ТРАЕКТОРИИ ПОЛЁТОВ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ
С РЕАКТИВНОЙ ТЯГОЙ

А. О. Бабаян

Ереванский государственный инженерный университет

E-mail : armenak@web.am

В работе рассматривается движение летательного аппарата под действием сил

$$\vec{F}_g = m \vec{g}, \quad \vec{F}_R = -k \frac{dm(t)}{dt} \frac{\vec{V}}{V}, \quad \vec{F}_c = -\kappa \vec{V},$$

где $m(t)$ – масса летательного аппарата в момент времени t , $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$ – скорость в момент времени t , $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$, k – положительная постоянная, а κ – неотрицательная функция. Закон движения определяется уравнением Мещерского [1]

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_c. \quad (1)$$

Пусть движение летательного аппарата осуществляется по траектории

$$y = f(x), \quad 0 \leq x \leq x_0. \quad (2)$$

Заданы начальная скорость летательного аппарата и масса в конечной точке полёта

$$V(0) = \sqrt{V_1^2(0) + V_2^2(0)} = V_0, \quad m(x_0) = m_0. \quad (3)$$

Переходя к переменной x и записывая (1) в координатах, получим следующую систему

$$\begin{cases} m \frac{dV_1}{dx} = -\frac{k}{V} \frac{dm}{dx} V_1 - \kappa, & 0 \leq x \leq x_0 \\ m V_1 \frac{dV_2}{dx} = -\frac{k}{V} \frac{dm}{dx} V_1 V_2 - \kappa V_2 - gm, & 0 \leq x \leq x_0 \end{cases} \quad (4)$$

с краевыми условиями (3). Следующая теорема была доказана в [2] на основе равенства $V_2 = f'(x)V_1$.

Теорема 1. Задача (3)–(4) разрешима для любой функции $\kappa \geq 0$ тогда и только тогда, когда

$$f''(x) < 0, \quad f'''(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (5)$$

$$\frac{1 + (f'(0))^2}{f''(0)} = -\frac{V_0^2}{g}. \quad (6)$$

Используя теорему 1, в работах [2] и [3] были получены интегральные представления допустимых траекторий. Для эффективного определения оптимальных параметров полёта предпочтительнее параметрическое представление траекторий, определяемых функциями заданного класса. В работе рассматривается случай, когда $f(x) = P_3(x)$ – многочлен третьего порядка. Получены параметрические представления траекторий такого вида, по которым возможно осуществить полёт из точки $(0, 0)$ в точку (x_0, y_0) . Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Полёт из точки $(0, 0)$ до точки $(x_0, 0)$ может осуществляться по траектории $y = P_3(x)$ тогда и только тогда, когда $0 \leq x_0 < \frac{3V_0^2}{2g}$. В частности,

1) если $0 \leq x_0 \leq \frac{V_0^2}{g}$, то

$$P_3(x) = l \left(x - \frac{1 + 0,5\rho}{x_0} x^2 + \frac{\rho}{2x_0^2} x^3 \right), \quad (7)$$

где $0 \leq \rho < 1$, а число l – решение уравнения

$$l^2 - 2l \frac{V_0^2}{gx_0} \left(1 + \frac{\rho}{2} \right) + 1 = 0, \quad (8)$$

2) если $\frac{V_0^2}{g} < x_0 < \frac{3V_0^2}{2g}$, то $P_3(x)$ определяется формулой (7), где l – решение уравнения (8), а ρ – произвольное число, удовлетворяющее неравенству

$$1 > \rho \geq \max \left(0; 2 \left(\frac{gx_0}{V_0^2} - 1 \right) \right). \quad (9)$$

Теорема 3. Полёт из точки $(0, 0)$ до точки (x_0, y_0) может осуществляться по траектории $y = P_3(x)$ тогда и только тогда, когда

$$y_0 < \left(\frac{3V_0^2}{2g} \right) - \frac{gx_0^2}{3V_0^2},$$

и

$$P_3(x) = \frac{y_0}{x_0} x + l \left(x - \frac{1 + 0,5\rho}{x_0} x^2 + \frac{\rho}{x_0^2} x^3 \right),$$

где l определяется из уравнения

$$l^2 - 2l \left(\frac{V_0^2}{gx_0} \left(1 + \frac{\rho}{2} \right) - \frac{y_0}{x_0} \right) + \left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 + 1 = 0,$$

а ρ — произвольная постоянная, удовлетворяющая соотношениям

$$1 > \rho \geq \max \left(0; 2 \left(\frac{gx_0}{V_0^2} \left(\frac{y_0}{x_0} + \sqrt{\left(\frac{y_0}{x_0} \right)^2 + 1} \right) - 1 \right) \right).$$

Доказательство теоремы 2. Из условия $f(0) = 0$ следует, что свободный член многочлена равен нулю и, следовательно

$$P_3(x) = l \left(x + \frac{c}{x_0} x^2 + \frac{d}{x_0^2} x^3 \right).$$

При $x = x_0$ функция P_3 также обращается в нуль, поэтому

$$0 = l(x_0 + cx_0 + dx_0) \implies c = -(1 + d). \quad (10)$$

Из условий (5) следует, что

$$ld \geq 0, \quad (11)$$

и $2lcx_0^{-1} + 6ldxx_0^{-2} < 0$ при $0 \leq x \leq x_0$. Это неравенство эквивалентно следующим условиям

$$l(c + 3d) < 0, \quad lc < 0. \quad (12)$$

Теперь, обозначая $d = 0.5\rho$ и учитывая (10), представим неравенства (11) и (12) в виде $l\rho \geq 0$, $l(\rho - 1) < 0$, $-l(\rho + 2) < 0$. Отсюда следует, что

$$l > 0, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (13)$$

Итак, многочлен третьего порядка P_3 , удовлетворяющий условиям (5) и обращающийся в нуль в точках 0 и x_0 , представляется в виде (7), где l и ρ удовлетворяют (13).

Теперь рассмотрим условие (6). Подставляя функцию (7) в условие (6), получаем уравнение (8). Все действительные корни уравнения (8) — положительные, следовательно, это уравнение определяет l , удовлетворяющее условию (13) тогда и только тогда, когда

$$\frac{V_0^4}{(gx_0)^2} (1 + 0.5\rho)^2 - 1 \geq 0. \quad (14)$$

Отсюда следует, что если $0 \leq x_0 \leq \frac{V_0^2}{g}$, то траектория вида (7) при произвольном $0 \leq \rho < 1$ является допустимой. В случае $\frac{V_0^2}{g} < x_0 < \frac{3V_0^2}{2g}$, постоянная ρ должна удовлетворять условию (9). Если же $x_0 \geq \frac{3V_0^2}{2g}$, то уравнение (8) не имеет положительных корней и, следовательно, многочлен третьего порядка не является допустимой траекторией полёта от точки $(0, 0)$ до точки $(0, x_0)$. Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2, поэтому мы его опускаем. При этом используем представление многочлена $P_3(x) = xy_0x_0^{-1} + Q_3(x)$, где Q_3 – многочлен третьего порядка, удовлетворяющий условию $Q_3(0) = Q_3(x_0) = 0$. Отметим, что в этом случае y_0 может быть отрицательным.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Дмитриевский, Внешняя баллистика, Машиностроение, Москва, 1979.
2. N. E. Tovmasyan, "The flight of an aircraft along a given trajectory and optimal flight control", in : Topics in Analysis and its Applications, NATO Science Series, Series II, Vol. 147, Kluwer Academic Publishers, pp. 347 – 364, 2004.
3. О. А. Бабаян, "Критерии возможности полёта летательного аппарата и интегральное представление допустимых траекторий", Математика в высшей школе, том 1, № 4, стр. 8 – 15, 2005.

Поступила 5 сентября 2006