Известия НАН Армении. Математика, 41, № 5, 2006, 11–17

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ТИПА ВИНЕРА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА НА ПОЛУОСИ

Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
E-mail : drozzin@mi.ras.ru

Резюме. Работа посвящена распространению тауберовых теорем типа Винера на класс обобщённых функций медленного роста. Показано, что функционал имеет некоторую асимптотику (в слабом смысле) тогда и только тогда, когда он имеет ту же асимптотику на тестовой функции, преобразование Меллина которой в некоторой полосе комплексной плоскости не может приближаться к нулю быстрее некоторой отрицательной степени полинома. В качестве применения этого результата приводятся некоторые абелевы и тауберовы теоремы для некоторых преобразований Стилтьеса.

В тридцатых годах прошлого века Н. Винер [3] доказал следующую тауберову теорему : **Пусть $f(\xi) \in L_\infty(-\infty,+\infty)$ и функция $\varphi_0(\xi) \in L_1(-\infty,+\infty)$ такова, что её преобразование Фурье**

$$\widetilde{\varphi}_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}\varphi_0(\xi)\,d\xi \neq 0 \qquad \text{для всех} \quad x \in (-\infty,+\infty).$$

Тогда из существования

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a+\xi)\varphi_0(\xi)\,d\xi = A\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi)\,d\xi$$

следует существование

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(a+\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = A\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,d\xi \quad \text{для всех} \quad \varphi \in L_1(-\infty,+\infty).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты НШ-6705.2006.1 и 07-01-00144.

Заменой переменных $\xi = \ln t$, $\ln a = k$, она приводится к виду : пусть $f(t) \in L_\infty(0,+\infty)$, а функция $\varphi_0(t) \in L_1(0,+\infty)$ имеет преобразование Меллина

$$\hat{\varphi}_0(x) \equiv \int_0^\infty t^{-ix}\varphi_0(t)\,dt \neq 0 \quad \text{для всех} \quad x \in (-\infty,+\infty).$$

Тогда из существования

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^\infty f(kt)\varphi_0(t)\,dt = c$$

следует существование

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^\infty f(kt)\varphi(t)\,dt = c_\varphi \quad \text{для любой} \quad \varphi(t) \in L_1(0,\infty).$$

Прямое доказательство этой теоремы сводится к доказательству того факта, что линейная оболочка множества мультипликативных сдвигов $\{\varphi_0(kt), 0 < k < \infty\}$ плотна в $L_1(0,+\infty)$. А так как множество $\{f(kt), 0 < k < \infty\}$ ограничено, то, по теореме Банаха–Штейнхауза, и следует утверждение теоремы.

Теорема Винера занимает одно из центральных мест в гармоническом анализе и нашла многочисленные применения в различных областях математики. Поэтому, весьма важно, распространить эту теорему на другие классы функций.

Пусть M, N $(M \leq N)$ целые неотрицательные числа, a, b –вещественные нецелые числа и $\delta > 0$. Через $\mathcal{S}_+$ обозначаем пространство бесконечно дифференцируемых на $[0,+\infty)$ и быстро убывающих вместе со всеми своими производными функций. А через $\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$ – пополнение $\mathcal{S}_+$ по норме

$$\mathcal{P}^{a,M}_{b,N,\delta}[\varphi] = \max_{j\leq N}\int_0^\delta t^b\left|t^j\frac{d^j}{dt^j}\{\varphi(t) - T^{\langle b\rangle}_\varphi(t)\}\right|dt$$
$$+\max_{j\leq M}\int_\delta^{+\infty} t^a\left|t^j\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t)\right|dt + \sum_{j=0}^{\langle b\rangle}|\varphi^{(j)}(0)|, \tag{1}$$

где $\langle b\rangle = [-b-1]$ при $b < -1$, а $[x]$ – целая часть числа x. Если $b > -1$, то тейлоровский многочлен $T^{\langle b\rangle}_\varphi(t) = \sum_{j=0}^{\langle b\rangle}\frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}t^j$, и последняя сумма производных в (1) отсутствуют.

Функции $\varphi \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$ можно описать следующим образом : если $t \in (0,\delta)$, то

$$\varphi(t) = c_0 + \frac{c_1}{1!}t + \ldots + \frac{c_{\langle b\rangle}}{\langle b\rangle!}t^{\langle b\rangle} + \psi(t), \tag{2}$$

где $t^{b+j}\psi^{(j)}(t) \in L_1(0,\delta)$ для $0 \leq j \leq N$. А при $t \in (\delta-\varepsilon,+\infty)$, то $t^{a+j}\varphi^{(j)}(t) \in L_1(\delta-\varepsilon,+\infty)$ для $0 \leq j \leq M$, где $0 < \varepsilon < \delta$ (отметим, что в случае $b > -1$

полином в (2) отсутствует). Числа c_j, $j = 0, 1, \ldots, \langle b \rangle$, определяются однозначно и являются естественным расширением понятия производных в нуле для функций из $\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$. Всюду далее мы их обозначаем через $c_j = \varphi^{(j)}(0)$, $j = 0, 1, \ldots, \langle b \rangle$.
Через $\mathcal{S}^a_b$ обозначаем проективный предел пространства $\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$ по M и N. Проективный предел этих пространств по a и b образует пространство $\mathcal{S}_+$. Пространства линейных непрерывных функционалов обозначаются штрихом сверху, так что $f \in \left(\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}\right)'$ означает, что f -линейный непрерывный функционал над пространством основных функций $\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$. Отметим, что по теореме о конечном порядке любая обобщённая функция из $\mathcal{S}'_+$ принадлежит какому либо $\left(\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}\right)'$.
Преобразование Меллина основных функций $\varphi(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}$ определяется формулой

$$\mathcal{M}[\varphi] \equiv \widehat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} t^{-iz} \left[\varphi(t) - T^{\langle y \rangle}_{\varphi}(t)\right] dt, \quad z = x + iy \in \overline{\prod}{}^a_b, \tag{3}$$

где $\overline{\prod}{}^a_b = \{z \in \mathbb{C} : b \le y \le a\}$ и $\langle y \rangle = [-y-1]$. Так что при $y > -1$ тейлоровский многочлен

$$T^{\langle y \rangle}_{\varphi}(t) = \sum_{j=0}^{[-y-1]} \frac{t^j}{j!} \varphi^{(j)}(0)$$

функции φ отсутствует. Интеграл в (3) сходится абсолютно при $b \le y \le a$, кроме, возможно, целых отрицательных значений y, находящихся между a и b, и определяет в полосе $\prod^a_b$ аналитическую функцию, имеющую, быть может, простые полюсы в целочисленных отрицательных чисто мнимых точках. Вне полюсов, скажем в $\overline{\prod}{}^a_b \bigcap \{|x| > 1\}$, функция $\widehat{\varphi}(z)$ ограничена.
Пусть $\{\varphi^\beta_0(t) \in \mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}, \beta \in I\}$ – семейство основных функций, где I – счётное множество индексов и пусть $\{\widehat{\varphi}^\beta_0(z), \beta \in I\}$ – преобразование Меллина этого семейства. Напомним, что точка $z \in \prod^a_b$ называется **нулем кратности r семейства** $\{\widehat{\varphi}_0(z)\}$, если для любого $\beta \in I$ имеем

$$\widehat{\varphi}^\beta_0(z) = 0, \ \frac{d}{dz}\widehat{\varphi}^\beta_0(z) = 0, \ldots, \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\widehat{\varphi}^\beta_0(z) = 0$$

но $\frac{d^r}{dz^r}\widehat{\varphi}^\beta_0(z) \neq 0$ для некоторого $\beta \in I$.
В качестве асимптотической шкалы мы используем шкалу автомодельных (правильно меняющихся) функций. Положительная и непрерывная при достаточно больших k функция $\rho(k)$ называется автомодельной, если существует $\lim_{k \to +\infty} \frac{\rho(kt)}{\rho(k)} = \xi(t)$, причём сходимость равномерная по t на каждом компакте полуоси $(0, \infty)$. Легко видеть, что $\xi(t) = t^\alpha$ при некотором α. В этом случае функцию $\rho(k)$ называют **автомодельной функцией порядка α**. Заметим, что функции k^α, $k^\alpha \ln k$, $k^\alpha \ln \ln k, \ldots$ –примеры автомодельных функций порядка α.

Теорема 1. *Пусть* $f \in \left(\mathcal{S}^{a,M}_{b,N,\delta}\right)'$, $a > b$, $N \geq M$, $\rho(k)$ *– автомодельная функция порядка* α, *для которой* $b < \alpha < a$ *и* $\{\varphi_0^\beta(t) \in \mathcal{S}^{a+\varepsilon_0,M}_{b,N,\delta},\ \beta \in I\}$ *– заданное семейство функций со свойствами*

$$\sup_{\beta\in I} \mathcal{P}^{a+\varepsilon_0,M}_{b,N,\delta}\left[\varphi_0^\beta(t)\right] < \infty, \tag{3}$$

$$\sup_{\beta\in I} \left|\widehat{\varphi}_0^\beta(z)\right| \geq \frac{A}{1+|z|^m}, \quad z \in \prod\nolimits_{\alpha-\varepsilon_0}^{a+\varepsilon_0}, \tag{4}$$

для некоторых A, m *и* $\varepsilon_0 > 0$, *где* $\alpha - \varepsilon_0 \geq b$. *Кроме того, пусть для любого* $j = 0, 1, \ldots, \langle a\rangle$ *существуют некоторые* $\beta_j \in I$ *такие, что*

$$\frac{d^j}{dt^j}\varphi_0^{\beta_j}(0) \neq 0, \quad j = 0, 1, \ldots, \langle a\rangle. \tag{5}$$

Если для любого $\beta \in I$ *и некоторой постоянной* C

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)} \left(f(kt), \varphi_0^\beta(t)\right) = c^\beta \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho(k)} \left|\left(f(kt), \varphi_0^\beta(t)\right)\right| < C, \tag{6}$$

то $f(t)$ *– асимптотически однородная обобщённая функция относительно* $\rho(k)$, *то есть для любого* $\varphi(t) \in S_+$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\rho(k)} (f(kt), \varphi(t)) = c_\varphi. \tag{7}$$

Заметим, что если $a > -1$, то условие (5) отсутствует. В приложениях часто встречаются ситуации, когда некоторые из условий теоремы нарушаются. Например, если в теореме нарушены условия (4) (скажем, семейство $\{\widehat{\varphi}_0^\beta(z),\ \beta \in I\}$ имеет конечное число нулей $n_\tau \neq \alpha$ кратности n_τ в полосе $\prod_{\alpha-\varepsilon_0}^{a+\varepsilon_0}$) или (5), то из обобщенной функции $f(t)$ следует вычесть некоторые контрчлены вида

$$f_0(t) = \sum_{\tau=1}^{w} \sum_{\xi=1}^{r_\tau - 1} c_{\xi\tau} t_+^{-n_\tau} \ln^{\xi-1} t_+ - \sum_{\tau=1}^{w} c_{0\tau} \delta^{(n_\tau)}(t), \tag{8}$$

где $c_{\xi\tau}$ $(\tau = 1, \ldots, w,\ \xi = 0, 1, \ldots)$ и r_τ – постоянные. Тогда разность $f(t) - f_0(t)$ будет асимптотически однородна относительно $\rho(k)$. Функции фигурирующие в (8) введены и изучены в книге [1].

В качестве применения теоремы мы рассмотрим тауберовы и абелевы теоремы для интегрального преобразования Стилтьеса и его различных обобщений. Преобразование Стилтьеса в различных его модификациях и тауберовы теоремы для него изучались многими авторами. Мы приведём здесь абелевы и тауберовы теоремы для преобразований типа Стилтьеса, в которых подчас трудно проверяемые классические тауберовы условия типа положительности или ограниченности отсутствуют.

Пусть фиксированы числа $n = 0, 1, \ldots$, $c > 0$ и s $(-\infty < s < +\infty)$. Пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$, где $a < s-1$ и $b < a$. Тогда обобщённое преобразование Стилтьеса определяется формулой

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \quad z \in \mathbb{C} \backslash [0, +\infty), \tag{9}$$

где логарифм задается своей главной ветвью : $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $|\arg z| < \pi$. Ядра этих интегральных преобразований суть

$$\frac{\ln^n(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \in \mathcal{S}_b^a, \quad z \in \mathbb{C} \backslash [0, +\infty), \tag{10}$$

а формула (9) корректно определяет функцию $F(z)$, аналитическую во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по положительной части вещественной оси.

Теорема 2. *Пусть $f(t) \in (\mathcal{S}_b^a)'$ $(a < s-1, b < a)$ асимптотически однородна относительно автомодельной функции $\rho(k)$ порядка α, $(b < \alpha < a)$, то есть для любого $\varphi \in S_+$ имеем*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\rho(k)} \bigl(f(kt), \varphi(t)\bigr) = c_\varphi. \tag{11}$$

Тогда

1) для любого $\beta \in (0, 2\pi)$

$$\lim_{r \to +\infty} \frac{1}{r\rho(r)} F\left(re^{i\beta}\right) = c^\beta, \tag{12}$$

2) существуют A, m и r_0 такие, что

$$\frac{1}{r\rho(r)} \left|F\left(re^{i\beta}\right)\right| \le \frac{A}{\sin^m \frac{\beta}{2}}, \quad r > r_0, \quad \beta \in (0, 2\pi). \tag{13}$$

Обратную (тауберову) теорему мы приведем для случая $n = 1$ и $s > 0$.

Теорема 3. *Пусть $F(z)$ – аналитическая функция в $\mathbb{C} \backslash [0, +\infty)$, определяемая формулой*

$$F(z) = \left(f(t), \frac{\ln(c - \frac{t}{z})}{(c - \frac{t}{z})^s} \right), \quad z \in \mathbb{C} \backslash [0, +\infty), \tag{14}$$

где $f(t) \in (S_b^a)'$, $b < a < s-1$, $s > 0$, $c > 0$, а $\rho(k)$ – автомодельная функция порядка α ($b < \alpha < a$). *Пусть, кроме того, выполнены условия (12) и (13). Обозначим через y_0 единственный корень уравнения*

$$\ln c + \psi(s) = \psi(s-1+iz), \quad \text{на интервале} \quad (-i\infty, i(s-1)), \tag{15}$$

где $\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$, а $\Gamma(z)$ *–гамма функция Эйлера. Тогда :*

1) *если $y_0 < \alpha$, то $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$,*

2) *если $\alpha < y_0$, то возможны следующие случаи :*

a) *если дополнительно $y_0 = -1, -2, \ldots$, то существует c_0 такая, что $f(t) - c_0\delta^{(-y_0-1)}(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$,*

b) *если $y_0 \neq -1, -2, \ldots$, то, возможны следующие подслучаи :*

b1) *если $y_0 > a$, то $f(t)$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$,*

b2) *если $\alpha < y_0 < a$, то функция $f(t) - c_0 t_+^{y_0}$ асимптотически однородна относительно $\rho(k)$, с некоторой постоянной c_0.*

Замечание 1. Если в Теореме 3 условие $s > 0$ заменить более слабым условием $s \neq 0, -1, -2, \ldots$, тогда кроме нуля y_0, следует учитывать и другие нули уравнения (15) $y_1, y_2, \ldots$, которые все расположены на чисто мнимой оси. Если ни один из них не равен $-1, -2, \ldots$, то Теорема 3 остаётся верной. Если же один из них совпадает с $-1, -2, \ldots$, (а это может случиться только с одним из корней), скажем, $y_j = -\ell$, где ℓ – целое положительное число, то кроме контрчленов, которые перечислены в Теореме 3, нужно вычесть еще один контрчлен $c_1\delta^{(\ell-1)}(t)$.

Доказательство Теоремы 3 основано на следующем. При $z = re^{i\beta}$

$$\frac{1}{r\rho(r)}F\left(re^{i\beta}\right) = \frac{1}{r\rho(r)}\left(f(t'), \frac{\ln^n(c - \frac{t'}{r}e^{-i\beta})}{(c - \frac{t'}{r}e^{-i\beta})^s}\right) = \frac{1}{\rho(r)}\left(f(rt), \frac{\ln^n(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s}\right).$$

Теперь остаётся проверить условия Теоремы 1 для семейства

$$\varphi_0^\beta(t) = \sin^Q(\beta/2)\frac{\ln(c - te^{-i\beta})}{(c - te^{-i\beta})^s}, \quad \beta \in I,$$

где Q достаточно велико, а I – счётное множество значений $\beta \in (0, 2\pi)$, имеющее концы интервала своими предельными точками. При этом нужно учесть, что преобразование Меллина $\varphi_0^\beta(t)$ равно

$$\sin^Q(\beta/2)e^{(\beta-\pi)(z+i)}c^{1-s-iz}[\ln c + \psi(s) - \psi(s-1+iz)]\frac{\Gamma(1-iz)\Gamma(s-1+iz)}{\Gamma(s)}.$$

Abstract. The paper is devoted to the extension of Wiener–type Tauberian theorems to a class of generalized functions of slow growth. A functional is shown to have certain asymptotics (in the weak sense) if and only if it displays the same asymptotics on a test function whose Mellin transform is bounded away from zero in a strip of the complex plane. As an application of this result we give some Abelian and Tauberian theorems for several Stieltjes transforms.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Обобщённые функции и операции над ними, том 1, Физматгиз, Москва, 1959.
2. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, "Тауберова теорема типа Винера для обобщённых функций медленного роста", Матем. сб., том 189, № 7, стр. 91–130, 1998.
3. В. С. Владимиров, Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, Многомерные тауберовы теоремы для обобщённых функций, Наука, Москва, 1986.
4. N. Wiener, "Tauberian theorems", Ann. of Math., vol 33, № 1, pp. 1–100, 1932.
5. R. P. Boas and D. V. Widder, "The iterated Stieltjes transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol 45, pp. 1–72, 1939.
6. S. Pilipovič, B. Stanković, and A. Takači. Asymptotic behavior and Stieltjes transformation of distributions, Band 116, Teubner Verlag, Leipzig, 1990.

Поступила 21 сентября 2006