Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 61–70

О РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ МНОГОЧЛЕНОВ

В. М. Харатян и В. Н. Маргарян

Армянский Государственный Педагогический Университет
Институт математики НАН Армении

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, символы которых удовлетворяют некоторой оценке в окрестности нуля. Доказывается разрешимость таких уравнений в соответствующих классах многочленов.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] Л. Хермандером доказано, что любое линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами локально разрешимо в пространстве обобщенных функций.

В работе [2] Н. Е. Товмасяна исследованы корректные граничные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными в классе функций, растущих не быстрее полинома. Там же доказано, что эти задачи, рассматриваемые в полупространстве, имеют бесконечное число решений.

В работе [3] А. О. Бабаяна доказано, что задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения порядка $2n$ с постоянными коэффициентами в единичном круге имеет решение из класса функций, $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в открытом круге и удовлетворяющих условию Гельдера вместе с производными до порядка n вплоть до границы.

Пусть $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, а $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Обозначим через $\mathbb{R}^2$ двумерное вещественное евклидово пространство векторов $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, а через $\mathbb{N}_0^2$ – двумерное множество мультииндексов, т.е. точек $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ с целыми неотрицательными компонентами. Для любых $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ обозначим $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$, $||\xi|| = \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2$. $r \in \mathbb{N}_0$ Для любого $r \in \mathbb{N}_0$ через L_r обозначим множество однородных многочленов порядка r от двух переменных, через $\widetilde{L}_r$ – множество многочленов от двух переменных, порядок которых не превосходит r.

В настоящей работе рассматриваются дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами в классе многочленов. Доказывается, что если символ $P(-i\xi_1, -i\xi_2)$ (где i – мнимая единица) дифференциального оператора $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ удовлетворяет следующей оценке

$$|P(-i\xi_1, -i\xi_2)| \geq c||\xi||^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \quad ||\xi|| \leq \varepsilon,$$

с некоторыми числами $m \in \mathbb{R}^1$, $c, \varepsilon > 0$, то для любого целого неотрицательного числа k и и произвольного многочлена g порядка не превышающего k, уравнение $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = g$ имеет решение $U \in \widetilde{L}_{[m]+k}$, где $[m]$ – целая часть числа m.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\alpha \in (Q)} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}$ – многочлен от двух переменных, где сумма распространяется по некоторому конечному набору мультииндексов $(Q) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^2, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Введем следующие обозначения $d(Q) \equiv \max_{\alpha \in (Q)} |\alpha|$, $r(Q) \equiv \min_{\alpha \in (Q)} |\alpha|$.

Лемма 1. *Пусть для ненулевого многочлена Q с некоторыми числами $c > 0$, $\varepsilon > 0$ и $m \geq 0$ выполняется следующая оценка*

$$|Q(\xi_1, \xi_2)| \geq c||\xi||^m, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad ||\xi|| \leq \varepsilon, \tag{1}$$

Тогда $r = r(Q) \leq [m]$.

Доказательство : Представим многочлен Q в виде суммы однородных многочленов

$$Q(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=r}^{d} Q_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=r}^{d} \sum_{\alpha_1+\alpha_2=i} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}.$$

Из определения числа r следует, что $Q_r(\xi_1, \xi_2) \not\equiv 0$. Так как очевидно, что для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ и для всех $\xi \in \mathbb{R}^2$

$$|\xi^\alpha| = |\xi_1^{\alpha_1}||\xi_2^{\alpha_2}| \leq ||\xi||^{\alpha_1}||\xi||^{\alpha_2} \leq ||\xi||^{\alpha_1+\alpha_2}.$$

то с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ при $||\xi|| \le \varepsilon \le 1$

$$|Q(\xi_1,\xi_2)| = \left|\sum_{\alpha_1+\alpha_2=r} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\right| \le c_1 \sum_{\alpha\in(Q)} ||\xi||^{|\alpha|} \le c_2||\xi||^r, \qquad (2)$$

Из оценок (1) и (2) непосредственно следует, что $m \ge r$ и, так как r – целое неотрицательное число, то $[m] \ge r$. Лемма доказана.

Пример 1. Пусть $Q(\xi_1,\xi_2) = \xi_1^6 - 2\xi_1^3\xi_2^4 + \xi_2^8 + \xi_1^8$. Тогда $|Q(\xi_1,\xi_2)| \ge \frac{1}{2}||\xi||^{32/3}$ при $||\xi|| \le 1$.

Пусть M – целое неотрицательное число,

$$R(-i\xi_1,-i\xi_2) = \sum_{j=0}^{M} \delta_j(-i\xi_1)^j(-i\xi_2)^{M-j}$$

однородный ненулевой многочлен, а $R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – соответствующий ему дифференциальный оператор

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{j=0}^{M} \delta_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{M-j}.$$

Лемма 2. Для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и $g \in L_k$ и любого ненулевого однородного линейного дифференциального оператора R порядка M уравнение

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) U = g \qquad (3)$$

имеет решение в L_{M+k}.

Доказательство : Так как символ оператора R является ненулевым многочленом, то существует индекс $j : 0 \le j \le M$, для которого $\delta_j \ne 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\delta_0 \ne 0$ (в общем случае доказательство проводится аналогично с небольшой модификацией). Для $k \in \mathbb{N}_0$ и $x, y \in \mathbb{R}^1$ обозначим

$$g_k^{(s)} = g_k^{(s)}(x,y) = x^s y^{M+k-s}, \quad s = 0,1,\ldots,k. \qquad (4)$$

Тогда

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) g_k^{(s)} = \sum_{j=0}^{M} \delta_j \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j x^s \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{M-j} y^{M+k-s} =$$

$$= \sum_{\substack{0\le j\le M \\ s-k\le j\le s}} \delta_j \frac{s!}{(s-j)!} x^{s-j} \frac{(M+k-s)!}{(k-s+j)!} y^{k-s+j}, \quad s = 0,1,\ldots,k. \qquad (5)$$

Положим $\Omega = \{\theta \in \mathbb{N}_0, \max(k-s, 0) \leq \theta \leq \min(k, M+k-s)\}$ и произведем в (5) замену $l = k - s + j$, получим

$$
\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) g_k^{(s)} &= \sum_{\substack{k-s\leq l\leq M+k-s \\ 0\leq l\leq k}} \delta_{l-k+s} \frac{s!}{(k-l)!} x^{k-l} \frac{(M+k-s)!}{l!} y^l \\
&= \sum_{l\in\Omega} \delta_{l-k+s} \frac{s!}{(k-l)!} x^{k-l} \frac{(M+k-s)!}{l!} y^l, \quad s = 0, 1, \ldots, k
\end{aligned} \tag{6}
$$

Обозначим через $\mathbf{g}$ вектор-функцию

$$
\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_k^{(0)} \\ g_k^{(1)} \\ \ldots \\ g_k^{(k)} \end{pmatrix}
$$

и через $\mathbb{A}$ обозначим $(k+1) \times (k+1)$-размерную треугольную матрицу

$$
\mathbb{A} = \begin{pmatrix}
\frac{\delta_0 (M+k)!}{k!} & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{\delta_1 (M+k-1)!}{k!} & \frac{\delta_0 (M+k-1)!}{(k-1)!} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\
\frac{\delta_2 2! (M+k-2)!}{k!} & \frac{\delta_1 2! (M+k-2)!}{(k-1)!} & \frac{\delta_0 2! (M+k-2)!}{2!(k-2)!} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \\
\frac{\delta_k k! M!}{k!} & \frac{\delta_{k-1} k! M!}{(k-1)!} & \ldots\ldots & \frac{\delta_1 k! M!}{(k-1)!} & & \frac{\delta_0 k! M!}{k!}
\end{pmatrix}
$$

при $M \geq k$, и

$$
\mathbb{A} = \left(\begin{matrix}
\frac{\delta_0 (M+k)!}{k!} & 0 & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_1 (M+k-1)!}{k!} & \frac{\delta_0 (M+k-1)!}{(k-1)!} & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_M M! k!}{k!} & \frac{\delta_{M-1} M! k!}{(k-1)!} & \ldots & \ldots \\
0 & \frac{\delta_M (M+1)!(k-1)!}{(k-1)!} & \frac{\delta_{M-1} (M+1)!(k-1)!}{(2!(k-2)!} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & 0
\end{matrix}\right.
$$

$$
\left.\underbrace{\begin{matrix}
\ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_0 M! k!}{M!(k-M)!} & 0 & \ldots & 0 \\
\frac{\delta_0 (M+1)!(k-1)!}{(M+1)!(k-M-1)!} & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\delta_M k! M!}{(k-M)! M!} & \frac{\delta_{M-1} k! M!}{(k-M+1)!(M-1)!} & \ldots & \frac{\delta_0 k! M!}{k!}
\end{matrix}}_{M+1}\right)
$$

при $M < k$. Тогда систему уравнений (6) можно записать в виде

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbf{g} = \mathbb{A}\begin{pmatrix} x^0y^k \\ x^1y^{k-1} \\ \dots \\ x^ky^0 \end{pmatrix}.$$

Так как в обоих случаях $M \geq k$ и $M < k$ диагональ треугольной матрицы $\mathbb{A}$ состоит из ненулевых элементов, поскольку по предположению $\delta_0 \neq 0$, то матрица $\mathbb{A}$ обратима (см. [4]). Поэтому, в силу линейности дифференциального оператора R

$$\begin{pmatrix} x^0y^k \\ x^1y^{k-1} \\ \dots \\ x^ky^0 \end{pmatrix} = R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)\mathbb{A}^{-1}\mathbf{g},$$

Таким образом, при $g \in L_k$ уравнение $R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = g$ разрешимо в L_{M+k}. Лемма доказана.

Построим решение уравнения (3). Пусть $g = \sum\limits_{j=0}^{k} c_jx^jy^{k-j}$ и $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_k)$. Если вектор-строка $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_k)$ является решением системы уравнений

$$\mathbf{Z}\mathbb{A} = \mathbf{C}, \tag{7}$$

то многочлен $U = \sum\limits_{s=0}^{k} d_sx^sy^{k+M-s}$ является решением дифференциального уравнения

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = g. \tag{8}$$

Подставив значение U в (6), получим

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = \sum_{s=0}^{k} d_s\left(\sum_{j=0}^{M}\delta_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^j x^s\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{M-j} y^{k+M-s}\right)$$
$$= \sum_{s=0}^{k} d_s\left(\sum_{\substack{0\leq j\leq M\\ s-k\leq j\leq s}}\delta_j\frac{s!}{(s-j)!}x^{s-j}\frac{(M+k-s)!}{(k-s+j)!}y^{k-s+j}\right).$$

Обозначая $l = k - s + j$, получим

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U = \sum_{s=0}^{k} d_s\left(\sum_{l\in\Omega}\delta_{l-k+s}\frac{s!}{(k-l)!}\frac{(M+k-s)!}{l!}x^{k-l}y^l\right) =$$

$$= \mathbf{d}\mathbb{A}\begin{pmatrix} x^0y^k \\ x^1y^{k-1} \\ \dots \\ x^ky^0 \end{pmatrix}.$$

Откуда, в силу того, что $\mathbf{d}$ является решением уравнения (7), получаем

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U = \mathbf{C}\begin{pmatrix} x^0y^k \\ x^1y^{k-1} \\ \dots \\ x^ky^0 \end{pmatrix} = g.$$

Пусть r, $d \in \mathbb{N}_0$ и

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = \sum_{j=r}^{d}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=j}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x^{\alpha_1}}\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial y^{\alpha_2}}$$

линейный дифференциальный оператор,

$$P(-i\xi_1, -i\xi_2) = \sum_{j=r}^{d}\sum_{\alpha_1+\alpha_2=j}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2}$$

его полный символ, для которого

$$P_r(-i\xi_1, -i\xi_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2=r}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2} \not\equiv 0.$$

Лемма 3. *Для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и произвольного $f \in \widetilde{L}_k$ уравнение*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)V(x, y) = f(x, y)$$

имеет решение $V \in \widetilde{L}_{r+k}$.

Доказательство : Доказательство произведем по индукции по k. Пусть $k = 0$, т.е. $f(x, y) \equiv \mathrm{const} \equiv c$. В силу леммы 2 уравнение

$$P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U = c$$

имеет решение $U_0 \in L_r$. Так как $P_j\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U_0 = 0$ при $j > r$, то

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U_0 = \sum_{i=r}^{d}P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U_0 = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U_0 +$$

$$+\sum_{i=r+1}^{d}P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U_0 = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)U_0 = c,$$

т.е. многочлен $U_0 \in L_r \subset \widetilde{L}_r$ является решением уравнения $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = c$.

Предположим, что утверждение леммы верно для любого $f \in \widetilde{L}_{k-1}$ $(k \geq 1)$, докажем его для любого $f \in \widetilde{L}_k$. Представим f в виде суммы однородных многочленов $f = f_k + f_{k-1} + \ldots + f_0$, где f_j – однородный многочлен порядка j $(j = 0, 1, 2, \ldots, k)$. Тогда $h^{(k-1)} \equiv f_{k-1} + \ldots + f_0 \in \widetilde{L}_{k-1}$. Если $f_k \equiv 0$, то $f \equiv h^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$, и утверждение леммы непосредственно следует из предположения индукции. Поэтому, пусть $f_k \not\equiv 0$. В силу леммы 2 уравнение

$$P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = f_k$$

имеет решение $U_{k+r} \in L_{r+k}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} &= \sum_{i=r}^{q} P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} = P_r\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} \\ &+ \sum_{i=r+1}^{q} P_i\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} \equiv f_k + H^{(k-1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $H^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$. Так как $H^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$ и $h^{(k-1)} \in \widetilde{L}_{k-1}$, по предположению индукции уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = -H^{(k-1)} + h^{(k-1)} \tag{10}$$

имеет решение $\widetilde{V} \in \widetilde{L}_{r+k-1}$. Положим $V = U_{k+r} + \widetilde{V}$. Очевидно, $V \in \widetilde{L}_{r+k}$. Покажем, что многочлен V является решением уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V = f.$$

Из соотношений (9) и (10) имеем

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) V &= P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) (U_{k+r} + \widetilde{V}) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U_{k+r} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \widetilde{V} \\ &= f_k + H^{(k-1)} + [-H^{(k-1)} + h^{(k-1)}] = f_k + h^{(k-1)} = f, \quad (f \in \widetilde{L}_k). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – линейный дифференциальный оператор, полный символ которого удовлетворяет оценке (1). Тогда для любых $k\in\mathbb{N}_0$ и $g\in\widetilde{L}_k$ уравнение*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)U=g$$

имеет решение в $\widetilde{L}_{[m]+k}$.

Доказательство непосредственно следует из лемм 1, 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть k_0 – целое неотрицательное число, а $P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)$ – дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда для того, чтобы при некотором $l\in\mathbb{N}_0$ имело место включение*

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k_0+l}\supset\widetilde{L}_{k_0} \tag{11}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$p_l(\xi_1,\xi_2)\equiv\sum_{\substack{\alpha\in(P)\\|\alpha|\le l}}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2}\not\equiv 0.$$

Доказательство : Достаточность. Пусть $p_l(\xi_1,\xi_2)\not\equiv 0$ для некоторого $l\in\mathbb{N}_0$. Тогда , так как $r\equiv r(P)(\le l)$, то в силу леммы 3

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k+l}\supset P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k+r}\supset\widetilde{L}_k,\quad\forall k\in\mathbb{N}_0, \tag{12}$$

Следовательно, соотношение (11) верно и при $k=k_0$.

Необходимость. Пусть

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right):\widetilde{L}_{k_0+l}\supset\widetilde{L}_{k_0}$$

для некоторых $l,k_0\in\mathbb{N}_0$. Покажем, что

$$p_l(\xi_1,\xi_2)\not\equiv 0.$$

Предположим обратное, т.е. $p_l(\xi_1,\xi_2)\equiv 0$, тогда

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)=\sum_{\substack{\alpha\in(P)\\|\alpha|\ge l+1}}\gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha_2}.$$

Следовательно, $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\widetilde{L}_{k_0+l} \subset \widetilde{L}_{k_0-1}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие. *Пусть* $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ *– дифференциальный оператор. Если для некоторых* $k_0, l \in \mathbb{N}_0$ $P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) : \widetilde{L}_{k_0+l} \supset \widetilde{L}_{k_0}$, *то для любого целого неотрицательного числа* k

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) : \widetilde{L}_{k+l} \supset \widetilde{L}_k.$$

Доказательство : В силу теоремы 2

$$\sum_{\substack{\alpha \in (P) \\ |\alpha| \leq l}} \gamma_{(\alpha_1,\alpha_2)}(-i\xi_1)^{\alpha_1}(-i\xi_2)^{\alpha_2} \not\equiv 0.$$

Откуда, в силу леммы 3, непосредственно следует утверждение следствия.

Пример 2. Пусть

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial^6}{\partial x^6} + 2i\frac{\partial^3}{\partial x^3}\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^8}{\partial y^8} + \frac{\partial^8}{\partial x^8}.$$

. Так как символ оператора P совпадает с многочленом Q из примера 1, то в силу теоремы 1 уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = g$$

имеет решение $V \in \widetilde{L}_{k+[\frac{32}{3}]} = \widetilde{L}_{k+10}$ для любых $k \in \mathbb{N}_0$ и произвольного многочлена $g \in \widetilde{L}_k$. Заметим, что в силу леммы 3 уравнение

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = g$$

имеет решение $V \in \widetilde{L}_{k+6} \subset \widetilde{L}_{k+10}$, так как $r \equiv \min_{\alpha \in (P)} |\alpha| = 6$.

Авторы выражают свою благодарность профессору Н. Е. Товмасяну за постановку задачи.

Abstract. The paper proves that differential equations with constant coefficients, whose symbols satisfy some estimate near the origin, are solvable in appropriate spaces of polynomials.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер, Анализ линейных дифференциальных операторов, том I, II, Мир, Москва, 1974.

2. Н. Е. Товмасян, "Корректные граничные задачи для системы уравнений в частных производных в полупространстве в классе функций, растущих не быстрее полинома", Изв. НАН Армении, Математика, том 23, № 4, стр. 309 – 324, 1988.
3. А. О. Бабаян, "Задача Дирихле для правильного эллиптического уравнения в единичном круге", Изв. НАН Армении, Математика, том 38, № 6, стр. 38 – 49, 2003.
4. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Наука, Москва 1971.

Поступила 20 января 2006