Известия НАН Армении. Математика, 41, № 5, 2006, 39–52

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ КОМПАКТНЫХ ГРУПП ЛИ

А. Г. Сергеев

Математический институт им. В. А. Стеклова, РАН, Москва
E-mail : sergeev@mi.ras.ru

Резюме. Изучаются гармонические отображения римановых поверхностей M в пространства петель ΩG компактных групп G с помощью твисторного подхода. Гармонические отображения в пространства петель представляют особый интерес ввиду их связи с решениями уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе изучаются гармонические отображения римановых поверхностей M в пространства петель ΩG компактных групп Ли G. Интерес к таким отображениям объясняется результатом Атьи [1], утверждающим, что пространство модулей G-инстантов на $\mathbb{R}^4$ можно отождествить с пространством центрированных голоморфных отображений римановой сферы $\mathbb{CP}^1$ в пространство петель ΩG. В соответствии с этим утверждением, естественно предположить, что пространство модулей G-полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ можно аналогичным образом отождествить с пространством центрированных гармонических отображений $\mathbb{CP}^1 \longmapsto \Omega G$.

Для исследования гармонических отображений римановых поверхностей в пространства петель, мы пользуемся твисторным подходом. Главная идея этого подхода (применительно к рассматриваемой задаче) состоит в том, чтобы построить

При подготовке этой работы автор пользовался частичной поддержкой грантов РФФИ 04-01-00236, 02-02-04002, программой поддержки ведущих научных школ грант НШ-1542.2003.1 и научной программы "Нелинейная динамика" Президиума РАН.

для заданного риманового многообразия N так называемое твисторное расслоение $\pi : Z \longmapsto N$ с почти комплексным многообразием Z, обладающее следующим свойством : для любого псевдоголоморфного отображения $\psi : M \longmapsto Z$ произвольной римановой поверхности M в твисторное пространство Z, его проекция $\pi \circ \psi : M \longmapsto N$ на многообразие N является гармоническим отображением. Тем самым, можно сказать, что твисторный подход позволяет свести исходную "вещественную" задачу описания гармонических отображений римановых поверхностей M в заданное риманово многообразие N, к "комплексной" задаче описания псевдоголоморфных отображений из M в почти комплексное многообразие Z.

Обзор общей теории твисторных пространств можно найти в [5] (см. также [10]).

В данной работе нас интересует специальный класс римановых многообразий N, образуемый грассмановыми многообразиями $N = G_r(\mathbb{C}^d)$. В этом случае роль твисторного расслоения $\pi : Z \longmapsto N$ играют однородные флаговые расслоения $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$. При этом гармонические отображения $\varphi : M \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$ возникают как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ (относительно почти комплексной структуры на пространстве флагов $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$).

Для того, чтобы воспользоваться твисторным подходом для описания гармонических отображений $\varphi : M \longmapsto \Omega G$ в случае бесконечномерного многообразия петель, мы вкладываем ΩG изометрически в бесконечномерный грассманиан $Gr_{HS}(H)$ некоторого комплексного гильбертова пространства H. Указанный грассманиан является несвязным объединением грассманианов $G_r(H)$ виртуальной размерности r. Для каждого из грассманианов $G_r(H)$ по аналогии с конечномерной ситуацией, определяются виртуальные флаговые расслоения $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H) \longmapsto G_r(H)$. Пользуясь этими расслоениями, мы можем построить гармонические отображения $\varphi : M \longmapsto \Omega G$ как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$.

Коротко о содержании статьи. В §2 мы напоминаем основные свойства гармонических отображений римановых многообразий. В §3 объясняется общая идея твисторного подхода к исследованию гармонических отображений, которая конкретизируется затем (§4) в специальном случае грассмановых многообразий. В §5 мы напоминаем определение пространства петель ΩG и теорему Атьи, устанавливающую взаимно–однозначное соответствие между G-инстантонами на $\mathbb{R}^4$ и голоморфными сферами в ΩG. В §6 вводится грассманиан Гильберта–Шмидта $Gr_{HS}(H)$ и грассманианы $G_r(H)$ виртуальной размерности r. Здесь же строится изометрическое вложение пространства петель ΩG в грассманиан $Gr_{HS}(H)$, которое позволяет считать гармонические отображения $\varphi : M \longmapsto \Omega G$ принимающими значения в одном из грассманианов $G_r(H)$. Гармонические отображения $\varphi : M \longmapsto G_r(H)$ можно строить как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$ на $G_r(H)$.

§2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ : ОБЩИЕ СВОЙСТВА

Пусть $\varphi : (M, g) \longmapsto (N, h)$ есть гладкое отображение риманового многообразия M, наделённого римановой метрикой g, в риманово многообразие N с римановой метрикой h. Зададим энергию отображения φ интегралом Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |d\varphi(p)|^2 \operatorname{vol}_g. \tag{1}$$

Норму дифференциала в подынтегральном выражении можно вычислить в локальных координатах следующим образом. Обозначим локальные координаты в точке $p \in M$ через (x^i), а локальные координаты в точке $q = \varphi(p) \in N$ через (u^α). Тогда

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta} g^{ij}\,\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j}\,h_{\alpha\beta},$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ суть компоненты отображения φ, (g_{ij}) и $(h_{\alpha\beta})$ метрические тензоры многообразий M и N соответственно, (g^{ij}) – компоненты матрицы, обратной к (g_{ij}), а vol_g – элемент объёма метрики g.

Определение 1. Гладкое отображение $\varphi : M \longmapsto N$ называется **гармоническим**, если оно является экстремальным для функционала энергии $E(\varphi)$ по отношению к произвольным гладким вариациям φ с компактным носителем.

Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала $E(\varphi)$ имеет в введённых выше локальных координатах (x^i) на M и (u^α) на N следующую форму :

$$\Delta_M\varphi^\gamma + \sum_{i,j} g^{ij}\sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi)\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x_j} = 0, \tag{2}$$

где Δ_M – стандартный оператор Лапласа–Бельтрами на M, задаваемый формулой

$$\Delta_M\varphi^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij}\left\{\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_k {}^M\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x_k}\right\},$$

где ${}^M\Gamma^k_{ij}$ обозначает символ Кристоффеля связности Леви–Чивита ${}^M\nabla$ многообразия M, соответственно, ${}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ есть символ Кристоффеля связности Леви–Чивита ${}^N\nabla$ многообразия N.

В частном случае $N = \mathbb{R}^n$, уравнение (2) превращается в линейное уравнение Лапласа–Бельтрами $\Delta_M\varphi^\gamma = 0$ для компонент φ^γ, $\gamma = 1, \ldots, n$, отображения φ.

Первый нетривиальный пример нелинейного гармонического уравнения возникает в так называемой SO(3)-модели, происходящей из теории ферромагнетизма. В этом примере, рассматриваются гладкие отображения $\varphi : \mathbb{R}^2 \longmapsto S^2$ с конечной энергией $E(\varphi) < \infty$. Чтобы обеспечить условие конечности энергии, такие отображения должны стабилизироваться на бесконечности, т.е. $\varphi(x) \to \varphi_0$ при $|x| \to \infty$. Следовательно, рассматриваемые отображения φ продолжаются до отображений $\varphi : S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \infty \longmapsto S^2$. Последние, как известно, обладают топологическим инвариантом, называемым степенью отображения :

$$\deg\varphi = \int_{S^2} \varphi^* \mathrm{vol},$$

где "vol" обозначает нормированную форму объёма на сфере S^2.

С учётом этого, мы можем уточнить задачу об описании гармонических отображений в рассматриваемом случае следующим образом : **описать критические точки функционала энергии $E(\varphi)$ в заданном топологическом классе, т.е. при фиксированном значении степени $\deg\varphi$.**

Обозначим через $z = x_1 + ix_2$ комплексную координату на плоскости $\mathbb{R}^2$, а через w комплексную координату в образе $S^2 \setminus \{\infty\}$, задаваемую стереографической проекцией. В этих координатах энергия отображения $\varphi = w(z)$ будет задаваться следующей формулой

$$E(\varphi) = 2 \int\limits_{\mathbf{C}} \frac{|\partial_z w|^2 + |\partial_{\bar z} w|^2}{(1+|w|^2)^2} |dz \wedge d\bar z|, \tag{3}$$

причём степень отображения φ вычисляется по формуле

$$\deg\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{C}} \frac{|\partial_z w|^2 - |\partial_{\bar z} w|^2}{(1+|w|^2)^2} |dz \wedge d\bar z|. \tag{4}$$

Сравнивая две последние формулы, мы получаем оценку энергии снизу :

$$E(\varphi) \geq 4\pi |\deg\varphi|.$$

Из неё вытекает, что минимум энергии $E(\varphi)$ при заданной степени $k = \deg\varphi$ достигается на голоморфных функциях $w = \varphi(z)$, если $k \geq 0$, и на антиголоморфных функциях $w = \varphi(\bar z)$, если $k \leq 0$.

Используя SO(3)-инвариантность задачи, зафиксируем асимптотическое значение $\varphi_0 = 1$. Тогда отображения $w = \varphi(z)$ минимизирующие энергию $E(\varphi)$ в классе $k \geq 0$ будут записываться в виде

$$w = \varphi(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - a_j}{z - b_j},$$

где a_j, b_j – произвольные комплексные числа. В частности, при фиксированном k пространство минимумов параметризуется $4k+2$ вещественными параметрами.

Если сравнивать построенные решения SO(3)-модели с решениями уравнений дуальности Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$, то можно сказать, что голоморфные (или антиголоморфные) отображения $\varphi : \mathbb{R}^2 \cup \infty \longmapsto S^2$ отвечают инстантонным (или антиинстантонным) решениям уравнений дуальности. Ниже мы увидим, что указанное соответствие между гармоническими отображениями и решениями уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ имеет, на самом деле, гораздо более глубокий смысл.

Можно показать, что в рассмотренном случае SO(3)-модели функционал энергии $E(\varphi)$ не имеет других критических точек, за исключением локальных минимумов. Другими словами, не существует других гармонических отображений $\varphi : \mathbb{R}^2 \cup \infty \longmapsto S^2$ помимо голоморфных и антиголоморфных.

Заметим, что в случае гармонических отображений между общими комплексными многообразиями, голоморфные и антиголоморфные отображения будут также задавать локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$. Более подробно, предположим, что наше риманово многообразие (M, g) наделено комплексной (или почти комплексной) структурой ${}^M J$, совместимой с римановой метрикой g, и, аналогично, многообразие (N, h) имеет комплексную (или почти комплексную) структуру ${}^N J$, совместимую с римановой метрикой h.

Определение 2. Гладкое отображение $\varphi : M \longmapsto N$ называется **голоморфным (или псевдоголоморфным)**, если касательное отображение $\varphi_* : TM \to TN$ коммутирует с комплексной (или почти комплексной) структурой на M и N, т.е.

$$\varphi_* \circ {}^M J = {}^N J \circ \varphi_*.$$

Гладкое отображение $\varphi : M \longmapsto N$ называется **антиголоморфным (или псевдо-антиголоморфным)**, если $\varphi_* : TM \to TN$ антикоммутирует с комплексой (или почти комплексной) структурой на M и N.

Обобщая наблюдение, сделанное нами в случае SO(3)-модели, можно показать, что для кэлеровых (или почти кэлеровых) многообразий голоморфные и антиголоморфные отображения $\varphi : M \longmapsto N$ всегда реализуют локальные минимумы функционала энергии $E(\varphi)$. Однако, в общем случае, у функционала $E(\varphi)$ имеются и другие критические точки, т.е. неминимальные гармонические отображения.

§3. ТВИСТОРНЫЙ ПОДХОД

Воспользуемся для описания гармонических отображений $\varphi : M \longmapsto N$ римановых поверхностей в римановы многообразия. Напомним формулировку так называемой **твисторной программы Пенроуза :**

> Построить для заданного риманова многообразия N **твисторное расслоение** $\pi : Z \longmapsto N$, где Z – почти комплексное многообразие, называемое **твисторным пространством**, для которого имеется взаимно–однозначное соответствие между объектами римановой геометрии на N и объектами голоморфной геометрии на Z.

Таким образом, твисторный подход позволяет исследовать вещественную геометрию риманового многообразия N через комплексную геометрию его твисторного пространства.

Первая конструкция твисторного расслоения (чётномерного) риманова многообразия N была предложена в работе Атьи–Хинчина–Зингера [2]. В качестве твисторного пространства Z многообразия N было предложено расслоение комплексных структур на N, совместимых с римановой метрикой h. Указанное пространство обладает естественной почти комплексной структурой $\mathcal{J}^1$, которую мы называем **AHS-структурой** (подробное описание AHS-структуры можно найти в [2] и [5]). Ниже в §4 мы приведём другую конструкцию твисторного расслоения в специальном случае грассмановых многообразий.

Пусть $(Z, \mathcal{J}^1)$ есть твисторное пространство нашего (чётномерного) многообразия (N, h), снабжённое почти комплексной AHS-структурой $\mathcal{J}^1$. Если программа Пенроуза применима к рассматриваемой нами задаче, мы вправе ожидать, что гармонические отображения $\varphi : M \longmapsto N$ произвольной римановой поверхности M в наше многообразие N, должны возникать как проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \longmapsto (Z, \mathcal{J}^1)$. Однако это не вполне верно. Проекции псевдоголоморфных отображений $\psi : M \longmapsto (Z, \mathcal{J}^1)$ действительно удовлетворяют некоторым ультрагиперболическим дифференциальным уравнениям второго порядка на N, т.е. гармонические уравнения с "неправильной" структурой. Следовательно, для того, чтобы построить гармонические отображения с помощью твисторного подхода, мы должны заменить AHS-структуру $\mathcal{J}^1$ вдоль некоторых касательных направлений к Z обратной почти комплексной структурой $-\mathcal{J}^1$. Более точно, мы вводим новую почти комплексную структуру $\mathcal{J}^2$ на Z, называемую **ES-структурой** (см. [7]) :

$$\mathcal{J}^2 = \begin{cases} -\mathcal{J}^1 & \text{вдоль вертикальных} \quad \pi\text{–направлений,} \\ \mathcal{J}^1 & \text{вдоль горизонтальных} \quad \pi\text{–направлений.} \end{cases}$$

Теперь мы можем дать более формальное определение твисторного расслоения.

Определение 3. Гладкое расслоение $\pi : Z \longmapsto N$ с почти комплексным многообразием $(Z, \mathcal{J}^2)$ называется **твисторным расслоением** риманова многообразия N, если проекция $\varphi := \pi \circ \psi$ любого псевдоголоморфного отображения $\psi : M \longmapsto Z$ произвольной римановой поверхности M в Z является гармоническим отображением $\varphi : M \longmapsto N$.

Заметим, что почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ на твисторном пространстве Z, как правило, не интегрируемы. Более точно, **AHS-структура $\mathcal{J}^1$ интегрируема тогда и только тогда, когда N конформно плоско, тогда как ES-структура $\mathcal{J}^2$ никогда не интегрируема.** Этот результат с первого взгляда выглядит разочаровывающим, поскольку не интегрируемые почти комплексные структуры могут быть очень плохими. Например, они могут вообще не иметь непостоянных голоморфных функций. Однако наше преимущество состоит в том, что в рассматриваемой задаче мы имеем дело не с голоморфными функциями (т.е. голоморфными отображениями $f : Z \longmapsto \mathbb{C}$ из твисторного пространства Z) но с двойственным объектом : голоморфными отображениями $\psi : M \longmapsto Z$ римановой поверхности M в наше многообразие Z.

Такое отображение голоморфно относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на Z, если оно удовлетворяет $\bar{\partial}_J$-уравнению на M, т.е. уравнению Коши–Римана относительно почти комплексной структуры $J := \psi^*(\mathcal{J}^2)$, индуцированной на M псевдоголоморфным отображением ψ. Структура J уже интегрируема на M (как и любая почти комплексная структура на римановой поверхности), и, следовательно, свойства интегрируемости почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$ на твисторном пространстве Z не играют существенной роли в изучаемой нами проблеме.

§4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ГРАССМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Обратимся теперь к специальному классу римановых многообразий, представляемому грассмановыми многообразиями, и дадим в этом случае иную (и вполне явную) конструкцию твисторных расслоений, где роль твисторных пространств будут играть флаговые многообразия.

Для определения флаговых многообразий в $\mathbb{C}^d$, фиксируем разложение числа $d = r_1 + \ldots + r_n$ в сумму натуральных чисел и положим $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$.

Определение 4. Флаговое многообразие $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ типа $\mathbf{r}$ в $\mathbb{C}^d$ состоит из наборов $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ попарно ортогональных линейных подпространств E_i в $\mathbb{C}^d$ размерности r_i таких, что $\mathbb{C}^d = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$.

В частности, для $\mathbf{r} = (r, d-r)$ флаговое многообразие

$$\mathcal{F}_{(r,d-r)}(\mathbb{C}^d) = \{\mathcal{E} = (E, E^{\perp}) : \dim E = r\} = G_r(\mathbb{C}^d)$$

совпадает с грассмановым многообразием r-мерных подпространств в $\mathbb{C}^d$.
Флаговое многообразие $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ допускает следующее представление в виде однородного пространства :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = \mathrm{U}(d)/\mathrm{U}(r_1) \times \ldots \times \mathrm{U}(r_n).$$

Имеется также другое, комплексное представление многообразия $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ в виде однородного пространства комплексной группы :

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = \mathrm{GL}(d, \mathbb{C})/\mathcal{P}_{\mathbf{r}},$$

где $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ – параболическая подгруппа блочных верхне-треугольных матриц с блоками размерностей $r_i \times r_i$ на диагонали.
Из указанных представлений вытекают следующие свойства :

(i) $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ обладает естественной $U(d)$-инвариантной комплексной структурой, которую мы обозначаем снова через $\mathcal{J}^1$,

(ii) $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ является компактным кэлеровым многообразием.

Твисторные расслоения над грассмановыми многообразиями параметризуются упорядоченными подмножествами в $\{1, \ldots, n\}$. Фиксируем такое подмножество σ, а также тип флага $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$ и положим $r := \sum_{i \in \sigma} r_i$. По этим данным построим однородное расслоение

$$\pi = \pi_\sigma \colon \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = \frac{U(d)}{U(r_1) \times \ldots \times U(r_n)} \longmapsto \frac{U(d)}{U(r) \times U(d-r)} = G_r(\mathbb{C}^d),$$

сопоставляя флагу $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ подпространство $E := \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$.
Для построенного однородного расслоения имеется естественное однородное разложение комплексифицированного касательного расслоения $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ в прямую сумму вертикального и горизонтального подрасслоений. Пользуясь этим разложением, можно построить $U(d)$-инвариантную почти комплексную структуру $\mathcal{J}^2$ на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$, исходя из начальной комплексной структуры $\mathcal{J}^1$ на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$, точно также, как в предыдущем параграфе.

Теорема 1 (Берстол–Саламон [4]). *Построенное флаговое расслоение*

$$\pi_\sigma : (\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d), \mathcal{J}^2) \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$$

является твисторным, т.е. его проекция $\varphi := \pi_\sigma \circ \psi : M \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$ является гармоническим отображением для любого $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi : M \longmapsto \mathcal{F}$.

Более того, Берстол [3] доказал, что в случае $M = \mathbb{CP}^1$ верно также обратное утверждение, а именно : **любое гармоническое отображение $\varphi : \mathbb{CP}^1 \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$ может быть получено в виде проекции некоторого $\mathcal{J}^2$-голоморфного отображения $\psi : \mathbb{CP}^1 \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ относительно какого-либо твисторного расслоения $\pi_\sigma : \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) \longmapsto G_r(\mathbb{C}^d)$.** Таким образом, задача описания гармонических сфер в грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^d)$ полностью сводится к задаче описания $\mathcal{J}^2$-голоморфных сфер в флаговых многообразиях $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$. Последняя проблема была решена Вудом в [11] (см. также [4]). Хотя решение Вуда является технически сложным, главную его идею можно пояснить следующим образом.

Любое гладкое отображение $\psi : M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ порождает в каждое точке $p \in M$ ортогональное разложение

$$\mathbb{C}^d = E_1(p) \oplus \ldots \oplus E_n(p)$$

индуцированное из $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ отображением ψ. Иными словами, имеется ортогональное разложение тривиального расслоения $M \times \mathbb{C}^d$ в сумму подрасслоений $E_1, \ldots, E_n$. Если исходное отображение ψ было $\mathcal{J}^1$-голоморфным, т.е. голоморфным относительно канонической комплексной структуры на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$, то подрасслоения $E_1, \ldots, E_n$ будут голоморфны относительно индуцированной комплексной структуры $J_\psi := \psi^*(\mathcal{J}^1)$ на M.

Идея Вуда состоит в том, чтобы строить $\mathcal{J}^2$-голоморфные отображения $M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$, перестраивая $\mathcal{J}^1$-голоморфные отображения $M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$. Исходя из определения почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, можно догадаться, что указанная перестройка должна состоять в замене некоторых голоморфных подрасслоений E_i антиголоморфными подрасслоениями $\bar{E}_i$ (и обратной процедуре для ортогональных дополнений $E_i^\perp$).

§5. ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ И ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Обратимся теперь к бесконечномерным римановым многообразиям N, точнее, рассмотрим в качестве N пространство петель ΩG компактной группы Ли G. В конце данного параграфа мы поясним, почему этот случай представляет для нас особый интерес.

Обозначим через $LG = C^\infty(S^1, G)$ группу петель группы G, т.е. пространство гладких отображений $S^1 \longmapsto G$, где S^1 отождествляется с единичной окружностью в $\mathbb{C}$. **Пространство петель** ΩG (или, что то же самое, пространство центрированных петель) группы G есть однородное пространство (правых смежных классов) группы LG вида

$$\Omega G = LG/G, \tag{5}$$

где группа G в знаменателе отождествляется с подгруппой постоянных отображений $S^1 \longmapsto g_0 \in G$ в LG.

Группа петель LG действует на ΩG левыми сдвигами. Обозначим через o начало в ΩG, представленное классом постоянных отображений $o := [G]$. Касательное пространство к ΩG в начале o отождествляется с пространством $\Omega\mathfrak{g} = L\mathfrak{g}/\mathfrak{g}$.

Пространство петель ΩG имеет естественную симплектическую структуру, инвариантную относительно действия группы петель LG на ΩG. Ввиду инвариантности, достаточно определить её сужение на $T_o(\Omega G) = \Omega\mathfrak{g}$. Для этого фиксируем инвариантное скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и рассмотрим 2-форму ω на $L\mathfrak{g}$ вида

$$\omega(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \langle \xi(\theta), \eta'(\theta)\rangle\, d\theta, \qquad \xi,\eta \in L\mathfrak{g}.$$

Эта формула задаёт инвариантную замкнутую 2-форму на LG, которая порождает инвариантную **симплектическую структуру** на ΩG.

Инвариантная **комплексная структура** на ΩG индуцируется комплексным представлением пространства петель $\Omega G = LG/G$ в виде однородного пространства комплексной группы петель $LG^{\mathbb{C}} = C^\infty(S^1, G^{\mathbb{C}})$, где $G^{\mathbb{C}}$ – комплексификация группы Ли G. Это представление имеет вид (см. [8], а также [9])

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}}/L^+G^{\mathbb{C}}, \tag{6}$$

где $L^+G^{\mathbb{C}} = \mathrm{Hol}(\Delta, G^{\mathbb{C}})$ – подгруппа $LG^{\mathbb{C}}$, состоящая из отображений $S^1 \longmapsto G^{\mathbb{C}}$, которые допускают гладкое продолжение до голоморфных отображений $\Delta := \{|z| < 1\} \longmapsto G^{\mathbb{C}}$ единичного круга.

Введённые симплектическая и комплексная структуры на ΩG совместимы в том смысле, что $\omega(\mathcal{J}^1\xi, \mathcal{J}^1\eta) = \omega(\xi,\eta)$ для всех $\xi,\eta \in T_o(\Omega G)$ и симметрическая форма $g^1(\xi,\eta) := \omega(\xi, \mathcal{J}^1\eta)$ на $T_o(\Omega G) \times T_o(\Omega G)$ положительно определена. Эта симметрическая форма продолжается до инвариантной римановой метрики g^1 на ΩG. Следовательно, ΩG является **кэлеровым многообразием Фреше**, наделённым кэлеровой метрикой g^1.

Нашей целью является изучение гармонических отображений компактных римановых поверхностей M в пространство петель ΩG. Мотивацией для этого исследования служит теорема Атьи (см. [1]), утверждающая, что имеется **взаимнооднозначное соответствие между пространством модулей G-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ и пространством центрированных голоморфных отображений $f : \mathbb{CP}^1 \longmapsto \Omega G$, переводящих ∞ в начало $o \in \Omega G$.**

Исходя из теоремы Атьи, естественно предположить, что имеется также **взаимнооднозначное соответствие между пространством центрированных гармонических отображений $h : \mathbb{CP}^1 \longmapsto \Omega G$ и пространством модулей решений G-уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$.**

§6. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВА ПЕТЕЛЬ

Мы собираемся изучать гармонические отображения в пространства петель с помощью изометрического вложения ΩG в бесконечномерное грассманово многообразие $Gr_{HS}(H)$, называемое иначе грассманианом Гильберта–Шмидта. Начнём с его определения, копирующего стандартное определение конечномерного грассманиана $G_r(\mathbb{C}^d)$.

Пусть H – комплексное гильбертово пространство, реализованное в виде пространства $L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ квадратично интегрируемых комплекснозначных функций с нулевым средним по окружности S^1 (или его векторного аналога $L^2_0(S^1, \mathbb{C}^d)$).

Предположим, что H наделено **поляризацией**, т.е. разложением

$$H = H_+ \oplus H_- \tag{7}$$

в прямую ортогональную сумму бесконечномерных замкнутых подпространств. В рассматриваемом случае $H = L^2_0(S^1, \mathbb{C})$ в качестве таких подпространств можно взять

$$H_\pm = \left\{ \gamma \in H : \gamma(z) = \sum_{\pm k > 0} \gamma_k z^k \right\}.$$

Любой ограниченный линейный оператор $A \in L(H)$ имеет относительно поляризации (7) блочное представление вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathrm{GL}(H)$ группу линейных ограниченных операторов на H, имеющих ограниченный обратный, и определим группу **Гильберта–Шмидта** $GL_{\mathrm{HS}}(H)$, состоящую из операторов $A \in \mathrm{GL}(H)$, у которых вне-диагональные члены b и c являются операторами Гильберта–Шмидта (коротко, HS-операторами). Другими словами, группа $GL_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из операторов $A \in \mathrm{GL}(H)$, у которых вне-диагональные члены b и c "малы", по сравнению с диагональными членами a и d. Обозначим также через $U_{\mathrm{HS}}(H)$ пересечение $GL_{\mathrm{HS}}(H)$ с группой $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов в H.

Определение 5. Грассманиан Гильберта–Шмидта $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из замкнутых подпространств $W \subset H$ таких, что ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+ : W \longmapsto H_+$ является фредгольмовым оператором, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_- : W \longmapsto H_-$ является оператором Гильберта–Шмидта. Эквивалентно, подпространство $W \in Gr_{HS}(H)$, если W совпадает с образом линейного оператора $w : H_+ \longmapsto H$ такого, что оператор $w_+ := \mathrm{pr}_+ \circ w$ фредгольмов, а $w_- := \mathrm{pr}_- \circ w$ – оператор Гильберта–Шмидта.

Грассманиан $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$ допускает однородное представление вида

$$Gr_{\mathrm{HS}}(H) = U_{\mathrm{HS}}(H) / \mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-),$$

из которого вытекает, что $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$ является **кэлеровым гильбертовым многообразием.**

Многообразие $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из счётного числа связных компонент, нумеруемых индексом фредгольмова оператора w_+, где $w : H_+ \longmapsto H$ – линейный оператор, ассоциированный с подпространством $W \in Gr_{\mathrm{HS}}(H)$. Будем говорить, что подпространство W имеет **виртуальную размерность** d, если индекс оператора w_+ равен d. Обозначим через $G_d(H)$ компоненту $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$, состоящую из подпространств W виртуальной размерности d. Тогда $Gr_{HS}(H)$ является несвязным объединением компонент $G_d(H)$. Поэтому изучение гармонических отображений римановых поверхностей в $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$ сводится к исследованию гармонических отображений в грассманианы $G_d(H)$ виртуальной размерности d, которое можно проводить также, как в случае конечномерного грассманова многообразия $G_r(\mathbb{C}^d)$.

А именно, для любого разложения $d = r_1 + \ldots + r_n$, где r_i – целые числа, определим соответствующее ему **виртуальное флаговое многообразие** $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$ типа $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$, состоящее из наборов $\mathcal{W} = (W_1, \ldots, W_n)$ попарно ортогональных подпространств $W_i \subset H$ виртуальной размерности r_i. Далее, для любого упорядоченного подмножества $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ положим $r := \sum_{i\in\sigma} r_i$ и построим однородное флаговое расслоение $\pi \colon \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H) \longmapsto G_r(H)$, сопоставляя виртуальному флагу $\mathcal{W} = (W_1, \ldots, W_n)$ подпространство $W = \bigoplus W_i$. Также как в конечномерном случае, введём почти комплексные структуры $\mathcal{J}^1$ и $\mathcal{J}^2$ на многообразии $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$. Следующее утверждение аналогично теореме Берстола–Саламона в конечномерной ситуации.

Теорема 2. *Однородное расслоение* $\pi : (\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H), \mathcal{J}^2) \longmapsto G_r(H)$ *является твисторным, т.е. для любого* $\mathcal{J}^2$*-голоморфного отображения* $\psi : M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$ *его проекция* $\varphi := \pi \circ \psi : M \longmapsto G_r(H)$ *есть гармоническое отображение.*

Пользуясь этой теоремой, можно строить гармонические отображения $M \longmapsto G_r(H)$, проектируя $\mathcal{J}^2$-голоморфные отображения $M \longmapsto \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$ на $G_r(H)$.

Построим теперь изометрическое вложение пространства петель ΩG в грассманиан Гильберта–Шмидта $Gr_{HS}(H)$, упомянутое в начале параграфа. Предположим, что G есть матричная группа, т.е. G представлена в виде подгруппы унитарной группы $U(n)$ при некотором n. Изометрическое вложение $LG \longmapsto U_{\mathrm{HS}}(H)$ задаётся отображением

$$\gamma \in LG = C^\infty(S^1, G) \longmapsto M_\gamma \in U_{\mathrm{HS}}(H),$$

где оператор умножения M_γ определяется посредством

$$f \in H = L_0^2(S^1, \mathbb{C}^n) \longmapsto (M_\gamma f)(z) := \gamma(z) f(z) \quad \text{для} \quad z \in S^1.$$

Легко проверить, что $M_\gamma \in U_{\mathrm{HS}}(H)$, если петля γ является гладкой (см. [8]).

Построенное вложение группы петель LG в $U_{\mathrm{HS}}(H)$ индуцирует изометрическое вложение $\Omega G \longmapsto Gr_{HS}(H)$. Следовательно, мы можем считать, что гармонические отображения $M \longmapsto \Omega G$ принимают значения в $Gr_{\mathrm{HS}}(H)$. Это сводит исследование гармонических отображений $M \longmapsto \Omega G$ к изучению гармонических отображений $M \longmapsto \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, т.е. к задаче, рассмотренной ранее в начале этого параграфа.

§7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предположим, что гипотеза о полях Янга–Миллса, сформулированная нами в §5, доказана, т.е. имеется взаимнооднозначное соответствие между пространством модулей G-полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ и пространством центрированных гармонических сфер в пространстве петель ΩG. Допустим также, что с помощью твисторного подхода мы можем построить произвольную гармоническую сферу в грассманиане $Gr_{HS}(H)$ в виде проекции некоторой $\mathcal{J}^2$-голоморфной сферы в одном из виртуальных флаговых многообразиях $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(H)$. Что может дать наша конструкция для описания полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$? Похоже, что в этом случае мы получаем процедуру, позволяющую строить произвольные поля Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ из инстантонов и анти-инстантонов с помощью конечного числа перестроек типа Вуда.

Abstract. The twistor approach is used for the study of mappings of Riemann surfaces M into loop spaces ΩG of compact Lie groups G. The harmonic mappings into the loop spaces are of special interest due to connections with the solutions of the Yang–Mills equation in $\mathbb{R}^4$.

REFERENCES

1. M. F. Atiayh, "Instantons in two and four dimensions", Comm. Math. Phys., vol. 93, pp. 437 – 451, 1984.
2. M. F. Atiayh, N. J. Hitchin, I. M. Singer, "Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry", Proc. Roy. Soc. London, vol. 362, pp. 425 – 461, 1978.
3. F. E. Burstall, "A twistor description of harmonic maps of a 2-sphere into a Grassmannian", Math. Ann., vol. 274, pp. 61 – 74, 1986.
4. F. E. Burstall, S. Salamon, "Tournaments, flags and harmonic maps", Math. Ann., vol. 277, pp. 249 – 265, 1987.
5. Й. Давидов, А. Г. Сергеев, "Твисторные пространства и гармонические отображения", Успехи матем. наук, том 48, № 3, стр. 3 – 96, 1993.
6. S. K. Donaldson, "Instantons and geometric invariant theory", Comm. Math. Phys., vol. 93, pp. 453 – 460, 1984.
7. J. Eells, S. Salamon, "Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds", Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, vol. 12, pp. 589 – 640, 1985.
8. A. Pressley, G. Segal, Loop Groups, Clarendon Press, Oxford, 1986.
9. А. Г. Сергеев, Кэлерова геометрия пространств петель, Московский центр непр. матем. образ., Москва, 2001.
10. А. Г. Сергеев, "Гармонические отображения в однородные римановы многообразия : твисторный подход", Успехи матем. наук, том 59, № 6, стр. 177 – 200, 2004.
11. J. C. Wood, "The explicit construction and parameterization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmannian", J. Reine Angew. Math., vol. 386, pp. 1 – 31, 1988.

Поступила 1 сентября 2006