Известия НАН Армении. Математика, 41, № 5, 2006, 53–57

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ n–ГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВНЕ КРУГА

Н. Е. Товмасян

Ереванский государственный инженерный университет
E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе доказано существование и единственность решения задачи Дирихле вне круга в классе функций, имеющих порядок роста r^{n-1} при $r \to \infty$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$. Указан эффективный метод решения этой задачи.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть D – внешняя область единичного круга, т.е. $D = \{z : |z| > 1, \ z \neq \infty\}$, Γ – единичная окружность $|z| = 1$, $\overline{D} = D \bigcup \Gamma$ и $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле для n-гармонического уравнения $(n \geq 2)$:

$$\Delta^n u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^k u}{\partial r^k}|_\Gamma = f_k(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \quad k = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

$$|u(x,y)| \leq c|z|^{n-1}, \quad (x,y) \in D, \tag{3}$$

где $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, $\frac{\partial u}{\partial r}$ – производная функции u по направлению радиуса-вектора (т.е. по направлению внутренней нормали к Γ в точке $z \in \Gamma$), c – положительная постоянная, зависящая от u, а f_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ – заданные вещественные функции на Γ. Предполагаем, что вещественное решение u $2n$-раз непрерывно дифференцируемо в D и $n-1$-раз непрерывно дифференцируемо в замкнутом кольце $1 \leq |z| \leq (1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Предполагаем, что f_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ – бесконечно дифференцируемы на Γ. В конце работы мы уточним порядок гладкости функции f_k. При $f_k \equiv 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, задачу (1)–(3) называем однородной.

В работе доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1)–(3) имеет единственное решение.*

Кроме того, в работе указывается эффективный метод решения рассмотренной задачи.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для исследования задачи (1)–(3) приведём некоторые леммы. Рассмотрим функцию вида

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \psi_k(z) + P_{n-2}(x,y)\ln(z\bar{z}) + P_{n-1}(x,y), \quad (x,y)\in D, \tag{4}$$

где $\psi_0,\dots,\psi_{n-1}$ – аналитические в D функции, обращающиеся в нуль на бесконечности, а P_{n-2} и P_{n-1} суть полиномы порядка не выше $n-2$ и $n-1$ соответственно относительно x и y с действительными коэффициентами.

Лемма 1. *Если в (4) $u\equiv 0$, то $P_{n-2}\equiv P_{n-1}\equiv 0$ и $\psi_k\equiv 0$ при $k=0,\dots,n-1$.*

Доказательство. Ясно, что

$$P_{n-2}(x,y) = \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-2-k}(z)\bar{z}^k, \quad \ln(z\bar{z}) = \ln z + \ln\bar{z}, \tag{5}$$

где q_{n-2-k} – некоторый полином порядка не выше $n-2-k$, и $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $0\le \arg z < 2\pi$. Пусть теперь

$$\frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

и пусть в (4) $u\equiv 0$. Тогда, применяя оператор $\frac{\partial^n}{\partial z^n}$ к обеим частям (4) и учитывая (5), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k^{(n)}(z)\bar{z}^k = 0, \quad z\in D_0, \tag{6}$$

$$\omega_k(z) = \psi_k(z) + q_{n-2-k}(z)\ln z, \quad z\in D_0, \tag{7}$$

где $D_0 = D\setminus\{(x,0): x>1\}$ – область D без положительной полуоси абсцисс. Применяя операторы $\frac{\partial^k}{\partial\bar{z}^k}$ $(k=0,\dots,n-1)$ к обеим частям (6), получим $\omega_k^{(n)}(z) = 0$, $z\in D_0$. Следовательно, ω_k – полином порядка не выше $n-1$ относительно z. Отсюда и из (7) следует, что функция $q_{n-2-k}(z)\ln z$ аналитична в области D, а это возможно только при $q_{n-2-k}\equiv 0$. Итак, равенство (7) принимает вид

$\omega_k(z) = \psi_k(z)$ при $z \in D$ и $k = 0, \dots, n-1$. Так как ω_k – полином и $\psi_k(\infty) = 0$, то имеем $\omega_k \equiv \psi_k \equiv 0$, $k = 0, \dots, n-1$. Отсюда и из (4) и (5) ($u \equiv 0$) получаем утверждение Леммы 1.

Лемма 2. *Если u – решение уравнения (1), удовлетворяющее неравенству (3), то при $|z| \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) выполняются неравенства*

$$\left|\frac{\partial^{k+j} u}{\partial x^k \partial y^j}(z)\right| \leq C_{kj} |z|^{n-1-j-k}, \quad k, j = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

где C_{kj} – некоторые постоянные.

Доказательство опускаем, поскольку его можно получить по схеме из книги [1] (глава 3, § 16, стр. 161, формула (3)), с использованием фундаментального решения n-гармонического уравнения и формулы Грина.

Лемма 3. *Однородная задача (1)–(3) имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть u – решение однородной задачи (1)–(3). Тогда u бесконечно дифференцируема в кольце $1 \leq |z| \leq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) [2], и

$$\iint_D u(z) \Delta^n u(z) dx dy = 0. \tag{9}$$

Если $n = 2m$, то применяя формулу Грина в (9), используя неравенство (8) и однородные граничные условия (2) ($f_k \equiv 0$, $k = 0, \dots, n-1$), получаем

$$\iint_D (\Delta^m u(z))^2 dx dy = 0,$$

и следовательно

$$\Delta^m u(z) = 0, \quad z \in D. \tag{10}$$

С другой стороны, u удовлетворяет однородным граничным условиям (2). Из (10) и (2) следует, что $u \equiv 0$. При нечётном n лемма 3 доказывается аналогично. Лемма 3 доказана.

Теперь рассмотрим функцию вида

$$u(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} (z\bar{z} - 1)^k \varphi_k(z) + P_{n-2}(x, y) \ln(z\bar{z}) + P_{n-1}(x, y), \quad (x, y) \in D, \tag{11}$$

где φ_k ($k = 0, \dots, n-1$) – аналитические функции в области D, удовлетворяющие условиям

$$|\varphi_k(z)| \leq C |z|^{-k-1}, \quad z \in D, \tag{12}$$

а P_{n-2}, P_{n-1} – полиномы, удовлетворяющие тем же условиям, что и в (4). Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Если в (11) $u \equiv 0$, то $P_{n-2} \equiv P_{n-1} \equiv 0$ и $\varphi_k \equiv 0$ при $k = 0, \dots, n-1$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Сначала рассмотрим случай $n = 2$. Тогда задача (1)–(3) принимает вид

$$\Delta^2 u = 0, \quad z \in D, \tag{13}$$

$$u(z) = f_0(z), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(z) = f_1(z), \quad z \in \Gamma, \tag{14}$$

$$|u(z)| \le C|z|, \quad z \in D. \tag{15}$$

Решение задачи (13)–(15) ищем в виде

$$u(z) = \mathrm{Re}\,(\varphi_0(z) + (z\bar{z} - 1)\varphi_1(z)) + C_0 + C_1 x + C_2 y + C_3 \ln z\bar{z}, \tag{16}$$

где φ_j $(j = 0, 1)$ – искомые аналитические функции в области D, удовлетворяющие условиям

$$|\varphi_j(z)| \le c|z|^{-j-1}, \quad j = 0, 1, \tag{17}$$

а C_k $(k = 0, \dots, 3)$ – искомые действительные постоянные. Легко проверить, что $u(z)$ удовлетворяет уравнению (13) и условию (15). Подставляя $u(z)$ из (16) в граничные условия (14), получим $\mathrm{Re}\,(\varphi_0(z) + C_0 + (C_1 + iC_2)z^{-1}) = f_0(z)$ и $\mathrm{Re}\,(2\varphi_1(z) + z\varphi_0'(z) + (C_1 + iC_2)z^{-1} + 2C_3) = f_1(z)$ при $z \in \Gamma$. Применяя формулу Шварца [3] (стр. 223), получаем

$$\varphi_0(z) = -C_0 - (C_1 + iC_2)z^{-1} + F_0(z), \quad z \in D, \tag{18}$$

$$2\varphi_1(z) + z\varphi_0'(z) + (C_1 + iC_2)z^{-1} + 2C_3 = F_1(z), \quad z \in D, \tag{19}$$

где

$$F_k(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k(t)\frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z}d\theta, \quad k = 0, 1. \tag{20}$$

Из (19) и (18) определяем функцию

$$\varphi_1(z) = -C_3 - (C_1 + iC_2)z^{-1} + 0.5F_1(z) - 0.5zF_0'(z). \tag{21}$$

Отметим, что из (18), (21) и (20) следует, что аналитические функции φ_0 и φ_1 удовлетворяют условиям (17) тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered} C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(e^{i\theta})d\theta, \quad C_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\theta(f_0(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta}))\,d\theta, \\ C_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\theta(f_0(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta}))\,d\theta, \quad C_3 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f_1(e^{i\theta})d\theta. \end{gathered} \tag{22}$$

Итак, мы построили частное решение задачи (13)–(15). Согласно лемме 3, эта задача других решений не имеет. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Задача (13)–(15) имеет единственное решение (16), где* φ_j *и* C_j *определяются формулами (18), (21) и (22).*

В общем случае $n \geq 3$ исследование задачи (1)–(3) аналогично случаю $n = 2$, и поэтому остановимся на основных моментах доказательства теоремы 1, опуская детали. В общем случае решение задачи (13)–(15) ищем в виде (11). Функция u, определённая формулой (11), удовлетворяет уравнению (1) и условию (3). Подставляя эту функцию в граничные условия (2), аналогично случаю $n = 2$, однозначно определяем аналитические функции φ_k $(k = 0, \ldots, n-1)$ по граничным данным f_k и коэффициентам полиномов P_{n-2} и P_{n-1} (общее число этих коэффициентов равно n^2). Далее, подчиняя полученные функции φ_k условиям (12), получаем n^2 линейных действительных уравнений для определения n^2 неизвестных коэффициентов полиномов P_{n-2} и P_{n-1}. Из лемм 3 и 4 следует, что соответствующая однородная линейная система уравнений имеет только нулевое решение. Следовательно, неоднородная система уравнений имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

Описанный метод позволяет при любом фиксированном n эффективно построить решение задачи (1)–(3).

Пусть теперь функции $\frac{d^j f_k}{d\theta^j}(t)$ $(j = 0, \ldots, n-1-k)$ непрерывны по t $(t = e^{i\theta})$. Тогда можно проверить, что решение, полученное вышеуказанным путем, является решением и в этом случае. Отсюда и из леммы 3 следует, что теорема 1 справедлива и в этом случае.

Abstract. The paper demonstrates the existence and uniqueness of solution of the Dirichlet problem in the exterior of a disc, in a class of functions with the growth rate r^{n-1} as $r \to \infty$ $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$. An effective solution method is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов, Математический анализ, II спец. курс, Наука, Москва, 1965.
2. И. Н. Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, Наука, Москва–Ленинград, 1948.
3. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Наука, Москва, 1973.

Поступила 15 сентября 2006