Посвящается профессору Вен Гуо Чуну
в связи с его 75-летием

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

А. П. Солдатов

Белгородский государственный университет
E-mail : soldatov@bsu.edu.ru

Резюме. В статье рассмотрена задача Дирихле для эллиптических систем второго порядка с постоянными главными коэффициентами на кусочно-гладких областях комплексной плоскости. Приведены критерий Фредгольма и формула индекса в пространствах Гельдера и некоторые примеры эллиптических систем, в которых индекс задачи Дирихле не обращается в ноль.

§1. ФОРМУЛА ИНДЕКСА

Рассмотрим эллиптическую систему

$$A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{21}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1)$$

где коэффициенты $A_{ij} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ суть постоянные, а $u = (u_1, \dots, u_l) \in C^2$ – неизвестная векторнозначная функция. Для этой системы, задача Дирихле

$$u|_{\partial D} = f \quad (1.2)$$

для областей D с гладкой границей, впервые исследована Бицадзе в работе [1], где был введен класс так-называемых слабо связанных эллиптических систем. Задача (1.1), (1.2) является фредгольмовой тогда и только тогда, когда система (1.1) из этого класса, а индекс задачи есть ноль. Для эллиптических систем общего вида задача Дирихле исследовалась многими авторами (Товмасян [2, 3],

Вольперт [4], Бегер и Уси [5], Сираждинов [6], Бурский [7]). Упомянутые слабо связанные системы могут быть описаны следующим образом (см. [8]). Пусть σ — множество корней характеристического уравнения

$$\det P(z) = 0, \quad P(z) = A_{11} + z(A_{12} + A_{21}) + z^2 A_{22},$$

в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Обозначая кратность корня $\nu \in \sigma$ через l_ν , получаем

$$\det P(z) = \det A_{22} \prod_{\nu \in \sigma} (z - \nu)^{l_\nu} (z - \bar{\nu})^{l_\nu}, \quad \sum_{\nu \in \sigma} l_\nu = l.$$

Существуют матрицы $B, J \in \mathbb{C}^{l \times l}$ такие, что

$$\det \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ B, J & \bar{B}, J \end{pmatrix} \neq 0, \quad \det (z - J) = \prod_{\nu \in \sigma} (z - \nu)^{l_\nu}, \quad (1.3)$$

$$A_{22} B, J^2 + (A_{12} + A_{21}) B, J + A_{11} B = 0,$$

и матрица J может быть выбрана так, чтобы имела форму Жордана. В этих обозначениях следующие условия эквивалентны :

- 1) система (1.1) слабо связанная,
- 2) $(\det \int_{\mathbb{R}} P^{-1}(t) dt \neq 0)$,
- 3) $\det B \neq 0$.

В настоящей статье рассматривается задача Дирихле в области D с кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D$. Хотя работы [9 – 12] близки к тематике нашей статьи, тем не менее мы следуем работе [13], где изучалась более общая задача Бицадзе-Самарского, в частности, мы предполагаем, что (1.1) слабо связана. Напомним определения весовых пространств Гельдера и некоторые результаты работы [13], которые важны для рассматриваемой задачи.

Пусть $F \subseteq \Gamma$ — конечное множество точек, содержащее все угловые точки, и пусть $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ — некоторое множество действительных чисел. Пусть $C_\lambda^\mu(\bar{D}, F)$, $0 < \mu < 1$ — пространство всех функций $\varphi \in C(\bar{D} \setminus F)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi_*(z) = \varphi(z) \prod_{\tau \in F} |z - \tau|^{\mu - \lambda_\tau} \in C^\mu(\bar{D}), \quad \varphi_*|_F = 0:$$

оно является банаховым пространством с нормой $|\varphi| = |\varphi_*|_{C^\mu}$. Кроме того, это пространство является весовым в следующем смысле : элементы $\varphi \in C_0^\mu$ ограничены и умножение $\varphi \rightarrow \rho\varphi$ на весовую функцию $\rho(z) = \prod_{\tau \in F} |z - \tau|^{\lambda_\tau}$ является изоморфизмом между C_0^μ и C_λ^μ . Через $C_\lambda^{1-\mu}$ обозначим подпространство C_λ^μ функций $\varphi \in C^1(\bar{D} \setminus F)$ с частными производными $\varphi_x, \varphi_y \in C_{\lambda-1}^\mu(\bar{D}, F)$ и рассмотрим

конечномерное разложение $C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F) \supseteq C_{\lambda}^{\mu}(\bar{D}, F)$ полиномами $p(z)$ комплексного переменного z . Это разложение образует пространство Банаха относительно соответствующей нормы, а пространство $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$ определяется аналогичным образом. Очевидно, что всякая функция $\varphi(z) \in C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$ непрерывна в $\bar{D} \setminus \{\tau \in F, \lambda_{\tau} > 0\}$ и при $z \rightarrow \tau$ либо $\varphi(z) = O(1)|z - \tau|^{\lambda_{\tau}}$, если $\lambda_{\tau} \leq 0$, либо $\varphi(z) = \varphi(\tau) + O(1)|z - \tau|^{\lambda_{\tau}}$ в противном случае. Например, функция $\varphi \in C^1(\bar{D} \setminus F)$ принадлежит $C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$, $\lambda < 1$, если её производные имеют порядок $O(1)|z - \tau|^{\lambda_{\tau} - 1}$ при $z \rightarrow \tau$. Вложения

$$C^{\mu}(\bar{D}) \subseteq C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F) \quad (\lambda \leq \mu) \quad \text{и} \quad C^{1,\mu}(\bar{D}) \subseteq C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\bar{D}, F) \quad (\lambda \leq 1 + \mu)$$

являются обратимыми для $\lambda = \mu$ и $\lambda = 1 + \mu$.

Аналогичные определения могут быть введены для функций, заданных на кусочно-гладких контурах Γ . Очевидно, сужение оператора $\varphi \rightarrow \varphi|_{\Gamma}$ является ограниченным отображением $C_{\lambda}^{\mu}(\bar{D}, F) \rightarrow C_{\lambda}^{\mu}(\Gamma, F)$, а аналогичное утверждение для пространств $C_{(\lambda)}^{\mu}$ и для пространств с символом $C^{1,\mu}$ верно, при некоторых дополнительных требованиях на Γ . Скажем, что пара (Γ, F) принадлежит классу $C^{1,\mu}$, если гладкая дуга $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, не содержащая внутри себя точки $\tau \in F$, принадлежит $C^{1,\mu}$. Если $(\Gamma, F) \in C^{1,\mu}$, то сужение оператора $\varphi \rightarrow \varphi|_{\Gamma}$ является ограниченным отображением $C_{\lambda}^{1,\mu}(\bar{D}, F) \rightarrow C_{\lambda}^{1,\mu}(\Gamma, F)$, и аналог этого факта имеет место для пространств $C_{(\lambda)}^{1,\mu}$.

Всегда будем предполагать, что Γ не имеет точек возврата, а пара (Γ, F) принадлежит $C^{1,\mu+\epsilon}$ (т.е. пространству $C^{1,\mu+\epsilon}$ для некоторого $\epsilon > 0$). Кроме того, рассмотрим задачу Дирихле в классе $u \in C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$, $0 < |\lambda| < 1$ (т.е. $0 < |\lambda_{\tau}| < 1$ для всех $\tau \in F$). Это означает, что общее решение уравнения (1.1) можно представить в виде

$$u = \operatorname{Re} B\phi, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} - J \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (1.4)$$

где $\phi \in C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$, а B, J — матрицы из (1.3) (см. [13]). В [14] решения ϕ эллиптической системы первого рода (1.4) называются J -аналитическими (или гипераналитическими) функциями.

При достаточно малых $r > 0$ область $D_r = D \cap \{|z - \tau| < r\}$ является криволинейным сектором с вершиной τ . Кроме того, при некоторых предположениях на Γ , угол θ_r упомянутого сектора удовлетворяет неравенству $0 < \theta_r < 2\pi$, а кривая $\Gamma_r = \Gamma \cap \{|z - \tau| < r\}$ содержит две гладкие дуги $\Gamma_{r\pm 0}$, которые являются боковыми сторонами области D_r . Обозначим через $q_{r\pm 0} \in \mathbb{C}$ вектор, касающийся $\Gamma_{r\pm 0}$ в точке τ , для которого $\theta_r = \arg q_{r-0} - \arg q_{r+0}$ и

$$q_r = q_{r-0} q_{r+0}^{-1} = e^{i\theta_r}. \quad (1.5)$$

Будем писать

$$z_j = x1 + yJ, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad (1.6)$$

где 1 означает единичную $l \times l$ -матрицу, и в силу (1.3) число $z_\nu = z + \nu y$, $\nu \in \sigma$, является собственным значением матрицы z_j , с кратностью l_ν . Рассмотрим также матрицу

$$Q_\tau = q_{\tau-0,j} q_{\tau+0,j}^{-1} \quad (1.7)$$

с собственными значениями

$$q_{\tau(\nu)} = q_{\tau-0,\nu} q_{\tau+0,\nu}^{-1} = \theta_{\tau(\nu)} e^{i\theta_{\tau(\nu)}}, \quad \nu \in \sigma. \quad (1.8)$$

кратностей l_ν . Напомним, что $\text{Im } \nu > 0$ и $\nu \in \sigma$, и поэтому, аффинное преобразование $z \rightarrow z_\nu$ инвариантно в верхней полуплоскости и следовательно оно не меняет направление плоскости. Следовательно, угол сектора $D_{\tau(\nu)} = \{z_\nu, z \in D_\tau\}$ равен аргументу $\theta_{\tau(\nu)}$ в (1.8). Дополнительно заметим, что неравенство $\theta_{\tau|\nu|} < \pi$ ($= \pi, > \pi$) равносильно $\theta_\tau < \pi$ ($= \pi, > \pi$).

С (1.7) связываем комплексные степени $Q_\tau^\zeta = e^{\zeta \ln Q_\tau}$, $\bar{Q}_\tau^\zeta = e^{\zeta \ln \bar{Q}_\tau}$, под которыми понимаем функции, зависящие от матриц, а также рассматриваем матрично-значные функции

$$X_\tau(\zeta) = \zeta^{-1} [Q_\tau^\zeta (B^{-1} \bar{B}) - (B^{-1} \bar{B}) \bar{Q}_\tau^\zeta], \quad Y_\tau(\zeta) = \zeta^{-1} (Q_\tau^\zeta - \bar{Q}_\tau^\zeta), \quad (1.9)$$

которые аналитичны на всей плоскости. Очевидно

$$\det Y_\tau(\zeta) = \zeta^{-l} \prod_{\nu \in \sigma} (q_{\tau(\nu)}^\zeta - \bar{q}_{\tau(\nu)}^\zeta)^{l_\nu} = (2i)^l \prod_{\nu \in \sigma} \left[\frac{\sin \theta_{\tau(\nu)} \zeta}{\zeta} \right]^{l_\nu} \quad (1.10)$$

В частности, $\det Y_\tau(\zeta) \neq 0$ в полосе $|\text{Re } \zeta| \leq \delta$ при достаточно малых $\delta > 0$.

На каждой полосе $\alpha_1 \leq \text{Re } \zeta \leq \alpha_2$ матричнозначная функция $X_\tau(\zeta) Y_\tau^{-1}(\zeta) \rightarrow B^{-1} \bar{B}$ при $\text{Im } \zeta \rightarrow \infty$ равномерно по $\text{Re } \zeta$, и поэтому, число корней $\det X_\tau(\zeta)$ конечно в таких полосах. Через $n_\tau(\alpha)$ обозначим число корней (включая их кратности) упомянутой функции в открытой полосе между прямыми $\text{Re } \zeta = 0$ и $\text{Re } \zeta = \alpha$, $\alpha \neq 0$, и предположим, что n_τ^0 имеет то же самое значение на прямой $\text{Re } \zeta = 0$. Предположим, что $\delta > 0$ достаточно мало, чтобы допускать $n_\tau(\delta) = n_\tau(-\delta) = 0$ для всех τ и положим

$$\Delta_\tau^\pm = \frac{1}{2\pi} \arg \left(\frac{\det X_\tau}{\det Y_\tau} \right) \Bigg|_{\pm i - i\infty}^{\pm i + i\infty} \quad (1.11)$$

По теореме Руше, целые числа $\Delta_r^\pm$ связаны следующим равенством

$$\Delta_r^+ - \Delta_r^- = n_r^0. \quad (1.12)$$

Теорема 1.1. Задача Дирихле (1.1), (1.2) Фредгольмова в классе $C_{(\lambda)}^\mu$ ($0 < |\lambda| < 1$) тогда и только тогда, когда

$$\det X_r(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = \lambda_r, \quad \tau \in F, \quad (1.13)$$

а индекс задается формулой

$$\kappa = - \sum_{r \in F} [\Delta_r^\pm \pm n_r(\lambda_r)], \quad (1.14)$$

где знак $\pm$ совпадает с знаком $\operatorname{sgn} \lambda_r$. Кроме того, если (1.13) выполнено, то всякое решение $u \in C_{(\lambda)}^\mu(\bar{D}, F)$ задачи с правой частью $f \in C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\Gamma, F)$ принадлежит классу $C_{(\lambda)}^{1,\mu}(\bar{D}, F)$.

Доказательство. Задача Дирихле (1.1), (1.2) совпадает с частным случаем $b = 0$ задачи Бицадзе–Самарского, рассмотренной в работе [13]. Поэтому, конечный символ $X(\zeta)$ этой задачи является блок-диагональной матрицей

$$X(\zeta) = \operatorname{diag} (X(\zeta; \tau), \tau \in F), \quad X(\zeta; \tau) = \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ BQ_\zeta & \bar{B}Q_\zeta \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

По Теореме 3 из [13], задача Фредгольмова тогда и только тогда, когда

$$\det X(\zeta; \tau) \neq 0, \quad \operatorname{Re} \zeta = \lambda_r, \quad \tau \in F, \quad (1.16)$$

а индекс задается формулой

$$\kappa = - \sum_{r \in F} [\bar{\Delta}_r^\pm \pm \bar{n}_r(\lambda_r)], \quad (1.17)$$

где $\bar{\Delta}_r^\pm$ и $\bar{n}_r(\alpha)$ определяются как и раньше для $X(\zeta; \tau)$. Этот результат исследован в [13] когда все компоненты λ_r совпадают, и имеет аналогичное доказательство в общем случае.

Сравнивая (1.9) и (1.15), можно заметить, что

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ Q_\zeta B^{-1} & -B^{-1} \end{pmatrix} X(\zeta; \tau) = \begin{pmatrix} 1 & B^{-1}\bar{B} \\ 0 & \zeta X_r(\zeta) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

причем аналог этой формулы имеет место для Y_r и $Y(\zeta; \tau)$. В силу этих формул условие (1.16) эквивалентно (1.13), а из (1.17) вытекает (1.14).

Следствие 1.1. Пусть Γ — гладкий контур. Тогда задача Дирихле (1.1), (1.2) фредгольмова в классах $C_{(\lambda)}^{\mu}(\bar{D}, F)$ ($0 < |\lambda| < 1$), а индекс этой задачи равен 0.

Доказательство. Если точка $\tau \in F$ регулярна, то $q_{\tau-0} = -q_{\tau+0}$, и поэтому матрица (1.7) является числом и равно -1 . Следовательно, $Q_{\tau}^{\pm} = e^{\pm i\zeta}$, $\bar{Q}_{\tau}^{\pm} = e^{-\pm i\zeta}$ в (1.9) принимает вид $X_{\tau}(\zeta) = Y_{\tau}(\zeta)(B^{-1}\bar{B})$, $Y_{\tau}(\zeta) = e^{\pm i\zeta} - e^{-\pm i\zeta}$. Таким образом, условие (1.13) выполняется для всех $0 < |\lambda| < 1$, а из (1.14) следует $\kappa = 0$.

Используя равенство (1.18), можно переформулировать Теорему 4 из [13], касающуюся асимптотики решения u . Для этого, введем классы

$$C_{(\lambda+0)}^{\mu} = \cup_{\epsilon>0} C_{(\lambda+\epsilon)}^{\mu}, \quad C_{(\lambda-0)}^{\mu} = \cap_{\epsilon>0} C_{(\lambda-\epsilon)}^{\mu}$$

которые кратко будем обозначать $C_{(\lambda+0)}^{\mu}$ и $C_{(\lambda-0)}^{\mu} = C_{-0}^{\mu}$, если $\lambda = 0$. Например,

$$(z - \tau)_{\zeta_0}^{\alpha} [\ln(z - \tau)]^j \in C_{(\alpha+0)}^{\mu}, \quad \operatorname{Re} \zeta_0 = \alpha, \quad j = 0, 1, \dots$$

для матричнозначных J -аналитических функций. Если функция $\det X_{\tau}(\zeta)$ имеет ноль в точке ζ_0 , то матричнозначная функция $X_{\tau}^{-1}(\zeta)$ имеет полюс в точке ζ_0 некоторой степени $r(\zeta_0) \geq 1$. Чтобы описать асимптотическое поведение решений $u(z)$ в криволинейных секторах D_{τ} при $z \rightarrow \tau$, рассмотрим специальную J -аналитическую функцию $\phi_{\tau}(z; \alpha)$ для $\alpha \neq 0$, определенную формулой

$$\phi_{\tau}(z; \alpha) = \sum_{\operatorname{Re} \zeta_0 = \alpha} \sum_{j=0}^{r(\zeta_0)-1} (z - \tau)_{\zeta_0}^{\alpha} [\ln(z - \tau)]^j c_j(\zeta_0), \quad c_j(\zeta_0) \in \mathbb{C}^d, \quad (1.19)$$

где сумма распространена по всем нулям ζ_0 функции $\det X_{\tau}(\zeta)$, лежащим на прямой $\operatorname{Re} \zeta_0 = \alpha$. Если $\alpha = 0$, то к точкам ζ_0 добавим начало координат $\zeta = 0$, и будем писать $r(0) = 0$ при $\det X_{\tau}(0) \neq 0$. Тогда мы получаем

$$\phi_{\tau}(z; 0) = \sum_{\operatorname{Re} \zeta_0 = 0, \zeta_0 \neq 0} \sum_{j=0}^{r(\zeta_0)-1} (z - \tau)_{\zeta_0}^{\alpha} [\ln(z - \tau)]^j c_j(\zeta_0) + \sum_{j=0}^{r(0)} [\ln(z - \tau)]^j c_j(0). \quad (1.19^0)$$

Заметим, что в обоих случаях $\phi'_{\tau}(z) \in C_{\alpha-1-0}^{\mu}(D_{\tau}, \tau)$.

Теорема 1.2. Пусть $u \in C_{(\lambda-0)}^{\mu}(\bar{D}, F)$ есть решение задачи Дирихле (1.1), (1.2) (или, более точно, $\phi \in C_{(\lambda-0)}^{\mu}(\bar{D}, F)$ в представлении (1.4) этого решения). Кроме того, пусть правая часть f принадлежит $C_{(\lambda,+0)}^{\mu}(\Gamma_{\tau}, \tau)$ для некоторого $\tau \in F$. Тогда существует функция $\phi_{\tau}(z, \lambda_{\tau})$ вида (1.19) или (1.19⁰) такая, что

$$u_{\tau} = u - \operatorname{Re} B\phi_{\tau} \in C_{\lambda+0}^{\mu}(\bar{D}_{\tau}, \tau). \quad (1.20)$$

Если, дополнительно, $f \in C_{(\lambda_{r+0})}^{1,\mu}(\Gamma_r, \tau)$, то $u_r \in C_{(\lambda_{r+0})}^{1,\mu}(\bar{D}_r, \tau)$.

Доказательство: Теорема 4 из [13] приводит к аналогичному результату для конечного символа (1.15). Действительно, степень $r(\zeta)$ в (1.19) должна меняться с степенью $\bar{r}(\zeta_0)$ полюса $X^{-1}(\zeta; \tau)$ в точке ζ_0 . Следовательно, различие между случаями $\alpha \neq 0$ и $\alpha = 0$ исчезает. Соотношение (1.18) показывает, что

$$\bar{r}(\zeta_0) = \begin{cases} r(\zeta_0), & \text{если } \zeta_0 \neq 0, \\ r(\zeta_0) + 1, & \text{если } \zeta_0 = 0. \end{cases}$$

откуда следует требуемое утверждение.

Следствие 1.2. Если $n_r^0 = 0$, т.е. $\det X_r(\zeta) \neq 0$ при $\operatorname{Re} \zeta = 0$, то всякое решение $u \in C_{-0}^\mu$ задачи Дирихле (1.1), (1.2) с правой частью $f \in C_{(+0)}^\mu(\Gamma_r, \tau)$ принадлежит классу $C_{(+0)}^\mu(\bar{D}_r, \tau)$.

§ 2. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Мы отметили, что если функция $\zeta^l \det X_r(\zeta)$ чётна, то целые числа $\Delta_r^\pm$ могут быть вычислены явно. В этом случае частное $\det X / \det Y$ чётно и поэтому целые числа (1.11) имеют противоположные знаки. Таким образом, в силу (1.12), получаем

$$\Delta_r^\pm = \pm \frac{1}{2} n_r^0. \quad (2.1)$$

Тем же рассуждениями можно доказать, что $n_r(\alpha) = -n_r(-\alpha)$, и следовательно индексы задачи Дирихле (1.1), (1.2) в классах $C_{(\pm\lambda)}^\mu$ являются противоположными числами.

Далее предположим, что система (1.1) сопряжённая в смысле Лагранжа:

$$A_{ij}^T = A_{ji}, \quad (2.2)$$

где T означает матричную транспозицию. Рассмотрим систему (1.1), (2.2) в классах $C_{-0}^\mu = C_{(-0)}^\mu$ и $C_{(+0)}^\mu$. В силу Теорем 1.1 и 1.2, класс $V^\pm \subseteq C_{(\pm 0)}^\mu$ всех решений однородной задачи является пространством конечной размерности, содержащийся в $C_{(\pm 0)}^{1,\mu}$, и частности, для конормальной производной

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^2 n_i A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \in C_{-1\pm 0}^\mu(\Gamma, F), \quad v \in V^\pm, \quad (2.3)$$

где n_1 and n_2 суть компоненты внешней нормали. Поэтому произведение внешней нормали и произвольной функции $C_{(\mp 0)}^\mu$ принадлежит $C_{-1+0}^\mu(\Gamma, F)$, и следовательно, является интегрируемой. Здесь произведение uv двух l -векторов u и v есть скалярное произведение $u_1 v_1 + \dots + u_l v_l$.

Теорема 2.1. Пусть (1.1), (2.2) – слабо связанная система и пусть (2.1) верно для всех $\tau \in F$. Тогда условия

$$\int_{\Gamma} f \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0, \quad v \in V^{\mp}, \quad (2.4^{\pm})$$

являются необходимыми и достаточными для разрешимости задачи Дирихле в классе $C_{(\pm 0)}^{\mu}$. Кроме того, индекс $\kappa^{\pm}$ задачи задается формулой

$$\kappa^{\pm} = \dim V^{\pm} - \dim V^{\mp} = \mp \frac{1}{2} \sum_{\tau} n_{\tau}^0. \quad (2.5)$$

Доказательство : Согласно (2.2), тождество

$$\sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) v - u \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right] = 0,$$

выполняется для всех решений u, v системы (1.1). Поэтому, если $u \in C_{(\pm 0)}^{1,\mu}$, $v \in C_{(\mp 0)}^{1,\mu}$, то вышеприведенное выражение в квадратных скобках принадлежит C_{-1+0}^{μ} . Следовательно, по формуле Грина

$$\int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) v - u \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] ds = 0,$$

где использовано обозначение (2.3). В частности, условия (2.4[±]) являются необходимыми для разрешимости этой задачи в классе $C_{(\pm 0)}^{1,\mu}$. Тот же самый факт верен также в классе $C_{(\pm 0)}^{\mu}$.

На следующем шаге покажем, что число линейно независимых условий (2.4[±]) равно $\dim V^{\mp}$, т.е. линейная операция $v \rightarrow \partial v / \partial \nu$ является взаимно-однозначным соответствием в классе $V = V^{-}$. Если $\partial v / \partial \nu = 0$ на Γ для функции $v \in V$, то в силу (2.4) и равенства $v|_{\Gamma} = 0$, приходим к следующей системе линейных уравнений :

$$(n_1 A_{11} + n_2 A_{21}) v_x + (n_1 A_{12} + n_2 A_{22}) v_y = 0, \quad -n_2 v_x + n_1 v_y = 0 \quad (2.6)$$

где v_x и v_y принадлежат Γ . Матрица коэффициентов этой системы удовлетворяет равенству

$$\begin{pmatrix} \sum_i n_i A_{i1} & \sum_i n_i A_{i2} \\ -n_2 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1 = \sum_{i,j} n_i n_j A_{ij}, \quad Q_2 = \sum_i n_i (n_1 A_{i2} - n_2 A_{i1}).$$

Из эллиптичности и условия $\det Q_1 \neq 0$ для (1.1) следует, что система (2.6) имеет только тривиальное решение: $v_x = v_y = 0$ на Γ . Рассматривая теперь представление (1.4) для v , заметим, что обратная формула задается равенством

$$\phi = 2 \left(C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ B.I & \bar{B}J \end{pmatrix}^{-1}$$

(см. [14]). Таким образом, производная ϕ' равна нулю на Γ , и оттуда по теореме Коши для J -аналитических функций (см. [14]) следует, что $\phi' \equiv 0$ в D , и поэтому $v \equiv 0$.

Формулы (2.4 $^\pm$) определяют $\dim V^\mp$ линейно независимых условий ортогональности. Из (2.1) и Теоремы 1.1 следует, что в $C_{(\pm)}^\mu$ индекс $\alpha^\pm = \dim V^\pm - k^\pm$ задачи задается суммой в правой части (2.5). В частности, неравенство $k^\pm \geq \dim V^\mp$ верно для $k^\pm$ условий линейно независимой разрешимости. Следовательно, $0 = \alpha^+ - \alpha^- = (\dim V^+ - k^-) + (\dim V^- - k^+)$, что возможно только при $k^\pm = \dim V^\mp$. Поэтому, все утверждения теоремы доказаны.

Абсолютные значения индексов (2.5) совпадают с размерностью пространства V^0 , участвующего в представлении $V^- = V^0 \oplus V^+$. По Теореме 1.2 каждая базисная функция этого пространства обладает асимптотикой (1.20) с функциями ϕ_τ вида (1.19 0) и $\phi_\tau \neq 0$ по крайней мере для одного $\tau \in F$. Поэтому, $2 \dim V^0 = \sum_\tau n_\tau^0$.

§ 3. ДВЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

В случае $l = 2$ величину $\det X_\tau$ можно вычислить в явном виде. Для этого положим

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{21} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} B_{22} & -B_{12} \\ -B_{21} & B_{11} \end{pmatrix} = (\det B) B^{-1}. \quad (3.1)$$

В этом обозначении

$$B^* \bar{B} = \begin{pmatrix} r & -2ip_2 \\ 2ip_1 & \bar{r} \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} r &= B_{22} \bar{B}_{11} - B_{12} \bar{B}_{21}, \\ p_j &= \operatorname{Im} (B_{1j} \bar{B}_{2j}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$|\det B|^2 = \det B^* \det \bar{B} = |r|^2 - 4p_1 p_2.$$

Согласно (3.1), матрицу B^{-1} в определениях (1.9) функции X_τ можно заменить матрицей B^* . Следовательно

$$\zeta X_\tau(\zeta) = Q_\tau^\zeta (B^* \bar{B}) - (B^* \bar{B}) \bar{Q}_\tau^\zeta. \quad (3.3)$$

Напомним теперь, что матрица J в (1.3) может быть выбрана так, чтобы имела жорданову форму, причём существуют только три возможных случая:

$$J_I = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 \\ 0 & \nu_2 \end{pmatrix} \quad (\nu_1 \neq \nu_2), \quad J_{II} = \begin{pmatrix} \nu & 1 \\ 0 & \nu \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad J_{III} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \nu \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Если $J = J_{III}$, то матрицы Q^ζ и $\bar{Q}^\zeta$ скалярны и (3.3) приводит к равенству $X_r(\zeta) = \zeta^{-1}(Q_r^\zeta - \bar{Q}_r^\zeta)(B^* \bar{B}) = Y_r(\zeta)(B^* \bar{B})$. Поэтому $\det X_r$ и $\det Y_r$ отличаются постоянным множителем и следовательно $\Delta_r^\pm = 0$. Кроме того, если $J = J_{III}$, то система (1.1) приводит к единственному скалярному уравнению. Таким образом, достаточно рассмотреть только первые два случая в (3.4).

В случае $J = J_I$, Q_r из (1.7) является диагональной матрицей, а (1.8) суть диагональные элементы. Обозначая $q_{r(\nu_j)}$ через $q_j = \rho_j e^{i\theta_j}$, ($j = 1, 2$) для краткости, имеем $q_j^\zeta = \rho_j^\zeta e^{i\theta_j \zeta}$, $\bar{q}_j^\zeta = \rho_j^\zeta e^{-i\theta_j \zeta}$ и

$$Q_r^\zeta = \begin{pmatrix} q_1^\zeta & 0 \\ 0 & q_2^\zeta \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_r^\zeta = \begin{pmatrix} \bar{q}_1^\zeta & 0 \\ 0 & \bar{q}_2^\zeta \end{pmatrix}.$$

Согласно (3.2), (3.3),

$$\zeta X_r^\zeta = \begin{pmatrix} r(q_1^\zeta - \bar{q}_1^\zeta) & -2ip_2(q_1^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) \\ 2ip_1(q_2^\zeta - \bar{q}_1^\zeta) & r(q_2^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 \det X_r &= |r|^2 (q_1^\zeta - \bar{q}_1^\zeta)(q_2^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) - 4p_1 p_2 (q_1^\zeta - \bar{q}_2^\zeta)(q_2^\zeta - \bar{q}_1^\zeta) \\ &= |\det B|^2 (q_1^\zeta - \bar{q}_1^\zeta)(q_2^\zeta - \bar{q}_2^\zeta) - 4p_1 p_2 (q_1^\zeta \bar{q}_2^\zeta + q_2^\zeta \bar{q}_1^\zeta - q_1^\zeta \bar{q}_1^\zeta - q_2^\zeta \bar{q}_2^\zeta). \end{aligned}$$

и подобное выражение можно записать для Y_r с $r = \det B = 1$ и $p_j = 0$. Поэтому, некоторыми простыми преобразованиями получаем

$$-\frac{\zeta^2 \det X_r(\zeta)}{4|\det B|^2 \rho_1^\zeta \rho_2^\zeta} = \sin \theta_1 \zeta \sin \theta_2 \zeta - \beta \left[\left(\frac{\rho_1^\zeta}{\rho_2^\zeta} - \frac{\rho_2^\zeta}{\rho_1^\zeta} \right)^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \zeta \right], \quad (3.5_1)$$

$$\beta = \frac{p_1 p_2}{|\det B|^2} = \frac{\operatorname{Im}(B_{11} \bar{B}_{21}) \operatorname{Im}(B_{12} \bar{B}_{22})}{|\det B|^2}.$$

Величина $\beta = \beta(B)$ является инвариантом системы (1.1), т.е. она не зависит от выбора матрицы B в (1.3). Действительно, каждая другая матрица $\bar{B}$ такого типа связана (см. [14]) с B равенствами $\bar{B}_{ij} = \lambda_j B_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 2$, для некоторого $\lambda_j \neq 0$. Следовательно, $\bar{p}_1 \bar{p}_2 = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 p_1 p_2$ и $|\det \bar{B}|^2 = |\lambda_1|^2 |\lambda_2|^2 |\det B|^2$, и поэтому $\beta(\bar{B}) = \beta(B)$. В предыдущих обозначениях (см. [14]) имеем

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ B.J & \bar{B} \bar{J} \end{pmatrix} = |\nu_1 - \nu_2|^2 |\det B|^2 \left(\beta - \frac{\operatorname{Im} \nu_1 \operatorname{Im} \nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|^2} \right).$$

Следовательно, соответствующее условие (1.3) равносильно

$$\beta \neq \frac{\operatorname{Im} \nu_1 \operatorname{Im} \nu_2}{|\nu_1 - \nu_2|^2}. \quad (3.6_1)$$

Можно убедиться, что для любого заданного числа $\beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяющего этому условию, обратная матрица B может быть выбрана так, чтобы имело место (3.5). В силу результатов работы [14], эта матрица определяет единственную эллиптическую систему, удовлетворяющую (1.3), а коэффициенты $A_0 = -A_{22}^{-1}A_{11}$, $A_1 = -A_{22}^{-1}(A_{12} + A_{21})$ этой системы должны удовлетворять следующему соотношению

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A_0 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BJ & \overline{B}J \\ BJ^2 & \overline{B}J^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \overline{B} \\ BJ & \overline{B}J \end{pmatrix}^{-1}, \quad J = J_1.$$

Наконец, если в (3.4) $J = J_{II}$, то приходим к следующим выражениям, где $q = q_{r \pm 0, J}$ (см. (1.7)):

$$q_J = q_\nu \begin{pmatrix} 1 & q_\nu^{-1} \operatorname{Im} q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$Q_r = q_{r(\nu)} \begin{pmatrix} 1 & \delta_r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_r = \frac{\operatorname{Im} q_{r-0}}{q_{r-0}} - \frac{\operatorname{Im} q_{r+0}}{q_{r+0}}.$$

Ввиду (1.5), комплексное число δ_r можно записать в виде

$$\delta_r = \frac{\sin \theta_r}{q_{r-0} q_{r+0}}, \quad (3.7)$$

Таким образом,

$$Q_r^\zeta = q_{r(\nu)}^\zeta \begin{pmatrix} 1 & \delta_r \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{Q}_r^\zeta = \overline{q}_{r(\nu)}^\zeta \begin{pmatrix} 1 & \overline{\delta}_r \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому из (3.2), (3.3) имеем

$$\zeta X(\zeta) = \begin{pmatrix} r(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) + 2ip_1 \delta \zeta q^\zeta & \vdots & -2ip_2(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) + \zeta(\overline{r} \delta q^\zeta - r \overline{\delta} \overline{q}^\zeta) \\ 2ip_1(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) & \vdots & \overline{r}(q^\zeta - \overline{q}^\zeta) - 2ip_1 \overline{\delta} \zeta \overline{q}^\zeta \end{pmatrix},$$

где для краткости $q = q_{r(\nu)}$ и $\delta = \delta_r$. Аналогичное выражение можно записать для Y с $r = 1$ и $p_j = 0$. Простым преобразованием получаем

$$-\frac{\zeta^2 \det X_r(\zeta)}{4|\det B|^2 \rho^2 \zeta} = \sin^2 \theta \zeta - \beta |\delta|^2 \zeta^2, \quad \beta = \frac{p_1^2}{|\det B|^2}. \quad (3.5_{II})$$

Далее, согласно результатам из [14], матрицы $\overline{B}$ и B из (1.3) связаны равенствами $\overline{B}_{11} = \lambda_1 B_{11}$, $\overline{B}_{12} = \lambda_2 B_{11} + \lambda_1 B_{12}$, где $\lambda_1 \neq 0$ и λ_2 суть скаляры. Следовательно,

заключаем как и выше, что величина β является инвариантом уравнения (1.1). Кроме того, из результатов работы [14] имеем

$$\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} B & \bar{B} \\ B.J & \bar{B}.J \end{pmatrix} = |\det B|^2 (\beta - \operatorname{Im}^2 \nu),$$

и поэтому соответствующее условие (1.3) принимает вид

$$\beta \neq \operatorname{Im}^2 \nu. \quad (3.6_{II})$$

Если заданное число β удовлетворяет этому условию а также (3.5_{II}) с обратимой матрицей B , то можно доказать как и выше, что B определяет единственную эллиптическую систему, удовлетворяющую (1.3) с $J = J_{II}$.

Формулы, подобные (3.5), имеют место для $\det Y$ относительно $\det B = 1$ и $\beta = 0$. Они показывают, что функция $\det X(\zeta)$ является чётной и верны равенства (2.1). В связи с этим, важно вычислить число n_r^0 всех нулей функции $\det X(\zeta)$ на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$. Согласно (3.5), эти нули совпадают с нулями функции

$$|\det B|^{-3} \frac{\det X_r}{\det Y_r} = 1 - \beta h, \quad (3.8)$$

где

$$h_I(\zeta) = \frac{4}{(\sin \theta_1 \zeta)(\sin \theta_2 \zeta)} \left[\sinh^2 \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) \zeta + \sin^2 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) \zeta \right],$$

$$h_{II}(\zeta) = \frac{|\delta_r|^2 \zeta^2}{\sin^2 \theta_{r(\nu)} \zeta}.$$

Здесь мы использовали, что $\rho_j = \rho_{r(\nu_j)}$ и $\theta_j = \theta_{r(\nu_j)}$. В частности, имеем

$$h_I(0) = \frac{4}{\theta_1 \theta_2} \left[\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)^2 - \left(\ln \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^2 \right], \quad h_{II}(0) = \frac{|\delta_r|^2}{\theta_{r(\nu)}^2}, \quad (3.9)$$

и $1 - \beta h(it) = 0$, где $\beta h(0) \geq 1$ имеет по крайней мере один корень на полуоси $t \geq 0$, так как $h(it) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, $n_r^0 \geq 2$ при $\beta h(0) \geq 1$.

Лемма 3.1. Если $J = J_{II}$, то

$$n_r^0 = \begin{cases} 2, & \text{если } \beta h(0) \geq 1, \\ 0, & \text{если } \beta h(0) < 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Кроме того, подобное утверждение верно в случае $J = J_{II}$ при дополнительном требовании

$$\rho_{r(\nu_1)} = \rho_{r(\nu_2)}, \quad \theta_{r(\nu_1)} = 3\theta_{r(\nu_2)}. \quad (3.11)$$

Доказательство : На $[0, \infty)$ функция $g(x) = x^2 / \sinh^2 x$ строго убывает от 1 до 0. Следовательно наше первое утверждение имеет место, поскольку $1 - \beta h(it) = 1 - \beta h(0)g(t)$. Если $J = J_{JJ}$ и имеет место (3.10), т.е. $\rho_1 = \rho_2$ и $\theta_1 = 3\theta_2$, то

$$h(it) = \frac{4 \sinh t\theta_1}{\sinh 3t\theta_1} = \frac{4}{3 + 4 \sinh^2 t\theta_1}.$$

На $[0, \infty)$ функция $g(x) = 1/(1 + 3 \sinh^2 x)$ строго убывает от 1 до 0, поэтому наше второе утверждение имеет место, поскольку $1 - \beta h(it) = 1 - \beta h(0)g(t\theta_1)$.

На вопрос : Существуют ли единичные векторы $q_{r \pm 0}$, для которых выполнены условия (3.11) ? следующая лемма даёт лишь частичный ответ.

Лемма 3.2. Для любого заданного $\nu_1 \neq \nu_2$ существуют единичные векторы $q_{r \pm 0} \in \mathbb{C}$ такие, что выполняется первое условие в (3.11).

Доказательство : Полагая $q_{r \pm 0} = q_{r \pm 0}^1 + i q_{r \pm 0}^2$, $q_{r \pm 0}^k \in \mathbb{R}$, получаем, что

$$q_k = \frac{q_{r-0}^1 + \nu_k q_{r-0}^2}{q_{r+0}^1 + \nu_k q_{r+0}^2}, \quad k = 1, 2.$$

Теперь необходимо найти $q_{r \pm 0}$ такое, что $|q_1| = |q_2|$, или эквивалентно

$$\frac{q_{r-0}^1 + \nu_1 q_{r-0}^2}{q_{r-0}^1 + \nu_2 q_{r-0}^2} = \frac{q_{r+0}^1 + \nu_1 q_{r+0}^2}{q_{r+0}^1 + \nu_2 q_{r+0}^2}$$

или

$$\frac{1 + \nu_1 t_-}{1 + \nu_2 t_-} = \frac{1 + \nu_1 t_+}{1 + \nu_2 t_+}, \quad t_{\pm} = \frac{q_r^2 \pm 0}{q_r^1 \pm 0}. \quad (3.12)$$

На комплексной w -плоскости пусть L - образ действительной оси $\mathbb{R}$ при преобразовании

$$w = \frac{1 + \nu_1 t}{1 + \nu_2 t}. \quad (3.13)$$

Ясно, что L есть окружность, содержащая точки $w = 1$ и $w = \nu_1/\nu_2$. Точки $t = -1/\nu_j$, $j = 1, 2$, находятся в верхней полуплоскости, т.е. находятся на одной стороне прямой $\mathbb{R}$, а следовательно точка $w = 0$ лежит вне указанной окружности. Поэтому, не умаляя общности $\text{Im}(\nu_1/\nu_2) > 0$. Окружность $|w| = R$, где

$$R_0 < R < R_1; \quad R_0 = \min_L |w|, \quad R_1 = \max_L |w|,$$

пересекает L в двух точках : $w_{\pm}$. Если $t_{\pm}$ соответствует $w_{\pm}$ преобразованием (3.13), то (3.12) определяет единичные векторы $q_{r \pm 0}$ с требуемым свойством. Далее назовём матрицу Жордана J в (1.3) формой Жордана системы (1.1).

Теорема 3.1. Для любых заданных матриц $J = J_I$ или $J = J_{II}$ из (3.4), существуют некоторый контур Γ с единственной угловой точкой τ и эллиптическая система (1.1) с формой Жордана J такие, что индекс задачи Дирихле (1.1), (1.2) отрицателен в классе $C_{(+0)}^\mu$.

Доказательство. По Теореме 1.1 и из чётности функции $\det X_\tau(\zeta)$, индекс α^+ задачи Дирихле в классе $C_{(+0)}^\mu$ равен $-n_\tau^0/2$. Предположим теперь $J = J_{II}$. В этом случае $h(0) > 0$ в (3.9), и можно выбрать число $\beta > 0$ так, чтобы удовлетворялись бы условия (3.6_{II}) и $\beta h(0) \geq 1$. Если матрица B обратима и связана с β соответствующим соотношением (3.5_{II}), то матрица B определяет требуемую эллиптическую систему. Если $J = J_I$, то выберем $q_{\tau \pm 0}$ как и в Лемме 3.2 и рассмотрим контур Γ такой, чтобы векторы $q_{\tau \pm 0}$ являлись бы касательными к боковым сторонам области D_τ в точке τ . Тогда $h(0) > 0$ в силу (3.9). Осталось повторить вышеприведённые рассуждения.

Заметим, что при $J = J_{II}$ контур Γ может быть выбран произвольным образом, и в силу Следствия 1.1 индекс задачи может быть отрицательным только в случае угловой точки τ .

§4. СИСТЕМА ЛАМЕ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Система (1.1), (2.2), где коэффициенты являются матрицами

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

называется системой Ламе эластичности плоскости для $\lambda > 0$. Та же система может быть рассмотрена для $\lambda < 0$. Если $\lambda < 0$, то характеристический многочлен системы есть $(\lambda + 2)(1 + z^2)^2$, а условие эллиптичности принимает вид $\lambda \neq -2$. В случае $\lambda = -1$ система приводится к уравнению Лапласа. Если $\lambda \neq -1$, то можно непосредственно проверять, что

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & \alpha \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1}$$

удовлетворяют соотношениям (1.3). В частности, для $\lambda = -3$ система строго связана. Таким образом, условия на λ принимают вид

$$\lambda \neq -1, -2, -3. \quad (4.2)$$

Ввиду (4.2), условия (3.6_{II}), (3.7_{II}) могут быть записаны в виде: $\beta = 1/\alpha^2 \neq 1$, где последнее неравенство следует из $\lambda \neq -2$. Кроме того, (3.7) и (3.9_{II}) принимают вид

$$h(0) = \frac{|\delta_\tau|^2}{\theta_\tau^2}, \quad \delta_\tau = \frac{\sin \theta_\tau}{q_{\tau-0} q_{\tau+0}}$$

При $\nu = 1$, преобразование $z \rightarrow z_r$ тождественно, а $h(0) = (\sin \theta_r)^2 / \theta_r^2$ и (3.10) принимают вид

$$n_r^0 = \begin{cases} 2, & \text{если } |\sin \theta_r| \geq |\alpha| \theta_r, \\ 0, & \text{если } |\sin \theta_r| < |\alpha| \theta_r. \end{cases}$$

Заметим также, что наряду с (4.2) неравенство $|\sin \theta_r| \geq |\alpha| \theta_r$, т.е.

$$\left| \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1} \right| \leq \frac{|\sin \theta_r|}{\theta_r}, \quad 0 < \theta_r < 2\pi, \theta_r \neq \pi. \quad (4.3)$$

определяет два непересекающихся интервала, где $n_r^0 = 2$

$$-3 \leq \lambda < \lambda_r^0, \quad \lambda_r^1 \leq \lambda < -2. \quad (4.4)$$

$n_r^0 = 0$, для остальных значений λ .

Наконец, воспользовавшись Теоремой 1.2, мы приходим к следующему результату относительно системы (1.1), (4.1).

Теорема 4.1. Пусть $V^\pm$ — класс всех решений $v \in C_{(\pm 0)}''$ однородной задачи Дирихле для системы (1.1), (4.1). Тогда условие (2.4 $^\pm$) является необходимым и достаточным для разрешимости задачи в классе $C_{(\pm 0)}''$, а индекс $\alpha^\pm$ задачи равен

$$\alpha^\pm = \mp \sum_r \chi \left(\frac{|\sin \theta_r|}{\theta_r} - \left| \frac{\lambda + 3}{\lambda + 1} \right| \right), \quad \chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geq 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Заметим, что система (1.1), (4.1) строго эллипична при $\lambda > -2$. Согласно (4.4), для таких значений λ неравенство (4.3) не выполняется и поэтому $\alpha^+ = \alpha^- = 0$. Другими словами, отрицательный индекс α^+ может случиться только при $\lambda < -2$. Более точно, если контур Γ имеет единственную угловую точку τ и $\lambda_r^0 \leq \lambda < -2$, то $\alpha^- = \dim V^- - \dim V^+ = 1$. Следовательно, существует только одно линейное независимое решение однородной задачи Дирихле, обладающее асимптотикой (1.20) в точке τ , вместе с функцией $\phi_\tau \neq 0$ вида (1.19 0).

Abstract. The paper considers Dirichlet problem for elliptic systems of second order with constant leading coefficients in a piecewise smooth domains of the complex plane. A Fredholm criterion and an index formula in the Hölder spaces are given together with some examples of elliptic systems, where the index of the Dirichlet problem does not vanish.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. V. Bitsadze. Boundary value problems for elliptic equations of second order. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1968.

2. Н. Е. Товмасян. "Общая граничная задача для эллиптических систем второго рода с постоянными коэффициентами". Дифференциальные Уравнения, том 1, стр. 3-23, 1966.
3. Н. Е. Товмасян. "Общая граничная задача для эллиптических систем второго рода с постоянными коэффициентами". Дифференциальные Уравнения, том 1, стр. 163-171, 1966.
4. А. Вольперт. "Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости". Труды Моск. Мат. Общества, том 10, стр. 41-87, 1961.
5. H. Begehr and Guo Chun Wen. Boundary value problems for elliptic equations and systems. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math., vol. 46, 1990.
6. М. М. Сираждинов. "Граничные задачи для общих эллиптических систем на плоскости". Изв. российской Акад. Наук, серия Математика, том 61, № 5, 1997.
7. V. P. Burskii. Investigations methods of boundary value problems for general differential equations. Naukova Dumka, Kiev, 2002.
8. А. П. Солдатов, "О первой и второй граничных задачах для эллиптических систем на плоскости". Диф. Уравнения, том 39, стр. 674-686, 2003.
9. В. А. Кондратьев. "Граничные задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками", Перев. Московского матем. общ., том 16, стр. 209 - 292, 1967.
10. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник. "Граничные задачи для кусочно дифференцируемых уравнений в негладких областях", Российское мат. Общество, том 38, № 2, стр. 3-76, 1983.
11. M. Dauge and J. L. Steux, "Probleme de Dirichlet pour le laplacien dans un polygone curviligne. J. Diff. Equ., vol. 70, no. 1, pp. 93-113, 1987.
12. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1994.
13. A. P. Soldatov. "Bitsadze-Samarskii problem for elliptic systems of second order", Journal of applied functional analysis, 2005 (to appear).
14. A. P. Soldatov, "Hyperanalytic functions and their applications, J. Math. Sciences, vol. 15, pp.142-199, 2004.

Поступила 7 октября 2004