Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 75-79

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С "ПОЧТИ ТЁПЛИЦЕВЫМИ" МАТРИЦАМИ

А. С. Хачатрян

Армянский государственный педагогический университет
E-mail : anushavan@aport.ru

Рассмотрим бесконечную систему уравнений

$$q_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k, \quad n \in Z, \tag{1}$$

относительно искомого вектора $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$, где компоненты данного вектора $\lambda = (\ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ и данной теплицевой матрицы $A = (a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям :

(a) $a_n \geq 0, \quad n \in Z$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k = 1,$

(b) $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} |k| a_k < \infty$ и $\nu = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k \neq 0,$

(c) $0 \leq \lambda_n \leq 1, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Эти условия могут быть дополнены еще одним из следующих условий :

(d) $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} (1 - \lambda_k) < +\infty,$ когда $\nu > 0,$

(d1) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} (1 - \lambda_k) < +\infty,$ когда $\nu < 0.$

В [1] доказано, что условие (d) или (d1) совместно с условиями (a)-(c) обеспечивают существование ненулевого решения системы (1). Покажем, что условия (a)-(d) (или (a)-(d1)) являются не только достаточными, но и необходимыми для нетривиальной разрешимости системы (1). Для этого сперва докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $\lambda = (\ldots, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots)$ *и* $A = (a_{i-j})_{i,j=0}^{\infty}$ *удовлетворяют условиям (a) – (c), а система (1) обладает ограниченным решением* $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$, *то она имеет также неотрицательное решение* $\bar{q} = (\ldots, \bar{q}_{-1}, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots)$, *где* $\bar{q}_k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

Доказательство. Пусть $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$ – некоторое ограниченное решение системы (1). Тогда

$$|q_n| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} |q_k|, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Рассмотрим следующие итерации

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m)}, \; n \in \mathbb{Z}, \; q^0 = (\ldots, q^*, q^*, q^*, \ldots), \; m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

где $q^* = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} |q_n| < \infty$. Для $m = 0$

$$q_n^{(1)} = q^* \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} \leq q^* = q_n^{(0)}, \quad \text{т.е.} \quad q_n^{(1)} - q_n^{(0)} \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если для некоторого m имеет место неравенство $q_n^{(m)} - q_n^{(m-1)} \leq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, тогда из (3) следует

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m)} \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m-1)} = q_n^{(m)},$$

т.е.

$$q_n^{(m+1)} - q_n^{(m)} \leq 0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Докажем теперь, что неравенство $q_n^{(m)} \geq |q_n|$, $n \in \mathbb{Z}$, верно для любого $m \geq 0$. Действительно, для $m = 0$ имеем $q_n^{(0)} = q^* \geq |q_n|$. Если $q_n^m \geq |q_n|$ $(n \in \mathbb{Z})$ для некоторого m, то

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} q_k^{(m)} \geq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \lambda_k a_{n-k} |q_k| \geq |q_n|.$$

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $q_n^{(m)} \downarrow$ по m и $q_n^{(m)} \geq |q_n|$. Следовательно, существует $\lim_{m \to \infty} q_n = \bar{q}_n$. Кроме того, нетрудно доказать, что вектор $\bar{q} = (\ldots, \bar{q}_{-1}, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \ldots)$ удовлетворяет системе (1).

Предположим, что $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$ является положительным решением системы (1) (существование которого следует из Леммы 1). Из (1) следует, что

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) a_{n-k} q_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} q_k - q_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4}$$

Выберем $r \in N$ так, чтобы $\rho \equiv \sum\limits_{k=-r}^{r} a_n > 0$, и некоторое чётное число S, удовлетворяющее условию $S > 2r$. Суммируя равенства (4) от 0 до S, получим

$$\sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) a_{n-k} q_k = \sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} q_k - \sum_{n=0}^{S} q_n. \tag{5}$$

Оценим левую часть равенства (5). Имеем

$$\sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) a_{n-k} q_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\lambda_k) q_k \sum_{n=0}^{S} a_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1-\lambda_k) q_k \sum_{n=-k}^{S-k} a_n \geq$$

$$\geq \sum_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k) q_k \sum_{n=-r}^{S-k} a_n \geq \rho \sum_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k) q_k.$$

Кроме того, для правой части (5) имеем

$$\sum_{n=0}^{S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} q_k - \sum_{n=0}^{S} q_n = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q_k \sum_{n=-k}^{S-k} a_n - \sum_{n=0}^{S} q_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{k=-n}^{S-n} q_k - \sum_{n=0}^{S} q_n =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=-n}^{0} q_k + \sum_{k=0}^{S} q_k + \sum_{k=S}^{S-n} q_k \right) - \sum_{n=0}^{S} q_n \leq 2q^* \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| a_n,$$

где

$$q^* = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |q_n| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} q_n.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=r}^{S/2} (1-\lambda_k) a_k \leq \frac{2q^*}{\rho} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |n| a_n, \tag{6}$$

где правая часть не зависит от S.

Покажем теперь, что последовательность $q = (\ldots, q_{-1}, q_0, q_1, \ldots)$ монотонно возрастает, если возрастает последовательность λ_n. Действительно, согласно соотношениям (3) имеем

$$q_n^{(m+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \lambda_{n-k} q_{n-k}^{(m)}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

откуда вытекает монотонность последовательности $q_n^{(m+1)}$ по n, когда последовательность $q_n^{(m)}$ монотонно возрастает. В пределе при $m \to +\infty$, получим монотонную последовательность q_n, и, следовательно, величина $\widehat{q} = \inf_{n \geq p} q_n$ положительна при любом целом $p \in \mathbb{Z}$. Применяя это неравенство к сумме $\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k)q_k$, получаем

$$\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k)q_k \geq \widehat{q}\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k)$$

что совместно с (6) даёт

$$\sum_{k=r}^{S/2}(1-\lambda_k) \leq \frac{2q^*}{\widehat{q}\,\rho}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|n|a_n, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{k=r}^{\infty}(1-\lambda_k) < +\infty.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть вектор λ и матрица A системы (1) удовлетворяют условиям (a) – (c) и пусть последовательность λ_n монотонно возрастает. Если, дополнительно предположить, что система (1) имеет ограниченное решение q, то*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(1-\lambda_k) < +\infty.$$

Для $P_n = 1 - \lambda_n q_n$ в силу (1) имеем

$$P_n = (1-\lambda_n)q_n + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}P_k, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Если допустить, что $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(1-\lambda_k) < +\infty$, то последовательность $b_n = (1-\lambda_n)q_n$ будет удовлетворять условиям следующей теоремы (см. [2]).

Теорема (Карлин). *Пусть $(a_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$, $(u_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ и $(b_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ – числовые последовательности, удовлетворяющие условиям*

$$a \geq 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n = 1, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|k|a_k < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ka_k > 0, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|b_n| < \infty,$$

и наибольший общий делитель индексов k, для которых $a_n > 0$, равен 1. Если уравнение

$$u_n - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{n-k}u_k = b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

имеет своим решением ограниченную последовательность u_n действительных чисел, то существуют пределы $\lim_{n\to+\infty} u_n$ и $\lim_{n\to-\infty} u_n$, и

$$\text{если} \quad \lim_{n\to-\infty} u_n = 0, \quad \text{то} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k}.$$

Из этой теоремы следует существование пределов $P_\pm = \lim_{n\to\pm\infty} P_n$ и выполнение соотношения

$$P_+ - P_- = \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) q_k}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k},$$

что влечёт за собой существование пределов $q_\pm = \lim_{n\to\pm\infty} q_n$ и справедливость равенств (т.к. $\lambda_n \to 1$ при $n \to \pm\infty$ и $q_\pm = 1 - P_\mp$)

$$(q_- - q_+) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} k a_k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1-\lambda_k) q_k.$$

Заметим, что непрерывный аналог этого соотношения получен в работе [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Хачатрян, "О разрешимости одной бесконечной системы алгебраических уравнений с матрицей, близкой к теплицевой матрице", Тезисы докладов юбилейной конференции посвящённой 70-летию акад. В. С. Захаряна, Ереван 2006.
2. С. Карлин, Основы Теории Случайных Процессов, Москва, Мир, 1971.
3. Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа свертки" (в печати).

Поступила 29 ноября 2005