Известия НАН Армении. Математика, 41, № 1, 2006, 5–14

К ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИРАКА

Т. Н. Арутюнян

Ереванский государственный университет
E-mail : hartigr@yahoo.co.uk

Резюме. В работе даётся описание случаев, когда обратная задача для канонической системы Дирака решается по меньшему набору спектральных данных чем тот, который требуется для решения обратной задачи в общем случае. Получены некоторые аналоги известной теоремы Амбарцумяна (в обратной задаче Штурма-Лиувилля) для случая системы Дирака.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Если через $\lambda_n(q,\alpha,\beta)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, обозначить собственные значения краевой задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & x \in (0,\pi), \quad q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi], \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 & \alpha \in (0,\pi], \\ y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 & \beta \in [0,\pi), \end{cases}$$

то известная теорема В. А. Амбарцумяна [1] (см. также [2], [3]) гласит :
если $\lambda_n(q,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, то $q(x) = 0$ почти всюду.

Один из вопросов, на которые мы хотели ответить в этой статье, формулируется следующим образом : "**Имеет ли место аналог теоремы Амбарцумяна в случае краевой задачи для канонической системы Дирака ?**", т.е. для задачи на собственные значения ($p, q \in L^1_{\mathbb{R}}[0,\pi]$, $\lambda \in \mathbb{C}$) :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \right\} y = \lambda y, \quad x \in (0,\pi), \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$y_1(0)\cos\alpha + y_2(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{1.2}$$

$$y_1(\pi)\cos\beta + y_2(\pi)\sin\beta = 0, \quad \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \tag{1.3}$$

которую будем называть "задача $L(p, q, \alpha, \beta)$". Известно [4], что собственные значения $\lambda_n = \lambda_n(p, q, \alpha, \beta)$, $n \in \mathbb{Z}$, этой задачи все простые и образуют действительную последовательность, неограниченную ни снизу, ни сверху и имеющую асимптотику ([5]) :

$$\lambda_n(p, q, \alpha, \beta) = n + \frac{\beta - \alpha}{\pi} + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \pm\infty. \tag{1.4}$$

При $p(x) = q(x) \equiv 0$ имеем явный вид собственных значений :

$$\lambda_n(0, 0, \alpha, \beta) = n + \frac{\beta - \alpha}{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1.5}$$

Сразу скажем, что "в общем случае" ответ на вопрос об аналоге теоремы В. А. Амбарцумяна отрицательный, т.е. не существует α_0 и β_0 таких, чтобы из равенств

$$\lambda_n(p, q, \alpha_0, \beta_0) = n + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.6}$$

следовало бы, что $p(x) = q(x) = 0$ почти всюду. Точнее, имеется бесконечное множество "канонических потенциалов", т.е. матриц вида $\Omega = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$, для которых множество собственных значений задач $L(p, q, \alpha_0, \beta_0)$ совпадает с множеством (1.6) при любых α_0 и β_0. Описание множества этих "изоспектральных" потенциалов приведено в работе [6].

В то же время, имеется "бесконечное множество частных случаев", для которых имеют место аналоги теоремы В. А. Амбарцумяна. Например, в конце этой статьи доказано, что :

1) если

$$\lambda_n(0, q, \alpha, 0) = n - \frac{\alpha}{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{1.7}$$

для некоторого $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, то $q(x) = 0$ почти всюду.

2) если

$$\lambda_n\left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right) = n + \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

для некоторого $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, то $p(x) = 0$ почти всюду.

Мы говорим здесь о "бесконечном множестве частных случаев", ибо если в случае задачи Штурма–Лиувилля утверждение имеет место только при $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$, то здесь утверждения верны для некоторых "интервалов значений α".

С другой стороны это "существенно" частные случаи, ибо если в случае задачи Штурма–Лиувилля утверждается, что "потенциал" $q(x) \equiv 0$, то здесь только часть "потенциальной матрицы" $\Omega(x) = \sigma_2\, p(x) + \sigma_3\, q(x)$ (см. ниже §2) обращается в нуль, при условии, что другая часть заранее предполагается "нулевой". Другой более общий вопрос, который рассматривается в этой статье, можно сформулировать следующим образом : "Имеются ли случаи, когда обратную задачу для канонической системы Дирака можно решить меньшим набором спектральных данных, чем тем набором, который требуется в общем случае ?" (см. [5] и [8]). Более строгая формулировка вопроса и ответ на него будут даны в §2.

§2. ФОРМУЛИРОВКИ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

обладают следующими свойствами :

$\sigma_k^* = \sigma_k, \quad k = 1, 2, 3$ (самосопряженность)
$\sigma_k \sigma_j = -\sigma_j \sigma_k, \quad k \neq j$ (антикоммутируемость)
$\sigma_k^2 = E, \quad k = 1, 2, 3$ (E – единичная матрица).

В терминах матриц Паули дифференциальное выражение ℓ, порождающее оператор Дирака, принимает вид

$$\ell = \sigma_1 \frac{1}{i} \frac{d}{dx} + \sigma_2 \cdot p(x) + \sigma_3 \cdot q(x) = B \frac{d}{dx} + \Omega(x),$$

где $B = \frac{1}{i}\sigma_1$, а матрицу-функцию $\Omega(x) = \sigma_2 \cdot p(x) + \sigma_3 \cdot q(x)$ называют потенциалом. Оператор Дирака называют каноническим, если выполняется свойство $B\Omega(x) = -\Omega(x)B$ (см. [7], стр. 30).

Пусть $y = \varphi(x, \lambda, \alpha)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} \ell y = \lambda y, \\ y(0) = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что вектор-функции $\varphi_n(x) \equiv \varphi(x, \lambda_n, \alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$, суть собственные функции задачи $\mathrm{L}(p, q, \alpha, \beta)$. Квадраты L^2-норм этих собственных функций, т.е. величины

$$a_n = a_n(p, q, \alpha, \beta) = \|\varphi_n\|^2 = \int_0^\pi |\varphi_n(x)|^2 dx = \int_0^\pi \left(|\varphi_{n1}(x)|^2 + |\varphi_{n2}(x)|^2\right) dx$$

принято называть нормировочными постоянными [5] (по аналогии со случаем задачи Штурма–Лиувилля, [2]). Множество собственных значений $\lambda_n(p, q, \alpha, \beta) =$

$\lambda_n(\Omega, \alpha, \beta)$ и нормировочных постоянных данной задачи называют также её спектральными данными. Спектральной функцией задачи $\mathrm{L}(p, q, \alpha, \beta)$ называется (см. [5], [8]) определённая на действительной оси λ ступенчатая, возрастающая, непрерывная слева функция $\rho(\lambda)$, имеющая скачки в точках $\lambda = \lambda_n$, равные $\dfrac{1}{a_n}$ (и нормированная условием $\rho(\lambda_0) = 0$). Спектральная функция для регулярной задачи Штурма–Лиувилля определяется аналогично (см. [2]). В случае регулярных задач, знание спектральной функции равнозначно знанию двух последовательностей : последовательности собственных значений и последовательности нормировочных постоянных.

Известно, что в случае задачи Штурма–Лиувилля по спектральной функции можно однозначно и конструктивно восстановить потенциал $q(x)$ и числа α и β, определяющие краевые условия (см. [9] и [2]). В случае задачи Дирака это не так, [8]. Если $\omega(x)$ – абсолютно непрерывная функция, то замена $\psi(x, \lambda) = A(x)\varphi(x, \lambda, \alpha)$, где унитарная матрица

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos\omega(x) & \sin\omega(x) \\ -\sin\omega(x) & \cos\omega(x) \end{pmatrix}$$

сводит систему (1.1) к системе

$$\left\{B\frac{d}{dx} + \tilde{\Omega}(x)\right\}\psi = \lambda\psi,$$

где $\tilde{\Omega}(x) = A^{-1}(x)B\cdot A'(x) + A^{-1}(x)\Omega(x)A(x)$, но оставляет неизменной спектральную функцию, т.е. собственные значения и нормированные постоянные. Условие каноничности, т.е. вид $\tilde{\Omega}(x) = \sigma_2\cdot\tilde{p}(x) + \sigma_3\cdot\tilde{q}(x)$, требует, чтобы $\omega(x) = \mathrm{const} = \omega_0$. Но уже постоянная матрица

$$A = \begin{pmatrix} \cos\omega_0 & \sin\omega_0 \\ -\sin\omega_0 & \cos\omega_0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

преобразует задачу $\mathrm{L}(\Omega, \alpha, \beta)$ в задачу $\mathrm{L}\left(A^{-1}\Omega A, \alpha - \omega_0, \beta - \omega_0\right)$, и у этих двух различных задач одна и та же спектральная функция. Фиксация же одного из краевых условий требует, чтобы $\omega_0 = 0$, т.е. сводит множество унитарных преобразований вида (2.1) к тождественному преобразованию. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на следующую теорему, которая следует из [8] и [5].

Теорема 1.

1) *Если $\lambda_n(\Omega_1, \alpha_1, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha_2, \beta)$ и $a_n(\Omega_1, \alpha_1, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha_2, \beta)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, то $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду и $\alpha_1 = \alpha_2$.*

2) *Потенциальная матрица $\Omega(x) = \sigma_2 p(x) + \sigma_3 q(x)$ однозначно и конструктивно восстанавливается по спектральной функции задачи $L(p, q, \alpha, \beta_0) = L(\Omega, \alpha, \beta_0)$ (т.е. при фиксированном $\beta = \beta_0$).*

В отличие от случая задачи Штурма–Лиувилля, из асимптотической формулы (1.4) для собственных значений задачи $L(\Omega, \alpha, \beta)$ следует, что если $\lambda_n(\Omega_1, \alpha_1, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha_2, \beta)$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\alpha_1 = \alpha_2$ даже если $\Omega_1 \neq \Omega_2$.

В обратной задаче для системы Дирака известна теорема единственности по двум спектрам [5], [10], являющаяся аналогом теоремы Борга для регулярной задачи Штурма–Лиувилля [11 – 14]. Кроме того, известна процедура сведения обратной задачи по двум спектрам к обратной задаче по спектральной функции и, в частности, известны формулы (см. [5]), по которым нормировочные постоянные a_n выражаются по двум спектрам $\{\lambda_n(\alpha, \beta)\}$ и $\{\lambda_n(\gamma, \beta)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\alpha - \gamma| < \pi$. Сформулируем эти известные результаты в следующей теореме (см. [5]).

Теорема 2.

1) *(Единственность). Если $\lambda_n(\Omega_1, \alpha, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \alpha, \beta)$ и $\lambda_n(\Omega_1, \gamma, \beta) = \lambda_n(\Omega_2, \gamma, \beta)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\alpha - \gamma| < \pi$, то $\Omega_1(x) = \Omega_2(x)$ почти всюду.*

2) *(Выражение нормировочных постоянных через два спектра). Для любого $\gamma \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 < |\alpha - \gamma| < \pi$,*

$$a_n(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\lambda_n(\alpha, \beta) - \lambda_n(\gamma, \beta)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_k(\alpha, \beta) - \lambda_n(\alpha, \beta)}{\lambda_k(\gamma, \beta) - \lambda_n(\alpha, \beta)}. \tag{2.2}$$

Обозначим $\Omega^*(x) = -\Omega(\pi - x)$. Если $\Omega(x) = \Omega^*(x)$, то такую потенциальную матрицу мы будем называть нечётной.

Теорема 3.

1. *Для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства*

$$\lambda_{-n}(\Omega^*, \alpha, \beta) = -\lambda_n(\Omega, \beta, \alpha), \tag{2.3}$$

$$a_{-n}(\Omega^*, \alpha, \beta) = a_n(\Omega, \beta, \alpha). \tag{2.4}$$

2. *(Единственность) Если для всех $n \in \mathbb{Z}$*

$$\lambda_{-n}(\tilde{\Omega}, \alpha, \beta) = -\lambda_n(\Omega, \beta, \alpha), \tag{2.5}$$

$$a_{-n}(\tilde{\Omega}, \alpha, \beta) = a_n(\Omega, \beta, \alpha), \tag{2.6}$$

то $\tilde{\Omega}(x) = \Omega^*(x) = -\Omega(\pi - x)$ почти всюду.

3. *"Нечётный" потенциал Ω однозначно и конструктивно восстанавливается по множествам $\{\lambda_n(\Omega,\alpha,\alpha), n>0\}$ и $\{a(\Omega,\alpha,\alpha), n\geq 0\}$ (или $\{\lambda_n(\Omega,\alpha,\alpha), n<0\}$ и $\{a(\Omega,\alpha,\alpha), n\leq 0\}$), т.е. по "половине" спектральных данных.*

Доказательство. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что если $\varphi_n(x)$ есть собственная функция задачи $L(\Omega,\alpha,\beta)$, соответствующая собственному значению λ_n, то $\tilde{\varphi}_n(x)\equiv\varphi_n(\pi-x)$ есть собственная функция задачи $L(\Omega^*,\beta,\alpha)$, соответствующая собственному значению $-\lambda_n$, которое мы пронумеруем номером $-n$, т.е. $-\lambda_n(\Omega,\alpha,\beta)=\lambda_{-n}(\Omega^*,\beta,\alpha)$. То, что у задачи $L(\Omega^*,\beta,\alpha)$ нету других собственных значений, следует из того, что если μ есть собственное значение задачи $L(\Omega^*,\beta,\alpha)$, то $-\mu$ есть собственное значение задачи $L(\Omega,\alpha,\beta)$, что доказывается также, как и выше. Равенство $a_{-n}(\Omega^*,\beta,\alpha)=a_n(\Omega,\alpha,\beta)$ следует из того, что L^2-нормы функций $\varphi_n(x)$ и $\varphi_n(\pi-x)$ совпадают.
Для доказательства второй части теоремы заметим, что при условиях (2.5), (2.6) из (2.3) и (2.4) следует, что спектральные данные задач $L(\tilde{\Omega},\alpha,\beta)$ и $L(\Omega^*,\alpha,\beta)$ совпадают. Согласно Теореме 1 отсюда следует, что $\tilde{\Omega}(x)=\Omega^*(x)$ почти всюду. Если потенциал нечётный, т.е. $\Omega(x)=\Omega^*(x)$, то из уже доказанной первой части следует, что $\lambda_{-n}(\Omega,\alpha,\alpha)=-\lambda_n(\Omega,\alpha,\alpha)$ (в частности, $\lambda_0(\Omega,\alpha,\alpha)=0$) и $a_{-n}(\Omega,\alpha,\alpha)=a_n(\Omega,\alpha,\alpha)$ для всех $n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, зная спектральные данные задачи $L(\Omega,\alpha,\alpha)$ только при положительных (отрицательных) индексах вместе с $a_0(\Omega,\alpha,\alpha)$), мы можем построить спектральную функцию, по которой, уже конструктивно, можно восстановить потенциал $\Omega(x)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4.

1. *Для всех $n\in\mathbb{Z}$ имеют место равенства*

$$\lambda_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta)=-\lambda_n(0,q,\alpha,\beta), \tag{2.7}$$

$$a_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta)=a_n(0,q,\alpha,\beta). \tag{2.8}$$

2. *(Единственность по одному спектру) Если*

$$\lambda_n(0,q_1,\alpha,0)=\lambda_n(0,q_2,\alpha,0) \quad \textbf{для всех} \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

$0<|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$, *то $q_1(x)=q_2(x)$ почти всюду.*

3. *(Восстановление по одному спектру) Потенциал задачи $L(0,q,\alpha,0)$ при $0<|\alpha|<\dfrac{\pi}{2}$ однозначно и конструктивно восстанавливается по одному спектру $\{\lambda_n(0,q,\alpha,0),\ n\in\mathbb{Z}\}$. При этом,*

$$a_n(0,q,\alpha,0)=$$

$$= -\frac{\sin 2\alpha}{\lambda_n(0,q,\alpha,0) - \lambda_{-n}(0,q,\alpha,0)} \prod_{\substack{k=-\infty \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\lambda_n(0,q,\alpha,0) - \lambda_k(0,q,\alpha,0)}{\lambda_n(0,q,\alpha,0) + \lambda_{-k}(0,q,\alpha,0)}. \quad (2.10)$$

4. *Потенциал задачи* $L(0,q,0,0)$ *однозначно и конструктивно восстанавливается по множествам :*
$\{\lambda_n(0,q,0,0),\ n>0\}$ *и* $\{a_n(0,q,0,0),\ n\geq 0\}$ *или* $\{\lambda_n(0,q,0,0),\ n<0\}$ *и* $\{a_n(0,q,0,0),\ n\leq 0\}$.

Доказательство. Пусть φ_n – собственная функция задачи $L(0,q,\alpha,0)$, соответствующая собственному значению $\lambda_n{=}\lambda_n(0,q,\alpha,0)$. Тогда вектор-функция $\tilde{\varphi}_n = \sigma_2\varphi_n$ удовлетворяет уравнению

$$\ell\tilde{\varphi}_n = \left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + \sigma_3\cdot q(x)\right\}\sigma_2\varphi_n(x) = -\sigma_2\left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx} + \sigma_3\cdot q(x)\right\}\varphi_n(x)$$
$$= -\sigma_2\ell\varphi_n = -\sigma_2\lambda_n\varphi_n = -\lambda_n\tilde{\varphi}_n$$

и краевым условиям $(-\alpha,-\beta)$. Отсюда следует (как и при доказательстве Теоремы 3), что $\lambda_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta) = -\lambda_n(0,q,\alpha,\beta)$, $n\in\mathbb{Z}$. Равенство $a_{-n}(0,q,-\alpha,-\beta) = a_n(0,q,\alpha,\beta)$ следует из того, что L^2-нормы φ_n и $\sigma_2\varphi_n$ равны. Для доказательства второй части заметим, что согласно (2.7) и (2.9)

$$\lambda_n(0,q_1,-\alpha,0) = -\lambda_{-n}(0,q_1,\alpha,0) = -\lambda_{-n}(0,q_2,\alpha,0) = \lambda_n(0,q_2,-\alpha,0),\ n\in\mathbb{Z}. \quad (2.11)$$

Таким образом, из совпадения спектров задач $L(0,q_1,\alpha,0)$ и $L(0,q_2,\alpha,0)$ следует совпадение спектров задач $L(0,q_1,-\alpha,0)$ и $L(0,q_2,-\alpha,0)$. Так как из условия $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$ вытекает $\alpha\neq-\alpha$, то согласно Теореме 2, $q_1(x) = q_2(x)$ почти всюду. Для доказательства третьей части достаточно в формуле (2.2) взять $\gamma = -\alpha$ и, учитывая равенства (2.7), из (2.2) получить (2.10). Таким образом, зная (один) спектр задачи $L(0,q,\alpha,0)$ при $0<|\alpha|<\frac{\pi}{2}$, мы знаем и нормировочные постоянные $a_n(0,q,\alpha,0)$, $n\in\mathbb{Z}$, этой задачи и, согласно Теореме 1, можем однозначно и конструктивно восстановить потенциал $\Omega(x) = \sigma_3{\cdot}q(x)$ этой задачи. Для доказательства четвёртой части заметим, что спектр задачи $L(0,q,0,0)$ симметричен относительно начала координат, т.е.

$$\lambda_0(0,q,0,0) = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_{-n}(0,q,0,0) = -\lambda_n(0,q,0,0), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

Кроме того, из (2.8) следует, что $a_{-n}(0,q,0,0) = a_n(0,q,0,0)$, $n\in\mathbb{Z}$. Таким образом, зная указанную в формулировке "половину" спектральных данных задачи $L(0,q,0,0)$, мы знаем и другую "половину", т.е. знаем спектральную функцию, что достаточно для конструктивного восстановления потенциала.

Теорема 5.

1. *Для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеют место равенства*

$$\lambda_n(p,0,\alpha,\beta) = -\lambda_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right),$$
$$a_n(p,0,\alpha,\beta) = a_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right).$$

2. *(Единственность по одному спектру) Если для всех $n \in \mathbb{Z}$*

$$\lambda_n\left(p_1,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = \lambda_n\left(p_2,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{4}\right), \tag{2.12}$$

то $p_1(x) = p_2(x)$ почти всюду.

3. *(Восстановление по одному спектру) При $\alpha \neq \dfrac{\pi}{4}$ потенциал задачи $\mathrm{L}\left(p,0,\alpha,\dfrac{\pi}{4}\right)$ однозначно и конструктивно восстанавливается по одному спектру $\left\{\lambda_n\left((p,0,\alpha,\dfrac{\pi}{4}\right),\ n\in\mathbb{Z}\right\}$. При этом (полагаем* $\mathrm{sign}\ 0 = 1$*)*

$$a_n\left(p,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = (\mathrm{sign}\ \alpha)\frac{\cos 2\alpha}{\lambda_n\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)+\lambda_{-n}\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)}\prod_{\substack{k=-\infty\\k\neq n}}^{\infty}\frac{\lambda_n\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)-\lambda_k\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)}{\lambda_n\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)+\lambda_{-k}\left(\alpha,\frac{\pi}{4}\right)}. \tag{2.13}$$

4. *Потенциал задачи $\mathrm{L}\left(p,0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ (или $\mathrm{L}\left(p,0,-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4}\right)$) однозначно и конструктивно восстанавливается по множествам $\left\{\lambda_n\left(p,0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right),n>0\right\}$ и $\left\{a_n\left(p,0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right),n\geq 0\right\}$ или $\left\{\lambda_n\left(p,0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right),n<0\right\}$ и $\left\{a_n\left(p,0,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right),n\leq 0\right\}$ соответственно. Случай $\left(-\dfrac{\pi}{4},-\dfrac{\pi}{4}\right)$ аналогичен.*

Доказательство. Во-первых заметим, что вектор-функция $\tilde{\varphi}_n = \sigma_3\varphi_n$ удовлетворяет тождеству

$$\ell\tilde{\varphi}_n = \left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+\sigma_2\cdot p(x)\right\}\sigma_3\varphi_n \equiv -\sigma_3\left\{\sigma_1\frac{1}{i}\frac{d}{dx}+\sigma_2\cdot p(x)\right\}\varphi_n$$
$$\equiv -\sigma_3\ell\varphi_n \equiv -\sigma_3\lambda_n\varphi_n = -\lambda_n\tilde{\varphi}_n, \quad n\in\mathbb{Z},$$

и краевым условиям $\left(\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right)$, т.е.

$$\lambda_{-n}(p,0,\alpha,\beta) = -\lambda_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right), \quad n\in\mathbb{Z}.$$

L^2-нормы φ_n и $\sigma_3\varphi_n$ равны ($\tilde{\varphi}_n = \varphi_{-n}\left(p,0,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \alpha)-\alpha,\frac{\pi}{2}(\mathrm{sign}\ \beta)-\beta\right)$). Для доказательства второй части заметим, что (пусть для простоты $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{4}$) при любом $n\in\mathbb{Z}$ имеем

$$\lambda_n\left(p_1,0,\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = -\lambda_{-n}\left(p_1,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) = -\lambda_{-n}\left(p_2,0,\alpha,\frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= \lambda_n \left(p_2, 0, \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{4}\right),$$

и согласно условию $\frac{\pi}{2} - \alpha \neq \alpha$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, т.е. мы имеем совпадение уже двух спектров, откуда, согласно Теореме 2 следует, что $p_1(x) = p_2(x)$ почти всюду. Таким образом, в изучаемом случае задачи $\mathrm{L}\left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right)$ знание одного спектра $\left\{\lambda_n\left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ (при $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$) приводит к знанию второго спектра : $\left\{\lambda_n\left(p, 0, \frac{\pi}{2}(\text{sign } \alpha) - \alpha, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$. Поэтому, подставляя в формуле (2.2) $\gamma = \frac{\pi}{2}(\text{sign } \alpha) - \alpha$, получаем выражение (2.13) для нормировочных постоянных, т.е. знаем спектральную функцию, при помощи которой конструктивно восстанавливаем потенциал.

Относительно четвёртой части теоремы 5 достаточно отметить, что спектр $\left\{\lambda_n\left(p, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right),\ n \in \mathbb{Z}\right\}$ симметричен относительно начала координат. Остальное также, как и в случае доказательства Теоремы 4.

Замечание. Имеется несколько очевидных аналогов теоремы 5, а именно, если условие (2.12) поменять на одно из следующих условий :

$$\lambda_n\left(p_1, 0, \frac{\pi}{4}, \beta\right) = \lambda_n\left(p_2, 0, \frac{\pi}{4}, \beta\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$\lambda_n\left(p_1, 0, -\frac{\pi}{4}, \beta\right) = \lambda_n\left(p_2, 0, -\frac{\pi}{4}, \beta\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$\lambda_n\left(p_1, 0, \alpha, -\frac{\pi}{4}\right) = \lambda_n\left(p_2, 0, \alpha, -\frac{\pi}{4}\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и соответственно поменять пункт 3, то теорема опять верна.

Аналогично, условие (2.9) Теоремы 4 можно заменить на

$$\lambda_n(0, q_1, 0, \beta) = \lambda_n(0, q_2, 0, \beta), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < |\beta| < \frac{\pi}{2},$$

и соответственно поменять пункт 3.

Наконец обратимся к аналогам теоремы Амбарцумяна, о которых говорилось во введении и которые оказываются следствиями теорем 4 и 5.

Следствие А. Если $\lambda_n(0, q, \alpha, 0) = n - \frac{\alpha}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\alpha| < \frac{\pi}{2}$ или $\lambda_n(0, q, 0, \beta) = n + \frac{\beta}{\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, $0 < |\beta| < \frac{\pi}{2}$, то $q(x) = 0$ почти всюду.

Доказательство. С учетом равенства (1.5), достаточно взять $q_2(x) \equiv 0$ в пункте 2 Теоремы 4.

Следствие Б. *Если* $\lambda_n\left(p, 0, \alpha, \frac{\pi}{4}\right) = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$, *то* $p(x) = 0$ *почти всюду*.

Доказательство. С учетом равенства (1.5), достаточно взять $p_2(x) \equiv 0$ в пункте 2 Теоремы 5.

Из вышеприведенного Замечания следует, что имеют место три других аналога теоремы Амбарцумяна для системы Дирака в соответствующих частных случаях.

Abstract. The paper gives a description of the cases where the inverse problem for Dirac's canonical system is solvable by spectral data less than required for the solvability in the general case. Some analogs of Ambartsumian's well-known theorem (in the inverse Sturm-Liouville problem) are obtained for Dirac's system case.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. A. Ambartzumian, "Über eine Frage der Eigenwerttheorie", Z. Physik, vol. 53, pp. 690 – 695, 1929.
2. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1 – 63, 1964.
3. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem. II", Comm. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 1–11, 1984.
4. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Введение в Спектральную Теорию, Москва, 1970.
5. М. Г. Гасымов, Т. Т. Джабиев, "Определение системы дифференциальных уравнений Дирака по двум спектрам", Труды летней школы по спектральной теории операторов, Баку, Элм., стр. 46–71, 1975.
6. Т. Н. Арутюнян, "Изоспектральные операторы Дирака", Изв. НАН Армении, Математика, том 29, № 2, стр. 1 – 10, 1994.
7. В. А. Марченко, Операторы Штурма–Лиувилля и Их Приложения, Киев, 1977.
8. М. Г. Гасымов, Б. М. Левитан, "Обратная задача для системы Дирака", ДАН СССР, том 167, № 5, стр. 967 – 970, 1966.
9. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории дифференциальных операторов второго порядка. I", Труды ММО, том I, стр. 327–420, 1952.
10. М. М. Маламуд, "О теоремах типа Борга для систем первого порядка на конечном интервале", Функц. анализ и его приложения, том 33, вып. 1, стр. 75 – 80, 1999.
11. G. Borg, "Eine Umkerhung der Sturm-Liouvillsche Eigenwertaufgabe", Acta Math., vol. 78, no. 1, pp. 1 – 96, 1946.
12. N. Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", Math. Tidsskr., B, pp. 25–30, 1949.
13. Л. А. Чудов, "Обратная задача Штурма–Лиувилля", Мат. сборник, том 25 (67), № 3, стр. 451 – 454, 1949.
14. O. H. Hald, "The inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potentials", Acta Math., vol. 141, no. 3 - 4, pp. 263 – 291, 1978.

Поступила 21 сентября 2005