Известия НАН Армении. Математика, 40, № 6, 2005, 5-19

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЕСОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОГО СРЕДНЕГО КОЛЕБАНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. Н. Карапетянц

Ростовский государственный университет, Ростов, Россия
E-mail : alexeyk@stipendia.ru

Резюме. В работе вводятся и изучаются с помощью преобразования Березина весовые $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ пространства функций ограниченного среднего колебания в единичном круге. С помощью преобразования Березина дано описание пространств $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ и показано, что эти пространства совпадают с известными пространствами, определёнными в терминах средних по гиперболическим кругам в метрике Бергмана.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Весовое пространство $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, $1 \le p < \infty$, $-1 < \lambda < \infty$, состоит из функций φ, измеримых в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, и удовлетворяющих условию

$$\|\varphi\|_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \|\varphi \circ \alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} < \infty. \tag{1.1}$$

Здесь $\|\varphi\|_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}$ является полунормой в $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, $w \to \alpha_z(w)$ – преобразование Мёбиуса единичного круга в себя, которое переводит $w = 0$ в $w = z$, а $\widetilde{\varphi}_\lambda(z)$ – преобразование Березина функции φ (см. ниже) и

$$L^p_\lambda(\mathbb{D}) = \left\{ f : \|f\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(w)|^p d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, Грант # 06-01-00297-А

где $d\mu_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda d\mu(z), \quad d\mu(z) = \frac{1}{\pi}dxdy.$

Это пространство, кажется, впервые было изучено в работе [3], а затем в [1]. Основные результаты в этом направлении представлены в [2] (см. также литературу и дальнейшие детали в [4] – [6]). Определение пространства $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ было дано в терминах средних (см. (2.5) ниже), и было доказано, что это пространство можно эквивалентным образом описать в терминах преобразования Березина как и выше. Отметим, что все эти исследования соответствуют случаю $\lambda = 0$, $p = 2$ (т.е. норма в (1.1) берётся в $L^2(\mathbb{D})$), т.е. в наших обозначениях это пространство имеет вид $\mathrm{BMO}^2_0(\mathbb{D})$.

Для исследования пространств, определённых в терминах средних для $p \geq 1$, $\lambda > -1$ мы отсылаем к работе [6]. В качестве одного из основных результатов мы покажем, что эти пространства эквивалентным образом могут быть описаны в терминах преобразования Березина.

В недавно опубликованной статье [7], невесовое пространство $\mathrm{BMO}^1_0(\mathbb{D})$ было изучено в связи со следующей проблемой : **предположим, что преобразование Березина равно нулю на границе круга ; Вытекает ли отсюда компактность соответствующего теплицевого оператора ?** В работе [7] дан положительный ответ для класса теплицевых операторов на невесовом пространстве Джрбашяна-Бергмана с символами в $\mathrm{BMO}^1_0(\mathbb{D})$.

Мы изучаем пространства $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ с целью рассмотрения аналогичной проблемы для теплицевых операторов на весовых пространствах Джрбашяна–Бергмана $A^2_\lambda(\mathbb{D})$ с символами в $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ (эти результаты вскоре будут опубликованы). Однако, пространства $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ и их описание представляют самостоятельный интерес.

Мы дадим описание пространств $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ в терминах преобразования Березина, являющегося естественным аппаратом в теории операторов в пространствах аналитических функций. Оно играет ту же роль в теории функций комплексного переменного, как и интеграл Пуассона в теории функций действительного переменного. Применение преобразования Березина для определения и описания пространств $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ естественно с точки зрения комплексного анализа.

§ 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В параграфе приведены некоторые определения и вспомогательные результаты в основном из [2]. Всюду в этой статье p $(1 \leq p < \infty)$ произвольно. Весовое пространство Джрбашяна-Бергмана $A^2_\lambda(\mathbb{D})$ в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ содержит аналитические функции из $L^2_\lambda(\mathbb{D})$, $\lambda > -1$, а $\langle f, g\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}d\mu_\lambda(z)$. Преобразование Березина функции φ (связанное с $\mathrm{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$) задаётся по формуле

$$\tilde{\varphi}_\lambda(z) = \langle \varphi k^\lambda_z, k^\lambda_z\rangle_\lambda = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w)|k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w), \quad z \in \mathbb{D},$$

где так называемое когерентное состояние в $\mathrm{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ определяется как

$$k^\lambda_z(w) = \frac{(1-|z|^2)^{1+\lambda/2}}{(1-\bar{z}w)^{2+\lambda}} = (1-|z|^2)^{1+\lambda/2}\sum_{n=0}^{\infty}\overline{e^\lambda_n(z)}e^\lambda_n(w).$$

Заметим, что это определение не зависит от ортонормального базиса $\{e^\lambda_n(z)\}$ в $\mathrm{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$, и, например, можно взять

$$e^\lambda_n(z) = d_{n,\lambda}z^n, \quad d_{n,\lambda} = \sqrt{\frac{\Gamma(n+\lambda+2)}{\Gamma(\lambda+2)n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Преобразование Мёбиуса $w \to \alpha_z(w) = \frac{z-w}{1-\bar{z}w}$, $z \in \mathbb{D}$, единичного круга обладает следующими свойствами : $\alpha^2_z(w) = w$, действительный якобиян отображения $w \to \alpha_z(w)$ имеет следующий вид $|\alpha'_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\bar{w}|^4}$, а $1 - |\alpha_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-z\bar{w}|^2}$. Гиперболическая метрика Бергмана в единичном круге определяется следующим образом :

$$\beta(z, w) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|\alpha_z(w)|}{1-|\alpha_z(w)|} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Поскольку $|\alpha_z(w)| = \tanh\beta(z, w)$, то гиперболический круг

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{D} : \beta(z, w) < r\} \subset \mathbb{D}$$

имеет евклидовый радиус $\frac{(1-|z|^2)\tanh r}{1-|z|^2\tanh^2 r}$ и его евклидовым центром является точка $\frac{(1-\tanh^2 r)z}{(1-z\tanh^2 r)}$. Полагая

$$|D(z, r)|_\lambda = \int_{D(z,r)} d\mu_\lambda(w),$$

отметим, что для любого фиксированного $r > 0$ имеет место эквивалентность : $|D(z, r)|_\lambda \sim |D(z, r)|_0^{1+\frac{\lambda}{2}}$, где

$$|D(z, r)|_0 = \int_{D(z,r)} d\mu(w) = \left(\frac{(1-|z|^2)\tanh r}{1-|z|^2\tanh^2 r}\right)^2.$$

Предложение 2.1. *Для любого* $z \in \mathbb{D}$ *и* $r > 0$ *имеем*

$$C^{-1} < |k^\lambda_z(w)|^2|D(z, r)|_\lambda < C, \quad w \in D(z, r). \tag{2.1}$$

Предложение 2.2. *([2], Лемма 2.12) Для заданных положительных чисел r, s, R, существует $C > 0$ такое, что для всех $z, w \in \mathbb{D}$ имеем*

$$C^{-1}(1-|z|^2) \le |1 - z\overline{w}| \le C(1-|z|^2), \quad \beta(z,w) \le r,$$
$$C^{-1}|D(z,r)|_\lambda \le |D(w,s)|_\lambda \le C|D(z,r)|_\lambda, \quad \beta(z,w) \le R.$$

Как следствие, для любой функции φ, аналитической в $\mathbb{D}$ и любых чисел $\beta \in \mathbb{R}$, $0 \le p < \infty$, $0 < r < \infty$, имеет место следующая оценка :

$$(1-|z|^2)^\beta |\varphi(z)|^p \le C \int_{D(z,r)} (1-|z|^2)^{\beta-2} |\varphi(w)|^p d\mu(w), \tag{2.2}$$

где постоянное C зависит только от p, r, β и не зависит от φ и $z \in \mathbb{D}$.

Предложение 2.3. *([2], Лемма 2.17). Для любой функции φ, определённой в $\mathbb{D}$, следующие утверждения эквивалентны :*

1. $\sup\{|\varphi(z) - \varphi(w)| : \beta(z,w) < s\} < \infty$,
2. $|\varphi(z) - \varphi(w)| \le C(\beta(z,w) + 1)$, $z, w \in \mathbb{D}$.

Предложение 2.4. *Если $\nu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$ и $\lambda > -1$, то*

$$J^\lambda_{\nu,\tau} = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} (\beta(u,v)+1)^\nu d\mu_\lambda(v) \right)^\tau d\mu_\lambda(u) < \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Для $\lambda = 0$, $\tau = 1$, $\nu = 2$, доказательство дано в [2], а для $\nu \le 0$ условие (2.3) очевидно. Если $\nu > 0$, тогда положим $v = \alpha_u(w)$. Вспоминая, что $\alpha_u(\alpha_u(w)) = w$ и

$$|k^\lambda_z(\alpha_z(w))|^2 d\mu_\lambda(\alpha_z(w)) = d\mu_\lambda(w), \tag{2.4}$$

получаем

$$\begin{aligned}
J^\lambda_{\nu,\tau} &= \int_{\mathbb{D}} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} \left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+|\alpha_u(v)|}{1-|\alpha_u(v)|}\right)^\nu d\mu_\lambda(v) \right)^\tau = \\
&= \int_{\mathbb{D}} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} \left(1 + \frac{1}{2}\ln\frac{1+|w|}{1-|w|}\right)^\nu |k^\lambda_u(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \right)^\tau \le \\
&\le C \int_{\mathbb{D}} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} (1-|w|)^{-\nu\varepsilon} |k^\lambda_u(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \right)^\tau = \\
&= C(\lambda+1) \int_{\mathbb{D}} (1-|u|^2)^{\tau(\lambda+2)} d\mu_\lambda(u) \left(\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|)^{\lambda-\nu\varepsilon}}{|1-\overline{u}w|^{4+2\lambda}} d\mu(w) \right)^\tau.
\end{aligned}$$

Теперь, выбирая ε так, чтобы $\lambda - \varepsilon\nu\tau > -1$ и используя оценку

$$\int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|w|)^{-\nu\varepsilon}}{|1-\overline{u}w|^{4+2\lambda}} d\mu_\lambda(w) \le C_1 (1-|u|^2)^{-2-\lambda-\varepsilon\nu}$$

(см. [2], Теорема 1.7), получаем $J^{\lambda}_{\nu,r} \le C_2 \int_{\mathbb{D}} (1-|u|^2)^{-\epsilon\nu r} d\mu_\lambda(u) < \infty$.

Предложение 2.3 *([2], Лемма 2.13). Для любого $0 < r < \infty$ существуют положительное целое число N и последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{D}$ такие, что*

1. *круг $\mathbb{D}$ покрывается $\{D(a_n, r)\}_{n=0}^{\infty}$,*
2. *каждая точка $z \in \mathbb{D}$ принадлежит не более чем N множествам из $\{D(a_n, 2r)\}_{n=0}^{\infty}$,*
3. *если $n \ne m$, то $\beta(a_n, a_m) \ge r/2$.*

Для функций φ, локально интегрируемых в $\mathbb{D}$ и для $0 < r < \infty$ рассмотрим среднее

$$\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) = \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda} \int_{D(z,r)} \varphi(w) d\mu_\lambda(w),$$

и p-среднее колебание в метрике Бергмана :

$$\Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, r) = \left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda} \int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p}. \qquad (2.5)$$

§ 3. ПРОСТРАНСТВО $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$

По определению, из $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ вытекает

$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(0)|^p d\mu_\lambda(w) < \infty,$$

т.е. $\varphi \in L^p_\lambda(\mathbb{D})$, и следовательно $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}) \subset L^p_\lambda(\mathbb{D})$. Норма в $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ определяется как

$$\|\varphi\|_{BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} = \|\varphi\|_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(0)|,$$

где

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(0) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w) d\mu_\lambda(w).$$

Используя (2.4), приходим к другому полезному представлению для полунормы :

$$\|\varphi\|_{\#, BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p \|k^\lambda_z(w)|^2 \, d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p}.$$

Лемма 3.1. *Пусть ψ – измеримая функция на $\mathbb{D}$. Тогда*

$$\left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p} \le$$

$$\le 2 \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \psi(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \right)^{1/p}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$|\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \le |\varphi(w) - \psi(z)| + |\psi(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|$$
$$= |\varphi(w) - \psi(z)| + \left|\int_{\mathbb{D}} (\varphi(u) - \psi(z))|k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|.$$

Для завершения доказательства достаточно применить неравенство Минковского, так как $|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$ является вероятностной мерой.

Следствие 3.2. Пространство $\mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$ можно задавать эквивалентной нормой :

$$\|\varphi\|'_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \inf_{\delta\in\mathbb{C}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \delta|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(0)|,$$

и

$$\|\varphi\|'_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} \le \|\varphi\|_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} \le 2\|\varphi\|'_{BMO_\lambda^p(\mathbb{D})}.$$

Следствие 3.3. Если $\varphi \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$, то $|\varphi| \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$, и обратное утверждение в общем не верно.

Доказательство. Чтобы доказать неравенство

$$\|\,|\varphi|\,\|_{\#,\mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})} \le \|\varphi\|_{\#,\mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})},$$

отметим, что

$$\||\varphi| \circ \alpha_z(\cdot) - \widetilde{|\varphi|}_\lambda(z)\|^p_{L_\lambda^p(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} ||\varphi(w)| - \widetilde{|\varphi|}_\lambda(z)\;|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$\le \int_{\mathbb{D}} ||\varphi(w)| - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\;|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$\le \int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \le \|\varphi\|^p_{\#,BMO_\lambda^p(\mathbb{D})}.$$

Из этого результата вытекает более общий результат.

Следствие 3.4. Если $g(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера для $t \ge 0$ и $\varphi \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$, то $g(|\varphi(z)|) \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$.

Пример 3.5. Если $\omega_\beta(z) = \ln^\beta \frac{1}{1-|z|^2}$, $0 \le \beta \le 1$, то $\omega_\beta(z) \in \mathrm{BMO}_\lambda^p(\mathbb{D})$. Действительно, если ψ измерима на $\mathbb{D}$, то

$$\|\omega_1\|_{\#,BMO_\lambda^p(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega_1(w) - \widetilde{\omega_1}_\lambda(z)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le 2\sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} |\omega_1(w) - \psi(z)|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}.$$

Поэтому для $\psi(z) = \ln\frac{1}{1-|z|^2}$ заменой переменного $w = \alpha_z(u)$, получим

$$\|\omega_1\|^p_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} \le 2^p \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left|\ln\frac{1}{1-|w|^2} - \ln\frac{1}{1-|z|^2}\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$= 2^p \sup_{z\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} \left|\ln\frac{|1-\bar{z}u|^2}{(1-|u|^2)}\right|^p d\mu_\lambda(u) \le 2^p \int_{\mathbb{D}} \ln^p \frac{4}{1-|u|^2} d\mu_\lambda(u) < \infty.$$

Таким образом, $\ln^\beta \frac{1}{1-|z|^2} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, $0 \le \beta \le 1$, так как $g(t) = t^\beta$, $0 \le \beta \le 1$, является функцией Гёлдера для $t \ge 0$.

§ 4. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВ $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БЕРЕЗИНА

Прежде всего дадим несколько определений из [2]. Пусть $\gamma(t)$ – гладкая кривая в $\mathbb{D}$ и $s(t)$ – длина $\gamma(t)$ в метрике Бергмана. Тогда $\frac{ds}{dt} = \frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}$. Далее, пусть Π^λ_z означает ортогональную проекцию пространства Джрбашяна–Бергмана $\mathrm{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ на подпространство, порождённое $k^\lambda_z(w)$:

$$\Pi^\lambda_z f(w) = \langle f, k^\lambda_z\rangle_\lambda k^\lambda_z(w) = (1-|z|^2)^{1+\frac{\lambda}{2}} f(z) k^\lambda_z(w).$$

Теорема 4.1. *Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, то функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ является липшицевой в метрике Бергмана*

$$|\widetilde{\varphi}_\lambda(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(w)| \le C\beta(z,w).$$

Доказательство. Пусть $\gamma(t)$ – геодезическая в метрике Бергмана, связывающая $z = \gamma(0)$ и $w = \gamma(1)$. Тогда

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(w) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))dt, \tag{4.1}$$

и достаточно оценить $|\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))|$. Прямыми вычислениями имеем

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t)) = \int_{\mathbb{D}} \varphi(w)\left[\frac{d}{dt}k^\lambda_{\gamma(t)}(w)\overline{k^\lambda_{\gamma(t)}(w)}\right] d\mu_\lambda(w) =$$
$$= 2\int_{\mathbb{D}} \varphi(w)\mathrm{Re}\left[\left(\frac{d}{dt}k^\lambda_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^\lambda_{\gamma(t)}(w)}\right] d\mu_\lambda(w).$$

Далее, дифференцируя тождество $\langle k^\lambda_{\gamma(t)}, k^\lambda_{\gamma(t)}\rangle_\lambda = 1$ по t, получаем

$$\mathrm{Re}\left\langle \frac{d}{dt}k^\lambda_{\gamma(t)}(w), k^\lambda_{\gamma(t)}(w)\right\rangle_\lambda = 0.$$

Следовательно
$$\mathrm{Re}\ \left[\left(\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}\right]=0,$$
согласно определению $\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}$. Кроме того,
$$\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_{\lambda}(\gamma(t))=2\int_{\mathbb{D}}\varphi(w)\mathrm{Re}\ \left[\left(\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}\right]d\mu_{\lambda}(w).$$
С другой стороны,
$$\int_{\mathbb{D}}\left(\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}d\mu_{\lambda}(w)=0,$$
откуда вытекает
$$\frac{d}{dt}\tilde{\varphi}_{\lambda}(\gamma(t))=$$
$$=2\int_{\mathbb{D}}\left[\varphi(w)-\tilde{\varphi}_{\lambda}(\gamma(t))\right]\mathrm{Re}\ \left[\left(\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\overline{k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)}\right]d\mu_{\lambda}(w).$$
Теперь, чтобы вычислить $\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)(z)$, заметим, что
$$\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)=-\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{(1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)})^{\frac{\lambda}{2}}(\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}+\gamma(t)\overline{\gamma'(t)})}{(1-\overline{\gamma(t)}w)^{2+\lambda}}$$
$$+(2+\lambda)\frac{(1-\gamma(t)\overline{\gamma(t)})^{1+\frac{\lambda}{2}}}{(1-\overline{\gamma(t)}w)^{3+\lambda}}w\overline{\gamma'(t)}.$$
Следовательно,
$$\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)(z)=(1-|\gamma(t)|^2)^{1+\frac{\lambda}{2}}\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)\Bigg|_{w=\gamma(t)}\cdot k^{\lambda}_{\gamma(t)}(z)$$
$$=(1-|\gamma(t)|^2)^{\frac{\lambda}{2}}\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)\frac{-\gamma'(t)\overline{\gamma(t)}+\gamma(t)\overline{\gamma'(t)}}{(1-\overline{\gamma(t)}z)^{2+\lambda}}$$
и поэтому
$$\left(I-\Pi^{\lambda}_{\gamma(t)}\right)\left(\frac{d}{dt}k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)\right)(z)=(2+\lambda)(1-|\gamma(t)|^2)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\overline{\gamma'(t)}(z-\gamma(t))}{(1-\overline{\gamma(t)}z)^{3+\lambda}}.$$
Заметим, что
$$\left|(1-|\gamma(t)|^2)^{\frac{\lambda}{2}}\frac{\overline{\gamma'(t)}(w-\gamma(t))}{(1-\overline{\gamma(t)}w)^{3+\lambda}}\right|\le\frac{ds}{dt}|k^{\lambda}_{\gamma(t)}(w)|,$$
поскольку
$$\frac{ds}{dt}=\frac{|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2}\quad\text{and}\quad\frac{w-\gamma(t)}{1-\overline{\gamma(t)}w}=\alpha_{\gamma(t)}(w).$$

Возвращаясь к (4.1), можно видеть, что

$$\left|\frac{d}{dt}\widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))\right| \le 2(2+\lambda)\frac{ds}{dt}\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))|\, |k^\lambda_{\gamma(t)}(w)|^2 d\mu_\lambda(w) =$$
$$= 2(2+\lambda)\frac{ds}{dt}\int_{\mathbb{D}} |\varphi\circ\alpha_{\gamma(t)}(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(\gamma(t))|\, d\mu_\lambda(w) \le$$
$$\le 2(2+\lambda)\frac{ds}{dt}\|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}.$$

Следовательно

$$|\widetilde{\varphi}_\lambda(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(w)| \le 2(2+\lambda)\|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}\int_0^1 \frac{ds}{dt}dt = 2(2+\lambda)\|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}\beta(z,w).$$

Теорема 4.2. *Условие*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\{[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)]^{\frac{1}{p}} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\} < \infty. \tag{4.2}$$

является необходимым для включения $\varphi\in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$. Если $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена, то (4.2) также является и достаточным условием.

Доказательство. Так как $|k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$ является вероятностной мерой, то

$$\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|.$$

Кроме того,

$$0 \le \left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \le \|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}$$

поскольку $|\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \le [\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)]^{1/p}$. Поэтому, для любой функции $\varphi\in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left\{\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|\right\} \le \|\varphi\|_{\#.BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} < \infty.$$

Это доказывает необходимость условия (4.2).

Чтобы доказать достаточность условия (4.2) в предположении, что $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена, заметим, что

$$\|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} \le \|\varphi\circ\alpha_z(\cdot)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| = [\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)]^{1/p} + |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)|.$$

Следовательно, если $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена и имеет место (4.2), то $\left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda\right]^{1/p}$ также ограничена, и поэтому, $\|\varphi\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} < \infty$. Доказательство завершено.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из Теоремы 4.2.

Теорема 4.3. *Для любой функции φ, локально интегрируемой на $\mathbb{D}$, следующие условия эквивалентны :*

1. *функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена и $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$.*
2. *функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена и $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \left\{ \left[\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda(z)\right]^{1/p} - |\widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \right\} < \infty$.*
3. *функция $\widetilde{\varphi^p}_\lambda$ ограничена и $\varphi \geq 0$.*
4. *функция $\widetilde{|\varphi|^p}_\lambda$ ограничена.*

Лемма 4.4. *Пусть φ – локально интегрируемая функция на $\mathbb{D}$ и пусть $0 < r < \infty$. Тогда имеют место следующие неравенства :*

1. $|\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \leq C\|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}$,
2. $|\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)| \leq C\widetilde{|\varphi|}_\lambda(z)$.

В частности, если $\varphi \geq 0$, то $\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) \leq C\widetilde{\varphi}_\lambda(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

Доказательство. Используя (2.1), получим

$$|\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)| \leq \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|d\mu_\lambda(w) \leq$$
$$\leq C\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)||k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)$$
$$\leq C\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)||k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \leq C\|\varphi\circ\alpha_z(\cdot) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}.$$

Применив (2.1) для функции $\varphi \geq 0$, получим

$$\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z) = \frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} \varphi(w)d\mu_\lambda(w) \leq C\int_{D(z,r)} \varphi(w)|k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \leq C\widetilde{\varphi}_\lambda(z).$$

Свойство 4.5. Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, то функция $\widetilde{\varphi}_\lambda$ ограничена тогда и только тогда, когда функция $\widehat{\varphi}_{r,\lambda}$ ограничена.

Заметим, что можно опустить предположение $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, если φ положительна (см. Теорему 5.3).

§ 5. ПРОСТРАНСТВА $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ И ОПИСАНИЕ $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ В ТЕРМИНАХ СРЕДНИХ

Будем использовать обозначение $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для пространства всех измеримых, p-интегрируемых на $\mathbb{D}$ функций с конечными полунормами

$$\|\varphi\|_{\#,BMO^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, r).$$

Как мы уже отметили, для $p = 2$, $\lambda = 0$, это пространство изучалось в [3] и [1] (см. также [2]), а для произвольного p и $\lambda > -1$ такие пространства рассмотрены в [6], и мы существенно используем методы и результаты этих исследований. Напомним, что пространства $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для всех r совпадают. Это замечено в работе [6] и опирается на результаты работы [5]. Для $p = 2$ равенство $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D}) = \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ дано в [2], а в Теореме 5.2 мы обобщаем это утверждение на любое p.

Теорема 5.1 ([6]).*С точностью до эквивалентности норм, пространства $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$, $0 < r < \infty$, совпадают.*

Теорема 5.2. *С точностью эквивалентности норм имеем :*

$$\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}) = \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D}), \quad 0 < r < \infty, \quad \lambda > -1.$$

Доказательство. Чтобы доказать вложение $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}) \subset \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$, $0 < r < \infty$, $\lambda > -1$, заметим, что в силу (2.1) имеем

$$\Omega_{p,\lambda}(\varphi; z, r) = \left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)|^p\, d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le 2\left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p\, d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le 2C\left(\int_{D(z,r)} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2\, d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le 2C\left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

для любого $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ и любого $0 < r < \infty$. Поэтому, $\|\varphi\|_{\#,BMO^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})} \le 2C\|\varphi\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})}$. Обратное вложение

$$\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D}) \subset \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D}), \quad 0 < r < \infty, \quad \lambda > -1. \tag{5.1}$$

следует из нижеследующих Лемм 5.6, 5.7, доказанных без использования (5.1).

Теорема 5.3. *Следующие условия эквивалентны для любой локально p-интегрируемой функции* $\varphi \geq 0$:

1. $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \widehat{\varphi^p}_{s,\lambda}(z) < \infty, \quad 0 < s < \infty.$
2. $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \widetilde{\varphi^p}_{\lambda}(z) < \infty.$

Каждое из этих условий влечёт $\varphi \in L^p_\lambda(\mathbb{D})$.

Доказательство. Утверждение 2) $\Rightarrow$ 1) следует из Леммы 4.4. Чтобы доказать 1) $\Rightarrow$ 2) будем рассуждать как в доказательстве Теоремы 2.15 работы [2]. Выбирая $\{D(z_n, s)\}_{n=0}^{\infty}$ так, чтобы удовлетворялись условия Предложения 2.5, получаем

$$\widetilde{\varphi^p}_\lambda(z) = \int_{\mathbb{D}} \varphi^p(w)|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(z_n,s)} \varphi^p(w)|k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w).$$

Используя Предложение 2.2 и применяя (2.2) для функции $w \in D(z_n, s)$ и фиксированного s, получаем

$$|k_z^\lambda(w)|^2 \leq \frac{C_1}{|D(w,s)|_\lambda} \int_{D(w,s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u) \leq \frac{C_2}{|D(z_n,s)|_\lambda} \int_{D(z_n,2s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u),$$

поскольку $k_z^\lambda(w)$ аналитична в $w \in \mathbb{D}$. Следовательно

$$\widetilde{\varphi^p}_\lambda(z) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_3}{|D(z_n,s)|_\lambda} \int_{D(z_n,s)} \varphi^p(w) d\mu_\lambda(w) \int_{D(z_n,2s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u) \leq$$

$$\leq C_3 \sup_{z\in\mathbb{D}} \widehat{\varphi^p}_{s,\lambda}(z) \sum_{n=1}^{\infty} \int_{D(z_n,2s)} |k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u) \leq C_3 N \sup_{z\in\mathbb{D}} \widehat{\varphi^p}_{s,\lambda}(z).$$

Этим доказывается 1) $\Rightarrow$ 2). Для завершения доказательства заметим, что если $\varphi \geq 0$, то

$$\widetilde{\varphi^p}_\lambda(0) = \int_{\mathbb{D}} \varphi^p(w) d\mu_\lambda(w) = \|\varphi\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})}.$$

Лемма 5.4. *Если* $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ *для некоторого* $0 < r < \infty$, *то для любого* $z, w \in \mathbb{D}$ *и любого* $0 < s < \infty$ *имеем*

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \leq C[\beta(z,w) + 1]. \tag{5.2}$$

Доказательство. Пространства $\mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ совпадают для $0 < r < \infty$. Следовательно можно зафиксировать $r = 2s$. Для того, чтобы оценить $|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)|$ в предположении $\beta(z,w) \leq s$, отметим, что для $\delta \in \mathbb{C}$ имеем

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \leq |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \delta| + |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \delta|$$

$$\leq \frac{1}{|D(z,s)|_\lambda} \int_{D(z,s)} |\varphi(u) - \delta| d\mu_\lambda(u) + \frac{1}{|D(w,s)|_\lambda} \int_{D(w,s)} |\varphi(v) - \delta|\, d\mu_\lambda(v).$$

Если $\beta(z,w) < s$, то $D(z,s) \subset D(z,2s)$, $D(w,s) \subset D(z,2s)$ и согласно Предложению 2.2, $|D(z,s)|_\lambda \sim |D(w,s)|_\lambda \sim |D(z,2s)|_\lambda$. Поэтому

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \leq \frac{2C_s}{|D(z,2s)|_\lambda} \int_{D(z,2s)} |\varphi(u) - \delta| d\mu_\lambda(u)$$

для любого δ. Выбирая $\delta = \widehat{\varphi}_{2s,\lambda}(z)$, получим

$$|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)| \leq 2C_s\Omega_1(\varphi; z, 2s) \leq 2C_s\|\varphi\|_{*,BMO^q_{\lambda,2s}(\mathbb{D})} < \infty. \tag{5.3}$$

для $\beta(z,w) < s$ и любого $1 \leq q \leq p$. Теперь, (5.2) следует из Предложения 2.3.

Следствие 5.5. Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$, то $\widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in L^q_\lambda(\mathbb{D})$, $0 < r, s < \infty$, для любого $1 \leq q \leq p$.

Доказательство. Используя (5.2), а также (2.3), получаем

$$\|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}\|_{L^q_\lambda(\mathbb{D})} \leq \left(\int_{\mathbb{D}} |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(0)|^q d\mu_\lambda(z)\right)^{1/q} + |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(0)|$$
$$\leq C\left(\int_{\mathbb{D}} (\beta(z,0)+1)^q d\mu_\lambda(z)\right)^{1/q} + |\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(0)| < \infty.$$

Доказательство завершено.

Теперь приступим к леммам, из которых будет непосредственно следовать вложение (5.1).

Лемма 5.6. *Пусть* $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ *для фиксированного* $0 < r < \infty$. *Тогда* $\widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$ *для любого* $0 < s < \infty$.

Доказательство. Обозначим

$$\omega_p(\varphi; z) = \left(\int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \widetilde{\varphi}_\lambda(z)|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

и отметим, что

$$\omega_p(\widehat{\varphi}_{s,\lambda}; z) = \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - (\widetilde{\widehat{\varphi}_{s,\lambda}})_\lambda(z)\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \int_{\mathbb{D}} \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(u)|k^\lambda_z(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$= \left(\int_{\mathbb{D}} \left|\int_{\mathbb{D}} [\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(u)]\, |k^\lambda_z(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|^p |k^\lambda_z(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$

Следовательно, применяя (5.2) и неравенство Минковского, получаем

$$\omega_p(\widehat{\varphi}_{s,\lambda};z) \le \left(\int_{\mathbb{D}}\left|\int_{\mathbb{D}}(\beta(w,u)+1)|k_z^\lambda(u)|^2 d\mu_\lambda(u)\right|^p |k_z^\lambda(w)|^2 d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}$$
$$\le \int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}(\beta(w,u)+1)^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} d\mu_\lambda(u).$$

где подставили $w = \alpha_z(\xi)$, $u = \alpha_z(\eta)$ и использовали инвариантность относительно преобразования Мёбиуса метрики Бергмана : $\beta(\alpha_z(\xi),\alpha_z(\eta)) = \beta(\xi,\eta)$. Наконец, используя (2.3) получим

$$\|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}\|_{\#,BMO^p_\lambda(\mathbb{D})} \le \int_{\mathbb{D}}\left(\int_{\mathbb{D}}(\beta(w,u)+1)^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} d\mu_\lambda(u) < \infty.$$

Лемма 5.7. *Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для некоторого фиксированного $0 < r < \infty$, то функция $\widehat{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_{s,\lambda}$ ограничена в $\mathbb{D}$, и следовательно $\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Заметим, что $\varphi \in \mathrm{BMO}^p_{\lambda,r}(\mathbb{D})$ для любого $0 < r < \infty$. Далее,

$$\left[\widehat{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_{s,\lambda}(z)\right]^{1/p} = \left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)}|\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} \le$$
$$\le \left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)}|\varphi(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} +$$
$$+\left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)}|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p}.$$

Очевидно, первое слагаемое совпадает с $\Omega_{p,\lambda}(\varphi;z,s)$ и меньше, чем $C_s\|\varphi\|_{\#,BMO^p_{\lambda,s}(\mathbb{D})}$. Для оценки второго слагаемого применим (5.3), означающее, что $\beta(z,w) < s$ при $w \in D(z,s)$. Получаем

$$\left(\frac{1}{|D(z,s)|_\lambda}\int_{D(z,s)}|\widehat{\varphi}_{s,\lambda}(w) - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}(z)|^p d\mu_\lambda(w)\right)^{1/p} \le 2C_s\|\varphi\|_{\#,BMO^p_{\lambda,2s}(\mathbb{D})} < \infty,$$

и следовательно

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \widehat{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_{s,\lambda}(z) < \infty.$$

Поэтому, по Теореме 5.3 функция $\widetilde{|\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda}|^p}_\lambda$ ограничена, и остается применить Теорему 4.3, чтобы получить $\varphi - \widehat{\varphi}_{s,\lambda} \in \mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$.

БЛАГОДАРНОСТЬ. Автор глубоко признателен профессору Кехе Жу за его полезные комментарии и замечания.

Abstract. We introduce and study in terms of Beresin transform weighted $BMO_\lambda^p(\mathbb{D})$ spaces of functions of bounded mean oscillation in the Bergman metric on the unit disc. We give description of the spaces $BMO_\lambda^p(\mathbb{D})$ in terms of Beresin transform and also show coincidence of these spaces with known spaces defined in terms of averages over hyperbolic discs in the Bergman metric.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bekolle, C. A. Berger, L. A. Coburn, K. Zhu, "BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains", J. Funct. Anal. vol. 93, pp. 310–350, 1990.
2. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. Theory of Bergman spaces. New York : Springer-Verlag, 2000. http ://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2003/020.pdf.
3. K. Zhu, "VMO, ESV and Toeplitz operators on the Bergman space", Trans. Amer. Math. vol. 302, pp. 617-646, 1987.
4. K. Zhu. Operator theory in function spaces. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. New York : Marcel Dekker, 1990.
5. K. Zhu, "BMO and Hankel operators on Bergman spaces", Pacific J. of Math. vol. 155, pp. 377–395, 1992.
6. K. Zhu, "Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball". Graduate texts in Mathematics, Springer, 2004.
7. N. Zorboska, "Toeplitz operators with BMO symbols and the Beresin transform", IJMMS. vol. 46, pp. 2929–2945, 2003.

Поступила 7 октября 2005