S^{n-1})$. Обозначим это продолжение $F(\tau, e)$ и назовём его сферическим представлением обобщённой функции $f(t) \in S'$. Отметим, что справедлива формула

$$(f(t), \varphi(t)) = (F(\tau, e), \varphi(\tau e)), \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Сферическое представление $F(\tau, e)$ обобщённой функции $f \in S'$ определяется неоднозначно. Общий вид сферического представления для любой $f(t) \in S(\mathbb{R}^n)'(\mathbb{R}^n)$, выглядит так :

$$F_0(\tau, e) + \sum_{p=0}^N \delta^{(p)}(\tau) \Phi_p(e), \quad p = 0, 1, \dots,$$

где $F_0(\tau, e)$ какое-то (конкретное) сферическое представление, а обобщённые функции $\Phi_p(e)$ удовлетворяют условиям

$$(\Phi_p(e), P_p(e)) = 0, \quad |j| = p, \quad p = 0, 1, \dots, \quad (7)$$

где $P_p(t)$ — любой однородный многочлен степени p .

§2. СФЕРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f_0(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ и однородна степени α . Если $\alpha \neq -n, -n-1, \dots$, то

$$(f_0(t), \varphi(t)) = (f_{\alpha+n}(\tau) \Phi(e), \varphi(\tau e)), \quad \forall \varphi(t) \in S,$$

где $\Phi(e) \in S'(S^{n-1})$.

Обобщённая функция $f_0(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ однородна степени $\alpha = -n - p$, где p — целое неотрицательное число, тогда и только тогда, когда существует обобщённая функция

$$\Phi(e) \in S'(S^{n-1}) \quad \text{такая что} \quad (\Phi(e), P_p(e)) = 0$$

для всех однородных многочленов $P_p(t)$ степени p , и для некоторых c_j , $j = (j_1, \dots, j_n)$, имеем

$$(f_0(t), \varphi(t)) = \int_0^{+\infty} \left(\Phi(e), \varphi(re) - T_{\varphi(re)}^p(r, e) \right) \frac{dr}{r^{p+1}} + \sum_{|j|=p} c_j \varphi^{(j)}(0),$$

где $T_{\varphi(re)}^p(r, e)$ тейлоровский многочлен функции $\varphi(re)$:

$$T_{\varphi(re)}^p(r, e) = \sum_{|j| \leq p} \frac{r^{|j|}}{j!} E_j(e) \varphi^{(j)}(0), \quad j = (j_1, \dots, j_n), \quad |j| = j_1 + \dots + j_n,$$

причём $E_j(e) = e_1^{j_1} e_2^{j_2} \dots e_n^{j_n}$, $e = (e_1, \dots, e_n) \in S^{n-1}$.

§3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Для некритических порядков однородности справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ и $\rho(k)$ — автомодельная функция порядка $\alpha \neq -n - p$, $p = 0, 1, \dots$. Тогда обобщённая функция $f(t)$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α , то есть

$$\frac{1}{\rho(\kappa)} f(k\kappa) \rightarrow f_0(t) \quad \text{при} \quad \kappa \rightarrow +\infty \quad \text{в} \quad S'(\mathbb{R}^n),$$

тогда и только тогда, когда существуют её сферическое представление $F(r, e)$ и число N ($N + \alpha > -n$) такие, что

$$\frac{1}{r^{N+n-1} \rho(r)} F^{(-N)}(r, e) \rightarrow \Phi(e) \quad \text{при} \quad r \rightarrow +\infty \quad \text{в} \quad S'(S^{n-1}),$$

где $\Phi(e) \in S'(S^{n-1})$.

Эта теорема является обобщением результата для случая $f \in S'_+$. В случае критических порядков $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1, \dots$, дело обстоит несколько сложнее.

Теорема 3. Обобщённая функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha = -n - p$, $p = 0, 1$ тогда и только тогда, когда существует её сферическое представление $F(r, e)$ и число N ($N + p > 0$) такое, что

$$F(r, e) = F_1(r, e) + F_2(r, e),$$

где

$$\frac{1}{r^{N+n-1} \rho(r)} F_1^{(-N)}(r, e) \rightarrow \Phi_1(e) \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad \text{в} \quad S'(S^{n-1})$$

и

$$F_2^{(-N)}(\tau, e) = \tau^{N-p-1} \eta^{[-p-1]}(\tau, e),$$

причём $\eta(\tau, e)$ непрерывна по $\tau > 0$, со значениями в $S'(S^{n-1})$ и

$$\frac{1}{\tau^{n-1} \rho(\tau)} \eta(\tau, e) \rightarrow \Phi_2(e) \text{ при } \tau \rightarrow \infty \text{ и } (\eta(\tau, e), E_j(e)) \equiv 0 \text{ для всех } |j| = p.$$

Здесь специальная первообразная $\eta^{[-p-1]}(\tau, e)$ порядка $p+1$ по τ для $\tau > 0$ даётся формулой

$$\eta^{[-p-1]}(\tau, e) = \begin{cases} \int_1^\tau d\tau_{p+1} \int_{+\infty}^{\tau_{p+1}} d\tau_p \dots \int_{+\infty}^{\tau_1} d\tau_1 \eta(\tau_1, e), & \text{если } \int_1^\infty \tau^p \rho_1(\tau) d\tau = \infty \\ \int_{+\infty}^\tau d\tau_{p+1} \int_{+\infty}^{\tau_{p+1}} d\tau_p \dots \int_{+\infty}^{\tau_2} \eta(\tau_1, e) d\tau_1, & \text{если } \int_1^\infty \tau^p \rho_1(\tau) d\tau < \infty \end{cases}$$

Можно дать другое описание асимптотически однородных обобщённых функций в духе теоремы 1. Мы приведём это описание в случае асимптотически однородных функций на бесконечности.

Определение 4. Пусть $h(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y > 0$ непрерывна и $\rho(k)$ автомодельная функция. Будем говорить, что $h(x, y)$ ведёт себя на бесконечности как $\rho(|z|)$, где $|z| = \sqrt{|x|^2 + y^2}$, если

1. существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho(k)} |h(kx, ky)| = C(x, y) \text{ при } |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0,$$

2. существуют постоянные A и b такие, что

$$\sup_{k > 1} \frac{1}{\rho(k)} |h(kx, ky)| \leq \frac{A}{y^b} \text{ при } |x|^2 + y^2 = 1, \quad y > 0.$$

Напомним, что стандартным усреднением обобщённой функции $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ с ядром $\omega(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ называется функция

$$L_f^\omega(x, y) = \left(f(\xi), \frac{1}{y^n} \omega \left(\frac{x - \xi}{y} \right) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Теорема 4. Пусть $\omega(t) \in S(\mathbb{R}^n)$ причём $\int \omega(t) dt \neq 0$. Обобщённая функция $f(t) \in S'(\mathbb{R}^n)$ асимптотически однородна на бесконечности относительно автомодельной функции $\rho(k)$ тогда и только тогда, когда $L_f^\omega(x, y)$ ведёт себя на бесконечности как $\rho(|z|)$.

Отметим, что если в качестве ядра усреднения взять функцию $\omega(t) = ce^{-a^2 t^2}$ и полагать, что $y = \sqrt{t}$, то

$$u(x, t) = \left(f(\xi), \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \equiv L_f^\omega(x, y)$$

есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = a^2 \Delta u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x) \quad (\text{в } S'), \quad f \in S', \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (8)$$

в классе не более, чем полиномиально растущих функций, то есть таких, что

$$|u(x, t)| < C \frac{1}{t^b} (|x|^N + |t|^N + 1)$$

для некоторых b, C и N , зависящих от u .

Определение 5. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α . Если для некоторой функции $u(x, t)$ выполнены условия :

(1) существует предел

$$\frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2 t) \rightarrow u_0(x, t) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

(2) существуют A и b такие, что

$$\left| \frac{1}{\rho(k)} u(kx, k^2 t) \right| \leq \frac{A}{t^b} \quad \text{при } |x|^2 + t^2 = 1,$$

то будем говорить, что функция $u(x, t)$ стабилизируется (в бесконечности) по параболам относительно автомодельной функции $\rho(k)$.

Теперь теорема 4 может быть перефразирована в следующем виде :

Теорема 4*. Пусть $\rho(k)$ – автомодельная функция. Для того чтобы решение задачи Коши (8) стабилизировалось по параболам относительно $\rho(k)$ необходимо и достаточно, чтобы начальная функция $f(x) \in S'$ была асимптотически однородна на бесконечности относительно $\rho(k)$.

§4. О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ ГОЛОМОРФНЫХ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

Рассмотрим функцию $F(z) \in H(T^C)$. Напомним, что поведение $F(z)$ в T^C при $z \rightarrow 0$ как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$ по теореме 1 эквивалентно асимптотической однородности её граничного значения $f(x)$ в нуле относительно $\rho(k)$.

Пусть $C_q, q = 1, 2, \dots, m$, – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, а $\Gamma_q = C_q^*$ – их сопряжённые конусы. Положим

$$H^p = \left\{ f_{i_1 \dots i_p}(x) \in S'(\mathbb{R}^n), \quad i_l = 1, \dots, m : \text{supp } \tilde{f}_{i_1 \dots i_p}(t) \subset \bigcup_{l=1}^p \Gamma_{i_l}, \right\},$$

где $p = 1, \dots, m$ и $f_{i_1 \dots i_p}(x)$ полностью антисимметричны по совокупности индексов. Положим ещё

$$H^0 = \left\{ f(x) \in S'(\mathbb{R}^n) : \text{supp } \tilde{f}(t) \subset \bigcap_{q=1}^m \Gamma_q \right\}.$$

Если $\bigcup_{l=1}^p \Gamma_{i_l}$ регулярное множество, то условие $(\text{supp } \tilde{f}(t) \subset \bigcup_{l=1}^p \Gamma_{i_l})$ эквивалентно условию $f_{i_1 \dots i_p}(x) = \sum_{l=1}^p h_{i_l}(x)$, где $h_{i_l}(x)$ – граничное значение функции $h_{i_l}(z) \in H(T^{C_{i_l}})$. Введём (кограничные) операторы δ_p по следующему правилу : если $f \in H^p$, то $\delta_p f \in H^{p+1}$, где

$$[\delta_p f]_{i_0 i_1 \dots i_p}(x) = \sum_{k=0}^p (-1)^k f_{i_0 \dots \check{i}_k \dots i_p}(x).$$

Здесь символ "–" сверху означает, что соответствующий индекс опущен. Пусть $\rho(k)$ автомодельная функция порядка α , положим

$$A^p = \{ f \in H^p : \text{все компоненты } f \text{ асимптотически} \\ \text{однородны в нуле относительно } \rho(k) \}.$$

Отметим, что кограничный оператор $\delta_p : G^p \mapsto G^{p+1}$ корректно определён для фактор-пространств $G^p = H^p / A^p$, так как $\delta_p A^p \subset A^{p+1}$.

Теорема 5. Пусть $\bigcup_{q=1}^m C_q = \mathbb{R}^n$ и $\alpha \neq 0, -1, \dots$. Тогда последовательность

$$0 \longrightarrow G^0 \xrightarrow{\delta_0} G^1 \xrightarrow{\delta_1} G^2 \xrightarrow{\delta_2} \dots \xrightarrow{\delta_{m-2}} G^{m-1} \xrightarrow{\delta_{m-1}} G^m \longrightarrow 0 \quad (9)$$

точна.

Следствие 1. Пусть C_1 и C_2 – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ и $\text{ch } C_1 \cup C_2 = \mathbb{R}^n$. Если $F_i(z) \in H(T^{C_i}), i = 1, 2$, и

$$F_1(z) - F_2(z) \text{ ведёт себя } T^{C_1 \cap C_2} \text{ как } \rho\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad (10)$$

где $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, то существует многочлен $Q(z)$ такой, что

$$F_1(z) - Q(z) \text{ ведёт себя в } T^{C_i} \text{ как } \rho\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad i = 1, 2,$$

где $Q(z) \equiv 0$ при $\alpha > 0$.

Теорема 6. Пусть $C_i, i = 1, 2, \dots, m$, – открытые, острые, выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma_i = C_i^*$ – сопряжённые конусы, причём $\text{pr}(\bigcup_{i=1}^m \Gamma_i) = \mathcal{F}$ регулярное множество на единичной сфере S^{n-1} . Пусть $F_i(z) \in H(T^{C_i})$ причём сумма их граничных значений $f(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x)$ асимптотически однородна в нуле относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$

Тогда существуют $\widehat{F}_i(z) \in H(T^{C_i})$ ведущие себя в T^{C_i} как $\rho\left(\frac{1}{|z|}\right)$, и $\sum_{i=1}^m \widehat{f}_i(x) = f(x)$.

Если $\alpha = 0, 1, \dots$, то Теорема 6 останется справедливым при дополнительном предположении $\text{ch } C_q \cup C_{q+1} \neq \mathbb{R}^n, q = 1, \dots, m-1$.

Abstract. Generalized functions of slow growth that have (quasi)asymptotics on the asymptotic scale of regularly varying functions are said to be asymptotically homogeneous. The paper suggests a spherical representation of the distributions and describe such functions in terms of that representation. The results are applied to the study of the singularities of the functions holomorphic in the tube domains over the cones.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Дрожинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщённые функции и граничные свойства функций голоморфных в трубчатых конусах” Известия РАН, серия математическая, том 70, № 6, 2006.
2. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожинов, Б. И. Завьялов, Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций, Москва, Наука, 1986.
3. Ю. Н. Дрожинов, Б. И. Завьялов, “Асимптотически однородные обобщённые функции в сферическом представлении и некоторые применения”, Доклады РАН, том 405, № 1, стр. 18–21, 2005.

Поступила 21 сентября 2006