О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НОРМАЛИЗИРОВАННОГО ЧИСЛОВОГО ОБРАЗА

Л. З. Геворгян

Государственный инженерный университет Армении

E-mail : levgev@hotmail.com

Резюме. В первой части настоящей заметки мы исследуем вопрос когда число, принадлежащее границе числового образа является нормальным собственным значением. Во второй части рассматриваются условия, при которых начало координат принадлежит числовому образу оператора. В последней части устанавливаются некоторые связи между спектром и нормализованным числовым образом оператора.

Пусть A – ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H , $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $N(A) = \{x : Ax = \theta\}$ – его ядро, $W(A) = \{\langle Ax, x \rangle : \|x\| = 1\}$ – числовой образ, а

$$W_n(A) = \left\{ \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} : \|Ax\| \neq \theta \right\}$$

нормализованный числовой образ оператора A . Напомним, что комплексное число λ называется нормальным собственным значением оператора A , если существует ненулевой элемент $x \in H$, такой что $Ax = \lambda x$ и $A^*x = \bar{\lambda}x$.

1. Следующее утверждение (см. [5], Лемма 5.2.2) играет важную роль при доказательстве существования квадратного корня для любого положительного оператора. Так как приведенное там доказательство содержит неточности, мы приводим элементарные выкладки.

Лемма 1. Пусть оператор A неотрицателен, т.е. $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in H$. Тогда условие $\langle Ax, x \rangle = 0$ влечет $Ax = \theta$.

Доказательство. Посчитаем

$$\left\langle A \left(x - \frac{Ax}{\|A\|} \right), x - \frac{Ax}{\|A\|} \right\rangle = -2 \frac{\|Ax\|^2}{\|A\|} + \frac{1}{\|A\|^2} \langle A^2 x, Ax \rangle.$$

Следовательно

$$\left\langle A \left(x - \frac{Ax}{\|A\|} \right), x - \frac{Ax}{\|A\|} \right\rangle \leq -\frac{1}{\|A\|} \|Ax\|^2 \leq 0.$$

Очевидно, что утверждения $\langle Ax, x \rangle = 0 \Rightarrow Ax = \theta$ и $\langle Ax, x \rangle = 0 \Leftrightarrow Ax = \theta$ эквивалентны. Сдвигом на скаляр можно это утверждение переформулировать следующим образом: если числовой образ самосопряженного оператора A содержит наибольшее (наименьшее) значение μ , то μ является собственным значением оператора A . Развивая эту идею, М. Эмбри [1] показала, что если $\mu \in W(A)$ является граничной точкой и $\mu = \langle Ax, x \rangle / \|x\|^2$, то существует действительное число ω такое, что

$$\exp(i\omega)(A - \mu I)x = \exp(-i\omega)(A^* - \bar{\mu}I)x.$$

Как установлено Гильдебрандом в [3], $(A - \mu I)x = \theta$ влечет $(A^* - \bar{\mu}I)x = \theta$, т.е. собственное значение μ , принадлежащее границе числового образа, является нормальным собственным значением. Стампфли в [8] доказал, что если A есть гипонормальный оператор (т.е. $A^*A - AA^* \geq 0$), то любая крайняя точка из $W(A)$ является нормальным собственным значением оператора A .

В работе автора [2] такое же утверждение доказывается для более обширного класса операторов, но для некоторого подмножества крайних точек. В известной монографии [7] приведено аналогичное утверждение (Гл. IV, Лемма 5.2)

Пусть A - аккретивный оператор (т.е. $\Re \langle Ax, x \rangle \geq 0$ для любого $x \in H$). Тогда

$$|\langle Af, g \rangle|^2 \leq \Re \langle Af, f \rangle \cdot \Re \langle Ag, g \rangle$$

и, следовательно, из $\Re \langle Af, f \rangle = 0$ следует $Af = \theta$. К сожалению, не только доказательство, но и само утверждение ошибочны. Действительно, полагая $f = g$, получим

$$|\langle Af, f \rangle|^2 \leq \Re^2 \langle Af, f \rangle.$$

В силу аккретивности оператора A имеем $|\langle Af, f \rangle| \leq \Re \langle Af, f \rangle$. Так как противоположное неравенство справедливо для любого комплексного числа, то $\langle Af, f \rangle = \Re \langle Af, f \rangle$, что неверно в общем случае. В качестве конкретного опровергающего примера можно взять вольтерровский оператор интегрирования в $L^2(0, 1)$:

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Очевидно

$$\left(\frac{V+V^*}{2}f\right)(x) = \frac{1}{2} \left| \int_0^1 f(t) dt \right|^2 \geq 0,$$

так что оператор V аккретивен. При $f(x) \equiv 1$ и $g(x) \equiv x$ получим $\langle Vf, g \rangle = \frac{1}{2}$, $\langle Vf, f \rangle = \frac{1}{3}$ и $\langle Vg, g \rangle = \frac{1}{8}$. Таким образом, требуемое неравенство неверно даже в ослабленном виде

$$|\langle Vf, g \rangle|^2 \leq |\langle Vf, f \rangle| \cdot |\langle Vg, g \rangle|.$$

Этот пример является крайним в некотором смысле, поскольку $N(V) = \{\theta\}$, а $N(\mathbb{R}V)$ совпадает с ортогональным дополнением к подпространству констант, т.е. имеет коразмерность 1.

2. Введём обозначение $M_\lambda(A) = \{x : \langle Ax, x \rangle = \lambda \|x\|^2\}$. Очевидно, что $M_\lambda(A) \neq \{\theta\}$ тогда и только тогда, когда $\lambda \in W(A)$. В [1] М. Эмбри доказала, что $M_\lambda(A)$ является нетривиальным подпространством пространства H тогда и только тогда, когда λ есть крайняя точка множества $W(A)$.

Предложение 1. Условия $0 \notin W_n(A)$ и $M_0(A) = N(A)$ эквивалентны.

Доказательство. Переходя к отрицанию обеих частей, получим, очевидно, эквивалентные (в силу включения $N(A) \subset M_0(A)$) утверждения

$$0 \in W_n(A) \Leftrightarrow \{\exists x \text{ st } \langle Ax, x \rangle = 0 \ \& \ Ax \neq \theta\}.$$

Предложение 2. Условия $0 \in W_n(A)$ и $0 \in W_n(A^*)$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть наоборот $0 \notin W_n(A^*)$. По Предложению 1, это условие означает $N(A^*) = M_0(A^*) = M_0(A)$, и согласно результату М. Эмбри, 0 является крайней точкой $W(A)$. Следовательно, 0 принадлежит границе множества $W(A)$, и из равенства $A^*x = \theta$ следует $Ax = \theta$, т.е. $0 \notin W_n(A)$.

Следствие 1. Условия $0 \notin W_n(A)$ и $N(A^*) = N(A) = M_0(A)$ эквивалентны.

Отсюда заключаем, что при выполнении указанного условия оператор A представляется в виде ортогональной суммы

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 \notin W(B)$, причем одно из слагаемых может отсутствовать. Нетрудно заметить, что второе слагаемое отсутствует тогда и только тогда, когда $0 \notin W(A)$.

Замечание 1. Если существует ненулевой элемент $x \in H$ такой, что $A^*x = Ax = \theta$, то для любых $y, Ay \neq \theta$ и $t \in \mathbb{C}$ получаем

$$\frac{\langle A(y + tx), y + tx \rangle}{\|A(y + tx)\| \cdot \|y + tx\|} = \frac{\langle Ay, y \rangle}{\|Ay\| \cdot \|y\|}.$$

Это означает, что $W_n(A)$ содержит любой интервал, соединяющий точку 0 с произвольной точкой $W_n(A)$. В частности, если $0 \in W(A)$ и $0 \notin W_n(A)$, то $W_n(A)$ звездообразно относительно начала координат.

Пример 1. Пусть A – оператор усреднения

$$(Af)(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt, \quad f \in L^2(-1; 1).$$

Пространство $L^2(-1; 1)$ представимо в виде ортогональной суммы $L^2(0; 1) \oplus L^2(0; 1)$ (см. [9], Решение 149). Первое слагаемое в ней соответствует чётной, а второе – нечётной компоненте функции f . Тогда оператор A расщепляется в ортогональную сумму

$$A = \begin{pmatrix} C & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

где C – оператор Харди-Литлвуда

$$(Cf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad f \in L^2(0; 1).$$

Нетрудно проверить, что $C = I + S^*$, где S – оператор простого одностороннего сдвига. Кроме того, имеем $W(S^*) = \{z : |z| < 1\}$ и

$$W(C) = \{z : |z - 1| < 1\}, \quad W(A) = W(C) \cup \{0\}, \quad W_n(A) = \{z : |z| \leq 1, \Re z > 0\}.$$

Если $0 \notin W_n(A)$, то множество $W(A)$ (а также $W_n(A)$) целиком лежит в некоторой полуплоскости, граница которой содержит начало координат. Таким образом, если $z = 0$ является внутренней точкой $W(A)$, то $0 \in W_n(A)$. Кроме того, можно отметить, что если $D_\epsilon = \{z : |z| \leq \epsilon\}$ – некоторый круг, лежащий целиком в $W(A)$, $\langle Ax, x \rangle / \|x\|^2 \in D_\epsilon \setminus \{0\}$ и $\langle Ay, y \rangle = 0, Ay \neq \theta$, то множество

$$\left\{ \frac{\langle A((1-t)x + ty), (1-t)x + ty \rangle}{\|A((1-t)x + ty)\| \cdot \|A((1-t)x + ty)\|} : 0 \leq t \leq 1 \right\}$$

содержит отрезок, соединяющий точку $\frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|}$ с началом координат. Следовательно, в силу неравенства

$$\frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = \frac{\|x\|}{\|Ax\|} \cdot \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2} \geq \frac{1}{\|A\|} \cdot \frac{|\langle Ax, x \rangle|}{\|x\|^2},$$

круг $D = \left\{ z : |z| \leq \frac{\epsilon}{\|A\|} \right\}$ целиком лежит в $W_n(A)$. Таким образом, если 0 является внутренней точкой $W(A)$, то она является внутренней также для $W_n(A)$. Обратное утверждение легко следует из выпуклости $W(A)$.

Случай $0 \notin W(A)$ также представляет определенный интерес. Он характеризуется следующим образом.

Предложение 3. Точка 0 не принадлежит множеству $W(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in H$ существует постоянная $c(x) > 0$ такая, что

$$\|x\| \leq c(x) \cdot \|x + y\| \quad (1)$$

для любого $y \in H$, удовлетворяющего $\langle Ax, y \rangle = 0$.

Доказательство. Обозначим $\delta = \inf_y \|x + y\|$. Если $\delta > 0$, то неравенство (1) уже установлено. В противном случае существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что $y_n \rightarrow -x$ и $\langle Ax, y_n \rangle = 0$. Следовательно, в силу непрерывности имеем $\langle Ax, x \rangle = 0$, откуда $x = \theta$. В этом случае выше приведенное неравенство верно для любой положительной постоянной. С другой стороны, если $\langle Ax, x \rangle = 0$ для некоторого элемента $x \neq \theta$, то полагая $y = -x$, получим $\|x\| \leq c(x) \cdot 0$.

Замечание 2. Величина c может зависеть от x . Действительно, если

$$x_n = \sin 2\pi nt, \quad y_n = \frac{3}{2\pi n} - \sin 2\pi nt,$$

и $A = V^*V$, то некоторые элементарные вычисления дают

$$\|x_n\| = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \|x_n + y_n\| = \frac{3}{2\pi n} \rightarrow 0,$$

$$\langle x_n, V^*V y_n \rangle = \int_0^1 \frac{1 - \cos 2\pi nt}{2\pi n} \cdot \frac{3t - 1 + \cos 2\pi nt}{2\pi n} dt = 0,$$

и, следовательно, неравенство (1) невозможно ни при каком положительном c .

Замечание 3. Согласно результату Ли и Шоу [4], если 0 не является внутренней точкой $W(A)$, то для всех $x, y \in H$ имеет место неравенство

$$\|x\| \leq \|x + Ay\| + 2\sqrt{\|Ax\| \cdot \|y\|}.$$

Предложение 4. Начало координат не принадлежит $W_n(A)$ тогда и только тогда, когда для любого $x \in M_0(A)$ существует постоянная t (зависящая, вообще говоря, от x) такая, что

$$\|tAx - x\| \leq \|x\|.$$

Доказательство. Заметим, что элементы x и Ax ортогональны тогда и только тогда, когда для любого $t \in \mathbb{C}$ имеет место неравенство $\|tAx - x\| \geq \|x\|$. Следовательно,

$$\|x\|^2 = \|tAx - x\|^2 = |t|^2 \cdot \|Ax\|^2 + \|x\|^2$$

и $Ax = \theta$. Необходимость указанного условия очевидна.

Следующее предложение является непосредственным следствием результатов работы [3], Предложения 4 и Теоремы 5 из [4].

Предложение 5. *Имеют место утверждения*

$$0 \in \overline{W}_n(A) \iff 0 \in \overline{W}(A) \iff |\lambda| \leq \|A - \lambda I\|, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

3. Исследуем теперь связь между нормализованным числовым образом и спектром оператора. Покажем, что каждая точка из спектра оставляет след в нормализованном числовом образе. Известно, что если точка λ принадлежит SpA , то либо $A - \lambda I$ имеет в H неплотный образ $R(A)$, тогда ядро $A^* - \bar{\lambda}I$ нетривиально, либо оператор $A - \lambda I$ не ограничен снизу, т.е. существует последовательность единичных элементов $\{x_n\}$ такая, что

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0 \quad (2)$$

(в этом случае λ принадлежит предельному спектру оператора A). Пусть $\bar{\lambda} \neq 0$ – собственное значение оператора A^* , $A^*x = \bar{\lambda}x$ (собственное значение 0 играет особую роль и будет рассмотрено далее). В силу соотношений

$$\|Ax\| \cdot \|x\| \geq |\langle Ax, x \rangle| = |\langle x, A^*x \rangle| = |\lambda| \cdot \|x\|^2,$$

имеем также

$$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = \lambda \cdot \frac{\|x\|}{\|Ax\|}.$$

Кроме того, нетрудно проверить, что любому ненулевому собственному значению λ оператора A соответствует точка $sgn \lambda = \exp(i \arg \lambda)$ из $W_n(A)$.

Пусть теперь λ – ненулевая точка из предельного спектра и $\{x_n\}$ – последовательность единичных элементов, удовлетворяющая (2). Тогда

$$|\lambda - \langle Ax_n, x_n \rangle| = |\langle (A - \lambda I)x_n, x_n \rangle| = \|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0,$$

$$\left| |\lambda| - \|Ax_n\| \right| \leq \|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0,$$

т.е.

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda, \quad \|Ax_n\| \rightarrow |\lambda|,$$

$$\frac{\langle Ax_n, x_n \rangle}{\|Ax_n\|} \rightarrow sgn \lambda,$$

откуда получаем $sgn \lambda \in \overline{W}_n(A)$.

Предложение 6. Условие $0 \in SpA$ влечёт $0 \in \overline{W}_n(A)$.

Доказательство. Согласно Предложению 5, имеет место эквивалентность

$$0 \in \overline{W}_n(A) \Leftrightarrow 0 \in \overline{W}(A).$$

Так как $SpA \subset \overline{W}(A)$, то $0 \in \overline{W}_n(A)$.

Пример оператора умножения на независимую переменную в пространстве $L^2(0; 1)$ показывает, что из условия $0 \in SpA$, вообще говоря, не следует, что $0 \in W_n(A)$. Что же касается нулевого собственного значения оператора A^* очевидно, что если $A^*x = \theta$ и $Ax \neq \theta$, то

$$\frac{\langle Ax, x \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = \frac{\langle x, A^*x \rangle}{\|Ax\| \cdot \|x\|} = 0,$$

и поэтому $0 \in W_n(A)$.

Точки из $\overline{W}_n(A) \setminus W_n(A)$, лежащие на единичной окружности, тесным образом связаны с предельным спектром оператора A .

Предложение 7. Если $e^{i\phi} \in \overline{W}_n(A) \setminus W_n(A)$, то некоторая точка $ae^{i\phi}$ ($a \geq 0$) принадлежит предельному спектру оператора A .

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ – последовательность единичных элементов, такая что

$$\frac{\langle Ax_n, x_n \rangle}{\|Ax_n\|} \rightarrow e^{i\phi}.$$

Последовательность $\{\|Ax_n\|\}$ ограничена, и следовательно

$$\langle Ax_n, x_n \rangle e^{-i\phi} - \|Ax_n\| \rightarrow 0.$$

Если последовательность $\{\|Ax_n\|\}$ сходится к некоторому числу a , то

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \rightarrow ae^{i\phi}$$

и

$$\|(A - ae^{i\phi}I)x_n\|^2 = |ae^{i\phi} - \langle Ax_n, x_n \rangle|^2 - |\langle Ax_n, x_n \rangle|^2 + \|Ax_n\|^2 \rightarrow 0.$$

Случай двумерной клетки Жордана

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

показывает, что единственная точка спектра $0 \in SpJ_2$ может порождать все множество

$$\{z : |z| = 1\} = \overline{W}_n(J_2) \setminus W_n(J_2).$$

Резюме. The note points at some conditions when a boundary point of the numerical range of a bounded operator in a Hilbert space is a normal eigenvalue of the operator, as well as at the conditions, for the origin to belong to the normalized numerical range of the operator. Connections between the spectrum and the normalized numerical range of an operator are established.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Embry, "The numerical range of an operator", Pacific J. Math., vol. 32, pp. 647 – 650, 1970.
2. Л. З. Геворгян, "О выдающихся точках числового образа оператора", Электронный журнал "Исследовано в России", 020, стр. 191-200, 2003, <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/020.pdf>.
3. L. Z. Gevorgyan, "On the convergence rate of iterations and the normalized numerical range of an operator", Math. Sci. Res. J. vol. 8, no. 1, pp. 16 – 26, 2004.
4. S. Hildebrandt, "Ueber den numerischen Wertebereich eines Operators", Math. Ann., vol. 163, pp. 415 – 421, 1966.
5. Li Yuan-Chuan, Shaw Sen-Yen, "An abstract ergodic theorem and some inequalities for operators on Banach spaces", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 125, pp. 111 – 119, 1997.
6. А. И. Плеснер, Спектральная Теория Линейных Операторов, Москва, Наука, 1965.
7. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, Гармонический Анализ Операторов в Гильбертовом Пространстве, Москва, Мир, 1970.
8. J. G. Stampfi, "Extreme points of the numerical range of hyponormal operators", Michigan Math. J., vol. 13, pp. 87 – 89, 1966.
9. П. Халмош, Гильбертово Пространство в Задачах, Москва, Мир, 1970.

Поступила 7 сентября 2005