Известия НАН Армении. Математика, 41, № 5, 2006, 18–27

КОЛЛЕКТИВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ИСТОЧНИКАМИ

Н. Б. Енгибарян

Институт математики НАН Армении

Резюме. Рассматривается одновременное марковское блуждание большого числа тождественных частиц в одночастичном фазовом пространстве Ω, при наличии их источников и потерь. Предполагается возможность бесконечного накопления частиц во всем пространстве, оставляя их количество локально ограниченным. Предложен один простой критерий существования σ-ограниченного равновесного распределения.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим марковский процесс (цепь Маркова) с пространством состояний Ω и дискретным временем $m = 0, 1, \ldots$ (см. [1]). Пусть S – совокупность большого числа тождественных частиц, одновременно совершающих блуждание по состояниям пространства Ω. Предполагается возможность наличия поглощающих состояний и источников. Описанный процесс мы назовём **коллективным марковским процессом** (КМП) или коллективным случайным блужданием.

В процессе КМП, со временем может произойти бесконечное накопление частиц в Ω в целом, оставляя их количество локально ограниченным. Такие ситуации возникают в теории переноса излучения, в кинетической теории газов и в других разделах физической кинетики (см. [2], [3]). Например, поле излучения в атмосфере, заполняющей полупространство $z \geq 0$, в случае консервативного рассеяния (см. [3]). Световые кванты, входящие в среду со стороны границы $z = 0$, совершают случайное блуждание (многократное рассеяние) и отражаются из среды с вероятностью 1. Тем не менее, при стационарном освещении среды, поле излучения имеет отличный от нуля предел при $z \to \infty$.

При больших концентрациях частиц могут играть роль нелинейные эффекты. Тогда закон случайного блуждания индивидуальной частицы в фазовом пространстве становится зависящим от созданного распределения частиц в Ω в данный момент времени. Решение задач КМП путём суммирования вероятностей, соответствующих исходов блуждания одной частицы, часто затруднительно, а иногда выглядит невозможным.

В настоящей работе делается попытка исследовать указанный круг вопросов в рамках одной модели случайных процессов, которую мы назовём **кинетическим** приближением. Это приближение близко по смыслу процедуре статистического усреднения в кинетической стадии эволюции многочастичных систем.

Приводится один простой критерий существования равновесного распределения частиц в Ω, в классе σ-ограниченных распределений.

§2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ И СУБСТОХАСТИЧЕСКИЕ ЯДРА

2.1. Пространства мер. Пусть (Ω, F) – пространство с σ-алгеброй F измеримых множеств (см. [1]). Обозначим через $A = A_F$ множество (σ-аддитивных) ограниченных мер ν на F, для которых $\nu(\Omega) < +\infty$. Через $A_\sigma \supset A$ обозначается σ-конечных мер, для которых существуют $B_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, такие что

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots, \quad \Omega = \cup B_k \quad \text{и} \quad \nu(B_k) < +\infty, \tag{2.1}$$

а через θ обозначается нулевая мера.

Введём в A_σ частичный порядок $\succ$ следующим образом : если $x, y \in A_\sigma$, то скажем, что $x \succ y$ если $x = y + z$, где $z \in A_\sigma$. Если $x, y \in A$, то и $z \in A$.

Пусть $E \supset A$ – банахово пространство зарядов с конечной вариацией

$$\|x\|_E = Var\, x = \sup_{B \in F} \big[|x(B)| + |x(\Omega \setminus B)|\big].$$

Тогда при $x \in A$ имеем

$$\|x\| = x(\Omega). \tag{2.2}$$

Если $(x_n) \subset A$, $x_n \uparrow$ и $x_n(\Omega) \leq c$, то

$$x_n \longrightarrow x \in A, \quad x(\Omega) \leq c. \tag{2.3}$$

Если $x_n \to x$ по вариации, то она сходится слабо, т.е.

$$\int_B f dx_n \longrightarrow \int_B f\, dx, \quad B \in F, \tag{2.4}$$

для любой функции f, ограниченной и измеримой относительно F.

2.2. Интегральный оператор со стохастическим или субстохастическим ядром. Пусть $w(B,\omega) \geq 0$ – стохастическое или субстохастическое ядро марковских переходных вероятностей, где $B \in F$ и $\omega \in \Omega$ (см. [1]). При фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $w(B,\omega)$ является мерой на F, причём

$$\lambda(\omega) := w(\Omega,\omega) \leq 1. \tag{2.5}$$

Кроме того, $w(B,\omega)$ является F-измеримой функцией от ω, $\forall B \in F$. Для простоты мы потребуем от $w(B,\omega)$, как функции от ω, принадлежность бэровскому классу.

Случай $\lambda(\omega) \equiv 1$ назовём консервативным. Обозначим

$$q = \sup \lambda(\omega) \ (\leq 1). \tag{2.6}$$

Случай $q < 1$ назовём равномерно диссипативным, случай $q = 1$ – критическим, а случай

$$\lambda(\omega) < 1, \quad \omega \in \Omega, \quad q = 1 \tag{2.7}$$

назовём сильно диссипативным.

Пусть W – оператор перехода с ядром w :

$$y(B) = (Wx)(B) = \int_\Omega w(B,t)\, dx(\omega). \tag{2.8}$$

В консервативном случае $\lambda(\omega) \equiv 1$ и мы имеем

$$(Wx)(\Omega) = x(\Omega). \tag{2.9}$$

Из (2.8) имеем

$$y(B) \leq \int_\Omega w(\Omega,\omega)\, dx(\omega) = \int_\Omega \lambda(\omega)\, dx(\omega) \leq qx(\Omega), \quad B \in F, \quad x \in A.$$

Следовательно, $||W||_E \leq q$. Нетрудно показать, что

$$||W||_E = q. \tag{2.10}$$

§3. КОЛЛЕКТИВНОЕ СЛУЧАЙНОЕ БЛУЖДАНИЕ

3.1. Линейная кинетическая (полустохастическая) модель КМП. Пусть система S состоит из большого числа тождественных частиц. Рассмотрим коллективный марковский процесс (КМП), т.е. независимое блуждание этих частиц в одночастичном фазовом пространстве Ω с дискретным временем. Блуждание индивидуальной частицы описывается ядром $w(B,\omega)$ марковских переходных вероятностей с дискретным временем. Если в некоторый момент времени $m \geq 0$ частица находится в точке $\omega \in \Omega$, то в момент времени $m+1$ она с вероятностью $w(B,\omega)$ окажется в множестве $B \in F$. У системы S предполагается наличие стационарных первичных источников.

В каждый момент времени мы будем приближённо описывать состояние системы S усреднённым распределением $x \in A$, где $x(B)$ – среднее количество частиц, находящихся в множестве $B \in F$. Меру x назовём состоянием системы S. Источники будут заданы конечной мерой $g \in A$.

Введём оператор эволюции φ, сопоставляющий состоянию x системы S в некоторый момент дискретного времени t её состояние $y = \varphi x$ в момент $t+1$. В рамках принятого нами приближения считается, что эволюция системы происходит в соответствии с исходным законом переходных вероятностей W, с учётом источников. Это означает, что $\varphi x(B) = g(B) + (Wx)(B)$, где оператор W определяется согласно (2.9).

Далее, через $x_n = x_n(B)$ обозначим состояние системы S в момент времени $n \geq 0$. Тогда, из определения φ мы приходим к эволюционному уравнению для задачи коллективного случайного блуждания : $x_{n+1} = \varphi x_n$ или

$$x_{n+1} = g + Wx_n \tag{3.1}$$

с начальным состоянием

$$x_0 = \alpha \in A. \tag{3.2}$$

Рекуррентное соотношение (3.1) определяет последовательность $(x_n) \subset A$. Выписывая (3.1) в раскрытом виде, получаем

$$x_{n+1}(B) = g(B) + \int_\Omega w(B,\omega)\, dx_n(\omega), \quad n = 0, 1, \dots \tag{3.3}$$

Заметим, что равновесные состояния процесса КМП инвариантны относительно оператора эволюции φ, т.е удовлетворяют уравнению $x = g + Wx$, или

$$x(B) = g(B) + \int_\Omega w(B,\omega)\, dx(\omega). \tag{3.4}$$

Принятую модель КМП мы назовём кинетической.

В случае $g = 0$, соотношениями вида (3.1) описывается вероятностное распределение одной частицы в момент времени n, если за α принять начальное распределение вероятностей (см. [1]). Отсюда следует, что при $g = 0$ статистическое усреднение эквивалентно усреднению по времени, т.е. тогда кинетическая модель является точной. При $g \neq 0$ такая эквивалентность вообще говоря, не имеет места, и кинетическая модель может носить приближённый характер.

Заметим, что уравнения вида (3.4) возникают в различных вопросах теории вероятностей. К такому уравнению с нулевым или ненулевым g сводится множество задач теории восстановления, теории марковских и полумарковских процессов, теории очередей, физической кинетики и др. (см. [1] – [6]). Нашей основной целью является нахождение общих простых критериев существования σ-ограниченных решений уравнения (3.4).

3.2. Случай существования плотности. Пусть ядро w, начальное состояние α и источник g обладают плотностью относительно некоторой меры $\mu \in A$, т.е.

$$w(B,\omega) = \int_B k(\tau,\omega)\, d\mu(\tau),$$

$$g(B) = \int_B h(\tau)\, d\mu(\tau), \quad h \in L(\Omega,\mu),$$

$$\alpha(B) = \int_B \eta(\tau)\, d\mu(\tau), \quad \eta \in L(\Omega,\mu).$$

Тогда, из (3.2), (3.3), индукцией по n, получаем

$$x_n(B) = \int_B f_n(\tau)\, d\mu(\tau),$$

где $0 \le f_n \in L(\Omega,\mu)$ определяются посредством :

$$f_{n+1}(\tau) = h(\tau) + \int_\Omega k(\tau,\omega) f_n(\omega)\, d\mu(\omega), \quad f_0 = \eta. \tag{3.5}$$

Уравнение (3.4) сводится к следующему интегральному уравнению, где искомая функция есть плотность f распределения x :

$$f(\tau) = h(\tau) + \int_\Omega k(\tau,\omega) f(\omega)\, d\mu(\omega), \tag{3.6}$$

$$x(B) = \int_B f(\tau)\, d\mu(\tau).$$

3.3. Учёт нелинейных эффектов. В отличие от предыдущих пунктов, переходные вероятности будем считать зависящими от конфигурации x системы S. Если в некоторый момент времени m система находится в макроскопическом состоянии x, то частица, находящаяся в точке $\omega \in \Omega$, в момент $m+1$ с вероятностью $w(B,\omega|x)$ окажется в множестве $B \in F$.

Эволюция системы описывается следующими рекуррентными соотношениями :

$$x_{n+1}(B) = g(B) + \int_\Omega w(B, \omega | x_n)\, dx_n(\omega) \tag{3.7}$$

и начальным состоянием (3.2). Равновесные состояния определяются из нелинейного уравнения :

$$x(B) = g(B) + \int_\Omega w(B, \omega | x)\, dx(\omega). \tag{3.8}$$

§4. СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССА (3.1)

4.1. Некоторые общие свойства. Если итерации x_n сходятся по вариации в A, то в (3.3) можно совершить предельный переход. Предел x будет решением уравнения (3.4). Согласно (2.10), в равномерно диссипативном случае $q < 1$ оператор φ, сжимающий в банаховом пространстве E зарядов. Следовательно, $x_n \to x \in A$ при любом начальном условии (3.2). Предел x будет единственным равновесным распределением в A.

Пусть

$$x_0 = \theta. \tag{4.1}$$

Тогда x_n возрастает, т.е. $\theta = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n \prec \cdots$. Если последовательность x_n ограничена по норме, т.е. $x_n(\Omega) \le c$, то эта последовательность сходится в A, а предел x будет минимальным решением уравнения равновесия (3.4).

В критическом случае $q = 1$ (см. (2.7)) решение x уравнения (3.4) может существовать как в A, так и в пространстве σ-конечных мер A_σ (см., например, [1] – [13]).

Однородное ($g = 0$) и неоднородное задачи одновременно могут иметь решения в A_σ. Построение этих решений предполагает продолжение оператора W из A в некоторый класс σ-конечных мер.

4.2. Пример. Элементарным примером задачи КМП, имеющей решение в A_σ, но не имеющей решение в A, может служить следующая задача коллективной игры "орёл-решка" с бесконечно богатым противником. Пусть в условиях классической задачи о разорении игрока в каждый момент дискретного времени n в игру вступает один игрок с единичным капиталом в один драм. Тогда уравнение равновесия (3.4) принимает вид

$$x = 1 + \frac{1}{2}x, \tag{4.2}$$

а (3.3) принимает вид

$$x^{(1)} = 1 + \frac{1}{2}x^{(2)}, \quad x^{(m)} = \frac{1}{2}x^{(m-1)} + \frac{1}{2}x^{(m+1)}, \quad m \ge 2,$$

где $x^{(m)}$ – математическое ожидание числа игроков с выигрышем в m драмов. Любой игрок с вероятностью 1 разоряется, однако минимальным положительным решением системы (4.2) является $x^{(m)} = 2$. Это решение не принадлежит A, поскольку ряд $\sum_m x^{(m)}$ расходится.

4.3. ***T*** **– сходимость.** Пусть $x_n(\Omega) \to \infty$ в процессе (3.2), (3.3). Рассмотрим вопрос сходимость x_n по подходящей топологии, к решению уравнения равновесия (3.4) в A_σ.

В определении (2.1) σ-конечных мер выбор покрытия $T = (B_k)$ множества Ω зависит от конкретной меры ν. Ниже мы выделим классы σ-конечным мер и зарядов, соответствующих одной и той же системе T.

Пусть $T = (B_k)$, $B_k \in F$, $k = 1, 2, \ldots$, – система множеств, удовлетворяющая условию $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, $\Omega = \cup B_k$. Обозначим через $F_T \subset F$ класс измеримых множеств $B \in F_T$ таких, что $B \subset B_k$ при некотором k. Далее, через $A(T) \subset A$ обозначим множество σ-конечных мер ν таких, что $\nu(B_k) < +\infty$, $k = 1, 2, \ldots$. Заметим, что класс $A(T)$ представляет собой пространство Фреше с топологией сходимости по вариации на множествах B_k.

Отметим, что если монотонная последовательность $x_n \in A$ ограничена на каждом множестве B_k, т.е.

$$x_n(B_k) \le c_k, \tag{4.3}$$

то

$$x_n \longrightarrow x \text{ в } A(T), \quad x_n(B) \le x(B) \le c_k, \quad B \subset B_k, \quad B \in F. \tag{4.4}$$

Будем говорить, что мера x является $A(T)$-решением уравнения равновесия (3.4), если $x(B) < \infty$, для всех $B \in F_T$ и имеет место равенство (3.4).

Лемма 4.1. *Пусть процесс x_n, определяемый согласно (3.2), (3.3), сходится в $A(T) : x_n \to x$. Тогда x является минимальным $A(T)$-решением уравнения (3.4).*

Доказательство. Если $B \subset B_k$ и $B \in F$, то с учётом (4.4) и (3.3), приходим к неравенству

$$g(B) + \int_\Omega w(B, \omega)\, dx_n(\omega) \le x(B).$$

Откуда следует сходимость интеграла $\int_\Omega w(B, \omega) dx_n(\omega)$ и неравенство

$$g(B) + \int_\Omega w(B, \omega)\, dx(\omega) \le x(B). \tag{4.5}$$

С другой стороны, из (3.3) имеем

$$x_{n+1}(B) \le g(B) + \int_\Omega w(B, \omega) dx(\omega)$$

что влечёт за собой неравенство, противоположное к (4.4). Лемма 4.1 доказана.
Имеет место следующая простая лемма сравнения, которую мы приводим без доказательства.

Лемма 4.2. *Пусть W_1 – оператор вида (2.8) с ядром $w_1 \geq w$ и пусть уравнение $y = g + W_1 y$ имеет $A(T)$-решение. Тогда уравнение (3.4) имеет минимальное $A(T)$-решение $x \prec y$.*

Следствие. Из существования некоторого $A(T)$-решения уравнения (3.4) следует существование его минимального $A(T)$-решения.

4.4. Теорема существования. Рассмотрим функцию потерь $\delta(\omega) = 1 - \lambda(\omega) \geq 0$, где λ определяется согласно (2.5). Рассмотрим процесс (3.3) с нулевым начальным состоянием (4.1). Очевидно, подставляя $B = \Omega$ в (3.3), получаем

$$x_{n+1}(\Omega) = g(\Omega) + \int_\Omega [1 - \delta(\omega)]\, dx_n(\omega), \quad n = 0, 1, \dots$$

Следовательно, имеем $x_{n+1}(\Omega) = g(\Omega) + x_n(\Omega) - \int_\Omega \delta(\omega) dx_n(\omega)$. С учётом $x_n(\Omega) \leq x_{n+1}(\Omega)$ приходим к основному неравенству.

Лемма 4.3. *Если последовательность x_n определяется по (3.3) и (4.1),* то

$$\int_\Omega \delta(\omega)\, dx_n(\omega) \leq g(\Omega). \tag{4.6}$$

В ряде случаев оценка (4.6) позволяет установить сходимость x_n по соответствующей T-топологии. Мы ограничимся рассмотрением случая сильно диссипативного оператора W. Тогда, согласно (2.7) имеем

$$\delta(\omega) > 0, \quad \inf \delta(\omega) = 0. \tag{4.7}$$

Введем следующие множества :

$$B_k = \left\{ \omega \in \Omega : \delta(\omega) \geq \frac{1}{k} \right\}. \tag{4.8}$$

Из измеримости функции δ следует, что $B_k \in F$, а из (4.7) следует, что $\cup B_k = \Omega$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть функция потерь δ удовлетворяет условиям (4.7) и $T = (B_k)$, где множества B_k определены согласно (4.8). Тогда процесс (3.3), (4.1) сходится к $A(T)$-решению уравнения равновесия (3.4). Причём имеет место неравенство*

$$\int_\Omega \delta(\omega) dx(\omega) \leq g(\Omega). \tag{4.9}$$

Доказательство. Используя неравенство (4.6), получаем

$$x_n(B_k) = \int_{B_k} dx_n \leq k \int_{B_k} \delta(\omega)\, dx_n(\omega) \leq kg(\Omega),$$

т.е. выполняется неравенство (4.3) при $c_k = kg(\Omega)$. Поэтому, (x_n) сходится в $A(T)$. Применяя Лемму 4.1 приходим к равенству (3.4). Совершая в (4.6) предельный переход, получаем (4.9). Теорема 4.1 доказана.

Следствие. Равновесное состояние x принадлежит весовому B пространству σ-конечных зарядов мер с конечной нормой $\|x\|_\delta = \int_\Omega \delta(\omega)\, |dx(\omega)| < \infty$.

Теорему 4.1 нетрудно перефразировать в терминах процесса (3.5). Теорема 4.1 легко распространяется на нелинейное уравнение (3.8). Приходим к следующей теореме.

Теорема 4.2. *Пусть переходной оператор W обладает следующими свойствами :*

a) оператор W – монотонный, т.е. если $x \succ y$, то $Wx \succ Wy$, $x, y \in A$,

b) имеет место неравенство $(Wx)(\Omega) \leq \int_\Omega \lambda(\omega) dx(\omega)$, $x \in A$, где функция λ удовлетворяет условиям (2.7). Тогда процесс (3.7), (4.1) сходится в $A(T)$ к решению уравнения равновесия (3.8), где $A(T)$ определяется как в Теореме 4.1.

4.5. О задачах переноса излучения. Теория переноса излучения изучает весьма сложный коллективный процесс многократного рассеяния, т.е. случайные блуждания большого числа частиц одного или нескольких сортов в области $G \subset \mathbb{R}^3$ с возможностью изменения направления их движения, энергии и других характеристик, а также - взаимного превращения частиц различных сортов. В рамках линейной теории переноса предполагаются, что частицы блуждают в фазовом пространстве независимо друг от друга, по закону, который соответствует некоторому марковскому процессу. Соответствующее фазовое пространство Ω является декартовым произведением $G \times G_1$, где G_1 – фазовое пространство направлений, энергий и др., первичные источники и потери могут присутствовать. Тогда стационарные уравнения переноса составляются в "кинетическом" приближении.

Практически, все линейные стационарные задачи переноса излучения допускают запись в виде интегрального уравнения (3.4) относительно искомой функции источника, с сильно диссипативным оператором. Интегральное уравнение (3.4) для той или иной конкретной задачи переноса может быть выведено либо из краевой задачи для соответствующего интегро-дифференциального уравнения переноса, либо непосредственно, с помощью уравнения Пайерлса (см. [13]). Теорема 4.1 приводит к довольно общей теореме существования для линейных стационарных задач переноса.

4.6. Некоторые замечания. Функция $\delta(\omega)$ учитывает только потери из состояния ω за один шаг. Теорема 4.1 может быть распространена на тот случай, когда условие сильной диссипативности (2.7) не выполняется, но частица с положительной вероятностью из любой точки может перейти в поглощающее множество за конечное число шагов, т.е. поглощающее множество достижимо из любого состояния.

Примером задачи "с источниками в бесконечности" является известная проблема Милна в теории переноса излучения (см. [3] – [5]). Примером течения частиц в бесконечность даёт решение уравнения восстановления на всей прямой или в многомерном пространстве (см. [1], [6], [10], [12]).

Abstract. The paper considers simultaneous Markov random walk of identical particles in one-particle phase space Ω, in the presence of particle sources and losses. There are countably many particles in the whole space, but their numbers remain locally bounded. A simple existence criterion of σ-bounded equilibrium distribution is suggested.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Феллер, Введение в Теорию Вероятностей и Ее Приложения, том 2, Мир, Москва, 1984.
2. К. Черчиньяни, Теория и Приложения Уравнения Больцмана, Мир, Москва, 1978.
3. В. В. Соболев, Рассеяние Света в Атмосферах Планет, Наука, Москва, 1972.
4. F. Spitzer, "The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density", Duke Math. J., vol. 24, no. 3, pp. 323 – 343, 1957.
5. I. Busbridge, The Mathematics of the Radiative Transfer, Oxford, 1960.
6. В. Рудин, Функциональный Анализ, Мир, Москва, 1975.
7. Н. Б. Енгибарян, "Постановка и решение некоторых задач факторизации для интегральных операторов", Мат. сборник, том 191, № 12, 2000.
8. Н. Б. Енгибарян, "Уравнения свертки, содержащие сингулярные вероятностные распределения", Известия РАН, Сер. Математика, том 60, № 2, 1996.
9. Н. Б. Енгибарян, "Консервативные системы интегральных уравнений свёртки на полупрямой и всей прямой", Матем. сборник, том 193, № 6, 2002.
10. N. B. Yengibarian, "Renewal equation on the whole line", Stochastic Processes and Their Applications, vol. 85, pp. 237 – 247, 2000.
11. N. B. Yengibarian, "Factorization of Markov chains", J. of Theoretical Probability, vol. 17, no. 2, pp. 459 – 481, 2004.
12. Н. Б. Енгибарян, "Уравнение восстановления в многомерном пространстве", Теория Вероятностей и её применения, том 49, № 4, стр. 779 – 785, 2004.
13. Б. Дэвисон, Теория Переноса Нейтронов, Москва, Атомиздат, 1960.

Поступила 4 сентября 2006