Известия НАН Армении. Математика, 41, № 4, 2006, 37–42

ОБ ОПЕРАТОРЕ БИЦАДЗЕ

Г. Арутюнян

Institut for Mathematics, Ossietzky University
Oldenburg, Germany
E-mail : harutyunyan@mathematik.uni-oldenburg.de

В работе дается общее решение краевой задачи Робина для более общих операторов второго порядка с оператором Бицадзе как главной частью.

§1. ЗАДАЧА РОБИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ

Пусть $\mathbb{D}$ – единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и ν – вектор внешней нормали к границе $\partial\mathbb{D}$. Общее решение неоднородного уравнения Бицадзе $w_{\bar z \bar z} = f$ for $f \in L_1(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ записывается в виде

$$w(z) = \varphi(z) + \bar z \psi(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\xi d\eta, \tag{1}$$

где φ и ψ – произвольные аналитические функции в $\mathbb{D}$ (см. [1], параграф 5.1). Отсюда получаем

$$w_z(z) = \varphi'(z) + \bar z \psi'(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(\zeta) \frac{\overline{\zeta - z}}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta,$$

$$w_{\bar z}(z) = \psi(z) - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta.$$

Очевидно, что в нашем случае $\partial_\nu w = z w_z + \bar z w_{\bar z}$. Поэтому для заданного $\gamma \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$ из краевого условия Робина (комбинации условий Дирихле и Ньюмана)

$$w + \partial_\nu w = \gamma \quad \text{на} \quad \partial\mathbb{D}$$

следует

$$\varphi(z) + z\varphi'(z) + 2\overline{z}\psi(z) + \psi'(z) =$$

$$= \gamma(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{2\overline{z}\zeta - (|\zeta|^2+1)}{(\zeta - z)^2}\, d\xi\, d\eta, \quad |z| = 1. \tag{2}$$

Далее, добавляя обычное краевое условие

$$w_{\overline{z}} + \partial_\nu w_{\overline{z}} = \gamma_1$$

для заданного $\gamma_1 \in C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$, получим

$$\psi(z) + z\psi'(z) = \gamma_1(z) - \overline{z}f(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\zeta)\frac{\zeta}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta =: \tilde{\gamma}_1(z), \quad |z| = 1. \tag{3}$$

Согласно теореме 7 работы [2], задача Дирихле (3) для аналитической функции $\psi + z\psi'$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \tilde{\gamma}_1(\zeta)\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta} d\zeta = 0, \quad |z| < 1, \tag{4}$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \{\overline{\zeta}f(\zeta) - \gamma_1(\zeta)\}\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta} d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \zeta f(\zeta)\left(\frac{\overline{z}}{1 - \overline{z}\zeta}\right)^2 d\xi d\eta, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

и решение дается с помощью формулы Коши

$$\psi(z) + z\psi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{\gamma}_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad |z| < 1.$$

Из этого комплексного дифференциального уравнения получим

$$\psi(z) = \frac{1}{z}\int_0^z \left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{\gamma}_1(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta} - \zeta} d\tilde{\zeta}\right\} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \tilde{\gamma}_1(\zeta)\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \{\overline{\zeta}f(\zeta) - \gamma_1(\zeta)\}\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z} d\zeta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} f(\tilde{\zeta})\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\tilde{\zeta}}{(\tilde{\zeta} - \zeta)^2}\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z} d\zeta\right\} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta}.$$

Следовательно, так как при $|z| < 1$ внутренний интеграл равен нулю, получаем, что

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \{\overline{\zeta}f(\zeta) - \gamma_1(\zeta)\}\frac{\ln(1 - z\overline{\zeta})}{z} d\zeta. \tag{6}$$

Подстановка (6) в формулу (2) дает

$$\varphi(z)+z\varphi'(z)=\gamma(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\}\left\{\frac{\ln(1-z\overline{\zeta})}{z^2}-\frac{\overline{\zeta}}{z(1-z\overline{\zeta})}\right\}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\frac{2\overline{z}\zeta-(|\zeta|^2+1)}{(\zeta-z)^2}d\xi d\eta=:\tilde{\gamma}(z),\quad |z|=1.$$

Эта задача Дирихле для аналитической функции $\varphi+z\varphi'$ разрешима тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\tilde{\gamma}(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=0,\quad |z|<1. \tag{7}$$

Альтернативно, можно воспользоваться равенствами

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\frac{\ln(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}{\zeta^2}-\frac{\overline{\tilde{\zeta}}}{\zeta(1-\zeta\overline{\tilde{\zeta}})}\right\}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=-2\overline{z\tilde{\zeta}},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\overline{\tilde{\zeta}}\zeta-(|\tilde{\zeta}|^2+1)}{(\tilde{\zeta}-\zeta)^2}\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta=\{2\tilde{\zeta}\overline{z}-(|\tilde{\zeta}|^2+1)\}\left(\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\tilde{\zeta}}\right)^2,$$

чтобы записать соотношение (7) в эквивалентной форме

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}d\zeta-\frac{\overline{z}}{\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\}\overline{\zeta}d\zeta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\{|\zeta|^2+1-2\overline{z}\zeta\}\left(\frac{\overline{z}}{1-\overline{z}\zeta}\right)^2d\xi\, d\eta, \tag{8}$$

и решением будет

$$\varphi(z)+z\varphi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\tilde{\gamma}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

Решая дифференциальное уравнение, как показано выше, получим

$$\varphi(z)=\frac{1}{z}\int_0^z\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{\tilde{\gamma}(\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}-\zeta}d\tilde{\zeta}\right\}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\tilde{\gamma}(\zeta)\frac{\ln(1-z\overline{\zeta})}{z}d\zeta=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\ln(1-z\overline{\zeta})}{z}d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\frac{\ln(1-\overline{\zeta}\tilde{\zeta})}{\tilde{\zeta}^2}-\frac{\overline{\zeta}}{\tilde{\zeta}(1-\overline{\zeta}\tilde{\zeta})}\right\}\frac{\ln(1-z\overline{\tilde{\zeta}})}{z}d\tilde{\zeta}\right]d\zeta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\overline{\zeta}\tilde{\zeta}-(|\zeta|^2+1)}{(\zeta-\tilde{\zeta})^2}\frac{\ln(1-z\overline{\tilde{\zeta}})}{z}d\tilde{\zeta}\right]d\xi d\eta.$$

Можно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\left\{\frac{\ln\left(1-\tilde{\zeta}\zeta\right)}{\tilde{\zeta}^2}-\frac{\zeta}{\tilde{\zeta}\left(1-\tilde{\zeta}\zeta\right)}\right\}\frac{\ln\left(1-z\bar{\tilde{\zeta}}\right)}{z}d\tilde{\zeta}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{k-1}\overline{\zeta}^{k+1}}{k(k+1)}-\frac{\overline{\zeta}}{z}\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)=\frac{\overline{\zeta}}{z}+\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2\overline{\zeta}}{z}\right)\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\bar{\tilde{\zeta}}\zeta-(|\zeta|^2+1)}{\left(\zeta-\tilde{\zeta}\right)^2}\frac{\ln\left(1-z\bar{\tilde{\zeta}}\right)}{z}d\tilde{\zeta}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\frac{2\bar{\tilde{\zeta}}\zeta-(|\zeta|^2+1)}{\left(\bar{\tilde{\zeta}}\zeta-1\right)^2}\frac{\ln\left(1-z\bar{\tilde{\zeta}}\right)}{z}d\bar{\tilde{\zeta}}=0.$$

Поэтому

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z}d\zeta-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\gamma_1(\zeta)-\overline{\zeta}f(\zeta)\}\frac{z\overline{\zeta}+(1-2z\overline{\zeta})\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z^2}d\zeta. \tag{9}$$

Подставляя (6) и (9) в (1), получим

$$w(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\gamma(\zeta)\frac{\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)}{z}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}}\{\zeta f(\zeta)-\gamma_1(\zeta)\}\left\{\frac{\overline{\zeta}}{z}+\frac{|z|^2-2z\overline{\zeta}+1}{z^2}\ln\left(1-z\overline{\zeta}\right)\right\}d\zeta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}}f(\zeta)\frac{\overline{\zeta-z}}{\zeta-z}d\xi d\eta. \tag{10}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. Краевая задача Робина в единичном диске

$$w_{\bar{z}\bar{z}}=f,\quad f\in L_1(\mathbb{D},\mathbb{C}),$$

$$w+\partial_\nu w=\gamma,\quad w_{\bar{z}}+\partial_\nu w_{\bar{z}}=\gamma_1,\quad \gamma,\gamma_1\in C(\partial\mathbb{D},\mathbb{C}),$$

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда данные функции f,γ,γ_1 удовлетворяют соотношениям (5) и (8). Решение дается формулой (10).

§2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БИЦАДЗЕ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

В этом параграфе мы дадим общее решение для уравнения

$$w_{\bar{z}\bar{z}} + q(z)w_{z\bar{z}} = f, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{11}$$

где $q(z)$ – измеримая функция и $f \in L_p(\mathbb{D})$, $p > 2$. Предположим, что q удовлетворяет сильному условию эллиптичности

$$|q(z)| \leq q_0 < 1.$$

Обозначим $\rho = w_{\bar{z}\bar{z}}$ и заметим, что согласно параграфу 5.1 работы [1]

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \rho(\zeta)\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\xi\, d\eta, \tag{12}$$

где φ и ψ – аналитические функции в $\mathbb{D}$. Следовательно,

$$w_{z\bar{z}}(z) = \psi'(z) + \Pi\rho(z),$$

где

$$\Pi\rho(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta,$$

и уравнение (11) принимает вид

$$\rho(z) + q(z)\psi'(z) + q(z)\Pi\rho(z) = f(z). \tag{13}$$

Используя свойство Π-опеатора (см. параграф 3 работы [3]) функция ρ может быть представлена в виде ряда Ньюмана

$$\rho(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (q\Pi)^k (f - q\psi')(z) =$$

$$= f(z) - q(z)\psi'(z) + q(z)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^k}\int_{\mathbb{D}^k} \frac{f(\zeta_k) - q(\zeta_k)\psi'(\zeta_k)}{(\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{q(\zeta_l)}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2}, \tag{14}$$

где $d\xi_1 d\eta_1 \ldots d\xi_k d\eta_k$ и $\zeta_0 \equiv z$.

Рассмотрим частный случай $q(z) \equiv \mathrm{const} = c$, $z \in \mathbb{D}$, где (14) представляется в виде

$$\rho(z) = f(z) - c\psi'(z) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} c^k \int_{\mathbb{D}} \{f(\zeta_k) - c\psi'(\zeta_k)\} d\xi_k d\eta_k \int_{\mathbb{D}^{k-1}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\xi_{k-1} d\eta_{k-1}.$$

Используя индукцию, найдем, что

$$\int_{\mathbb{D}^{k-1}} \prod_{l=1}^{k-1} \frac{1}{(\zeta_l - \zeta_{l-1})^2} d\xi_1 d\eta_1 \dots d\xi_{k-1} d\eta_{k-1} = k\pi^{k-1} \frac{\overline{(\zeta_k - z)}^{k-1}}{(\zeta_k - z)^{k+1}}.$$

Отсюда, подставляя значение ρ в (12), получим

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \{f(\zeta) - c\psi'(\zeta)\} \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} d\xi\, d\eta +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} kc^k \frac{1}{\pi^2} \int_{\mathbb{D}^2} \{f(\zeta) - c\psi'(\zeta)\} \frac{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}^{k-1}}{(\zeta - \tilde{\zeta})^{k+1}} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} d\xi d\eta. \tag{15}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}^{k-1}}{\left(\zeta - \tilde{\zeta}\right)^{k+1}} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\zeta} d\tilde{\eta} = \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right)^{k+1}. \tag{16}$$

Для этого заметим, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}^{k-1}}{(\zeta - \tilde{\zeta})} \frac{\overline{\tilde{\zeta} - z}}{\tilde{\zeta} - z} d\tilde{\xi} d\tilde{\eta} = \frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}^{k-1} \left(\frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} + \frac{1}{\tilde{\zeta} - z}\right) d\tilde{\zeta} d\tilde{\eta} -$$

$$-\frac{1}{\zeta - z} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \overline{(\zeta - \tilde{\zeta})}^{k} \left(\frac{1}{\zeta - \tilde{\zeta}} + \frac{1}{\tilde{\zeta} - z}\right) d\tilde{\zeta} d\tilde{\eta} = \frac{1}{k(k+1)} \frac{\overline{(\zeta - z)}^{k+1}}{\zeta - z}. \tag{17}$$

Теперь (16) получим при вычислении k-ой производной (17) относительно ζ. Получаем, что (15) принимает вид

$$w(z) = \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k+1} \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \{f(\zeta) - c\psi'(\zeta)\} \left(\frac{\overline{\zeta - z}}{\zeta - z}\right)^{k+1} d\xi d\eta =$$

$$= \varphi(z) + \bar{z}\psi(z) + \frac{1}{c\pi} \int_{\mathbb{D}} \{f(\zeta) - c\psi'(\zeta)\} \ln \left(\frac{\zeta - z}{\zeta - z - c\,\overline{(\zeta - z)}}\right) d\xi d\eta.$$

Abstract. The paper gives the general solution of the Robin boundary value problem for more general second order operators with the Bitsadze operator as a main part.

REFERENCES

1. H. Begehr, Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. An introductory text, World Scientific, Singapore, 1994.
2. H. Begehr, "Boundary value problems in complex analysis I", Bol. Asoc. Mat. Venezolana, vol. 12, pp. 65 – 85, 2005.
3. I. N. Vekua, Generalized Analytic Functions, Pergamon, London, 1962.

Поступила 8 Марта 2006