Известия НАН Армении. Математика, 40, № 4, 2005, 5–22

ИНТЕГРИРОВАНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ δ-МЕР

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am

ВВЕДЕНИЕ

Меры в пространствах интегральной геометрии таких, как

$$\mathbb{G} = \text{ прямые в } \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{E} = \text{ плоскости в } \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{\Gamma} = \text{ прямые в } \mathbb{R}^3,$$

допускают "диофантиновы" (по терминологии Дж.Дж.Сильвестра [1]) либо *комбинаторные* (по терминологии [2]) разложения, действительные для множеств A, принадлежащих к так называемым "объединенным кольцам" подмножеств, определенным в тех же самых пространствах (см. обзор [3]). Метод интегрирования "диофантиновых" разложений был представлен в ранних публикациях по Комбинаторной интегральной геометрии, [4], [5] и [2]. Для множеств $A \subset \mathbb{G}$, $\mathbb{\Gamma}$ или $\mathbb{E}$, определенных как совокупности хорд, ограниченных выпуклых областый в $\mathbb{R}^2$ или тел в $\mathbb{R}^3$, интегрирование приводит к интересным результатам. Так, в работах[4], [5] и [2] представлен ряд тождеств или неравенств для выпуклых областей или тел.

Однако, на ранней стадии исследований, комбинаторные разложения всегда записывались для мер, инвариантных относительно евклидовых движений в пространствах $\mathbb{G}$, $\mathbb{E}$ или $\mathbb{\Gamma}$. Интегрирования "диофантиновых" разложений в пространстве $\mathbb{G}$, записанное для δ-мер было впервые описано в работе [3]. Полученное этим методом в [3] *дезинтегрированное изопериметрическое неравенство* послужило мотивировкой для продолжения автором исследований в том же направлении. Настоящая работа сообщает о результатах этих исследований.

Дезинтегрированное изопериметрическое неравенство [3] относится к X-лучу плоской выпуклой области, исходящего из точки на границе области : в этом смысле этот результат принадлежит к плоской *томографии*. Ради полноты изложения мы поместили в §1 краткое изложение этого результата. Тот же §1 содержит новые выводы относительно X-гау плоских выпуклых областей, включая новый альтернативный метод получения дезинтегрированных изопериметрических неравенств. Подобные вопросы, относящиеся к выпуклым телам в $\mathbb{R}^3$ составляют тему §3-§5.

В трех измерениях существует два способа применения "диофантиновых" разложений для δ-мер : либо путем дальнейшего интегрирование результатов, полученных для плоскости, либо начиная процесс с некоторого "диофантинова" разложения, непосредственно ассоциированного с выпуклым телом. В §2 мы применяем первый и в §3-§5 - второй методы. В обоих случаях X-гау исходят из точки на границе выпуклого тела и результаты относятся к *интегральным томографическим параметрам*, т.е. определенным интегралам от X-гау. Очевидно, что X-гау, исходящий из границы, сводится к уравнению границы рассматриваемого тела в пространственных полярных координатах с центром в начале X-гау.

§1. ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Введем основные обозначения, используемые в этом параграфе :

$\mathbf{D}$ = *строго выпуклая* ограниченная открытая область в $\mathbb{R}^2$,

$\partial\mathbf{D}$ = кусочно-гладкая граница $\mathbf{D}$,

χ = хорда области $\mathbf{D}$ (т.е. $\chi = g \cap \mathbf{D}$ с $g \in \mathbf{G}$), или ее длина, соответственно,

$[\mathbf{D}]$ = пространство хорд $\mathbf{D}$ (подмножество пространства $\mathbf{G}$),

dg = мера инвариантная относительно евклидовых движений в $\mathbf{G}$,

ν = ориентированная хорда области $\mathbf{D}$,

$[\mathbf{D}]_\bullet$ = пространство ориентированных хорд $\mathbf{D}$,

$d\nu$ = сужение dg на $[\mathbf{D}]_\bullet$ (локально, $d\nu = dg$),

$[\nu]$ = множество прямых в $\mathbf{G}$, разделяющих концы от ν.

Для данной последовательности $\nu_1, ..., \nu_n$ направленных хорд $\mathbf{D}$, $n \geq 2$, определим

$$A = \bigcap_1^n [\nu_i] \subset [\mathbf{D}].$$

Выберем прямую $g_0 \in [\mathbf{D}]$ и запишем

δ_0 = δ-мера в пространстве $\mathbf{G}$, сосредоточенная на g_0.

Предположим никакие три конца хорд ν_i не лежат на одной прямой, тогда применение стандартных алгоритмов работ [2], [3] приведет к "диофантинову" разложению на плоскости

$$2\,\delta_0(A) = 2\sum_{i=1}^{n} I_{[\nu_i]}(g_0)\, I_{n-1}(\nu_i) + \sum_{k<l}^{*} I_{[P_k,P_l]}(g_0)\, I_{n-2}(g_{kl})\,[I_d - I_s]. \qquad (1.1)$$

где

$I_{[\nu]}(g)$ = индикаторная функция множества $[\nu]$,

$I_m(g) = 1$, если прямая g пересекается m иглами из совокупности $\nu_1, \ldots, \nu_n$.

g_{kl} = прямая, проходящая через P_k, P_l.

$I_d = 1$, если ν_k и ν_l лежат в *различных* полуплоскостях относительно g_{kl}, 0 в противном случае,

$I_s = 1$, если ν_k и ν_l лежат в *одних и тех же* полуплоскостях относительно $g_{kl}(\varphi_0)$, 0 в противном случае,

сумма $\sum_{k<l}^{*}$ берется по всем 2-подмножествам $\{P_k, P_l\}$ совокупности концов игл $\nu_1, \ldots, \nu_n$, которые не являются парами концов некоторой иглы ν_i. Так число слагаемых в $\sum_{k<l}^{*}$ равняется $n(2n-1) - n = 2n(n-1)$.

Проинтегрируем (1.1) относительно меры $d\nu_1 \ldots d\nu_n$. Во-первых,

$$2\int \ldots \int \delta_0(A)\, d\nu_1 \ldots d\nu_n = 2\prod_{i=1}^{n} \int I_{[\chi_0]_*}(\nu_i)\, d\nu_i = 2\,(4\chi_0)^n. \qquad (1.2)$$

где

$$\chi_0 = g_0 \cap \mathbf{D}, \quad [\chi_0]_* = \text{ориентированная хорда, пересекающая } [\chi_0].$$

Из соображений симметрии, получим

$$2\int \ldots \int \sum_{i=1}^{n} I_{n-1}(\nu_i)\, \delta_0([\nu_i])\, d\nu_1 \ldots d\nu_n = 2n \int_{[\chi_0]_*} d\nu_1 \int \ldots \int I_{n-1}(\nu_1)\, d\nu_2 \ldots d\nu_n =$$

$$= 4n \int_{[\chi_0]} (4\chi)^{n-1}\, dg. \qquad (1.3)$$

Заметим, что коэффициент 2 заменен на 4, поскольку $[\chi_0]$ есть множество в пространстве $[\mathbf{D}]$. Далее воспользуемся хорошо известными формулами

$$d\nu = \sin\psi\, dl\, d\psi \quad \text{и} \quad dg = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{\chi_{12}}\, dl_1\, dl_2, \qquad (1.4)$$

где

l = одномерная координата хвоста ν на $\partial\mathbf{D}$

dl = мера длины на $\partial\mathbf{D}$

ψ = угол между ν и прямой, касательной к $\partial\mathbf{D}$ в точке l,

χ_{12} = хорда, соединяющая точки l_1 и l_2,

α_1, α_2 = углы между χ_{12} и прямыми, касательными к $\partial\mathbf{D}$ в l_1, l_2.

Имеем

$$\int \left[\sum_{k<l}^{\cdot} I_{[P_k, P_l]}(g_0)\, I_{n-2}(g_{kl})\, [I_d - I_s] \right] d\nu_1 \ldots d\nu_n =$$

$$= -8n(n-1) \left[\int_{D_1} \int_{D_2} + \int_{D_2} \int_{D_1} \right] (4\chi_{12})^{n-2} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \, dl_1\, dl_2 =$$

$$= -4n(n-1) \int_{[\chi_0]} (4\chi)^{n-1} \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \, dg. \tag{1.5}$$

(в §4 ниже аналогичные вычисления представлены во всех деталях)

Во второй строке соотношения (1.5) D_1, D_2 = части $\partial\mathbf{D}$ разделенные концами χ_0. Предположим, что углы α_1, α_2 являются *внутренними для* $\mathbf{D}$ и лежат в *одной и той же полуплоскости* относительно χ_{13}.

После сокращения на 4^n, из (1.2), (1.3) и (1.5) получаем

$$\chi_0^n = \frac{n}{2} \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1}\, dg - \frac{1}{2} n(n-1) \int_{[\chi_0]} \chi^{n-1} \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \, dg. \tag{1.6}$$

Согласно линейным свойствам (1.6), это уравненение приводится к

$$F(\chi_0) = \frac{1}{2} \int_{[\chi_0]} f(\chi)\, dg - \frac{1}{2} \int_{[\chi_0]} f'(\chi)\, \chi \cot\alpha_1 \cot\alpha_2 \, dg, \tag{1.7}$$

сначала для полиномиальных функций f вида $f(x) = a_1 x + \ldots + a_n x^n$. По теореме Вейерштрасса об аппроксимации, соотношение (1.7) имеет место для каждой функции $f(x)$ с непрерывной первой производной $f'(x)$; в (1.7),

$$F(x) = \int_0^x f(u)\, du. \tag{1.8}$$

Укажем на применения(1.6), относящиеся к томографии. Для $n = 2$, (1.6) представляем в виде

$$\int_{[\chi_0]} \chi\, dg = \int_{D_1} \int_{D_2} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \, dl_1 dl_2 + \chi_0^2. \tag{1.9}$$

С другой стороны, согласно (1.4), имеем

$$\int_{[\chi_0]} \chi\, dg = \int_{D_1} \int_{D_2} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \, dl_1\, dl_2. \tag{1.10}$$

Выберем точку $P \in \partial\mathbf{D}$, в которой $\partial\mathbf{D}$ имеет *ненулевую кривизну* и пусть χ_0 меняется так, что дуга D_1 стягивается к точке P. Тогда D_2 стремится к $\partial\mathbf{D}$. Разделив уравнения (1.9) и (1.10) на χ_0 и вычислив пределы, используя (1.4) получим тождества

$$\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi = \int_{[P]} \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \, dl_2, \tag{1.11}$$

$$\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi = \int_{[P]} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \, dl_2. \tag{1.12}$$

Здесь $[P]$ обозначает пучок прямых, проходящих через точку P, интерпретируемый либо как $(0,\pi)$ либо как $\partial\mathbf{D}$. Так что $d\psi$ и dl_2 являются в действительности мерами на $[P]$. Очевидно, α_2 измеряется в точке l_2, а χ есть длина хорды, выходящей из P в направлении α_1. Суммируя (1.11) и (1.12), получим, что

$$2\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi = \int_{[P]} \cos(\alpha_1 - \alpha_2)\, dl_2 = H - 2\int_{[P]} \sin^2\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\, dl_2, \tag{1.13}$$

где H есть периметр области $\mathbf{D}$. Интеграл

$$T(P) = \frac{1}{2}\int_{[P]} \chi \sin\psi \, d\psi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \chi \sin\psi \, d\psi, \tag{1.14}$$

определен для любого $P \in \partial\mathbf{D}$ при условии, что существует касательная в точке P. В (1.14), χ = хорда области $\mathbf{D}$, выходящая из точки $P \in \partial\mathbf{D}$ и образующая угол ψ с касательной в P. В стандартных томографических терминах, $T(P)$ – весовой интеграл от $\chi = \chi(\psi)$, *X-ray* из точки $P \in \partial\mathbf{D}$.

Отметим некоторые свойства $T(P)$. В более слабой форме, (1.13) можно записать в виде неравенства

$$T(P) \leq \frac{H}{4}, \tag{1.15}$$

сводящееся к равенству, если $\mathbf{D}$ является круговым диском (в этом случае $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ и дефицитный член в соотношении (1.13) исчезает). На самом деле, записав простое дифференциальное уравнение, можно показать, что если условие $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ удовлетворено хотя бы для одной точки $P \in \partial\mathbf{D}$, то $\mathbf{D}$ является круговым диском. Это оначает, что, по крайней мере в классе областей $\mathbf{D}$ с гладкими границами, нерапенство (1.15) станет равенством тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}$ является круговым диском. Согласно стандартным формулам интегральной геометрии (см.[6]), имеем

$$\int_{\partial\mathbf{D}} T(l)\, dl = \int \chi \, dg = \pi\,\|\mathbf{D}\|, \qquad \pi\text{раз площадь области } \mathbf{D}.$$

Интегрируя (1.15) по границе $\partial\mathbf{D}$, получим классическое изопериметрическое неравенство :

$$\pi\,||\mathbf{D}|| \le \frac{H^2}{4}.$$

Следовательно, неравенство (1.15) можно назвать *дезинтеграцией изопериметрического неравенства.*

В силу неравенства Шварца имеем

$$\left[\int_{[P]} \chi\,\sin\psi\,d\psi\right]^2 \le \frac{\pi}{2}\int_{[P]} \chi^2\,d\psi.$$

Очевидно, что $\frac{1}{2}\chi^2\,d\psi$ есть элемент площади в $\mathbf{D}$, так что

$$T_1(P) = \int_{[P]} \chi^2\,d\psi = 2\,||\mathbf{D}||, \tag{1.16}$$

откуда следует, что

$$4T^2(P) \le \pi\,||\mathbf{D}||, \quad \text{или, эквивалентно,} \quad 4T^2(P) \le \frac{\pi}{2}\,T_1(P). \tag{1.17}$$

Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\chi = C\,\sin\psi$ т.е. когда $\mathbf{D}$ есть диск диаметра C.

Фактически, $T_1(P)$ является другим томографическим параметром, зависящим от X-ray из точки $P \in \partial\mathbf{D}$. Примечательно, что из (1.17) следует заключение относительно возможности томографического подтверждения гипотезы о том, что $\mathbf{D}$ является круговым диском на основе параметров $T(P)$ и $T_1(P)$.

Пусть $\mathbf{D}$ *– ограниченная выпуклая область на плоскости и* $P \in \partial\mathbf{D}$ *– точка гладкости* $\partial\mathbf{D}$. *Если*

$$4T^2(P) = \frac{\pi}{2}\,T_1(P)$$

то $\mathbf{D}$ *является круговым диском.*

В заключение параграфа, применим к (1.7) ту же процедуру. Результат

$$\int_{[P]} f(\chi)\,\sin\alpha_1\,d\alpha_1 = \int_{[P]} f'(\chi)\,\chi\,\cos\alpha_1\,\cot\alpha_2\,d\alpha_1, \tag{1.18}$$

будет справедлив для любой функции $f(x)$ с непрерывной производной $f'(x)$ и такой, что $f(0) = 0$. В этом тождестве α_1, α_2 суть углы между хордой $\chi \in [P]$, $P \in \partial\mathbf{D}$ и границей $\partial\mathbf{D}$ в концах хорды χ. В частности, α_1 – угол между χ и касательной к $\partial\mathbf{D}$ в точке P. Напомним, что углы α_1, α_2 суть внутренние к области $\mathbf{D}$ и лежат в одной полуплоскости относительно хорды χ.

Укажем случай, когда возможно интегрирование. Пусть две хорды $\chi_1, \chi_2 \in [P]$ удовлетворяют условиям

1) длины $\chi_1 = \chi_2 = x > 0$ и

2) для каждой хорды $\chi \in [P]$, что лежит между χ_1 и χ_2, имеем $\chi > x$, в противном случае $\chi < x$.

Тогда для функции

$$f_x(u) = 0 \text{ при } u < x, \quad f_x(u) = 1 \text{ при } u > x.$$

(1.18) принимает вид

$$\int_{\{\chi > x\}} \sin\alpha_1\, d\alpha_1 = \int_{[P]} \delta_x(\chi)\, \chi\, \cos\alpha_1\, \cot\alpha_2\, d\alpha_1. \tag{1.19}$$

где $\delta_x(\chi)$ – символ δ–функции со скачком в x. Дополнение к интервалу $\{\chi > x\} \subset (0,\pi)$ есть объединение двух интервалов, длины которых пусть будут β_1 и β_2. Очевидно, что

$$\int_{\{\chi > x\}} \sin\alpha_1 d\alpha_1 = \cos\beta_1 + \cos\beta_2. \tag{1.20}$$

Для интегрирования второго интеграла в (1.19) представим его в виде суммы

$$\int_{[P]} \delta_x(\chi)\, \chi \cos\alpha_1\, \cot\alpha_2\, d\alpha_1 =$$

$$= \int_{\varepsilon_1} \delta_x(\chi)\, \chi\, \cos\alpha_1\, \cot\alpha_2\, d\alpha_1 + \int_{\varepsilon_2} \delta_x(\chi)\, \chi\, \cos\alpha_1\, \cot\alpha_2\, d\alpha_1.$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \subset (0,\pi)$ – некоторые интервалы, центры которых суть направления χ_1 и χ_2, и обладающие следующим свойством : в каждом ε_i, $i = 1,2$ отображение : *направление* $\longmapsto$ *длина хорды* является взаимно-однозначным.

Пусть $\dfrac{\partial\chi}{\partial\alpha_1} \neq 0$ и существует касательная к концам χ_1, χ_2, тогда имеем Якобиан

$$d\chi = |\cot\alpha_2|\, \chi\, d\alpha_1. \tag{1.21}$$

Следовательно, для $i = 1,2$, в соответствии с равенством (1.20), получим

$$\int_{\varepsilon_i} \delta_x(\chi)\, \chi\, \cos\alpha_1\, \cot\alpha_2\, d\alpha_1 = \int_0^{\varepsilon_i} \delta_x(\chi)\, \cos\alpha_1\, d\chi = \cos\beta_i.$$

Используем (1.21) для преобразования (1.18) к виду

$$\int_{[P]} f(\chi)\, \sin\alpha_1\, d\alpha_1 = \int_{[P]} f'(\chi)\, \cos\alpha_1\, d\chi. \tag{1.22}$$

В силу того, что $f(0) = 0$, это эквивалентно *интегральному соотношению Стилтьеса*

$$\int_{[P]} f(\chi)\, d\cos\alpha_1 = \int_{[P]} \cos\alpha_1\, df(\chi). \tag{1.23}$$

Итак, (1.23) может служить исходным пунктом для получения соотношения (1.18), что, в свою очередь влечет неравенство (1.15), и т.д. Интересно было бы найти другие применения соотношения (1.23) или его вариантов в задаче томографического восстановления области $\mathbf{D}$.

§2. ХОРДЫ, ПЕРЕСЕКАЮЩИЕ ПЛАСТИНКУ

Начнем с одной конкретной параметризации плоскостей $e \in \mathbb{E}$. Для данной *базовой плоскости* $b \in \mathbb{E}$, любая плоскость e, состоящая из множества плоскостей, пересекающих b, может быть параметризована в виде $e = (g, \psi)$, где

g = прямая $b \cap e$, $g \in \mathbf{G}_b$, где

$\mathbf{G}_b$ = пространство прямых, принадлежащих плоскости b,

ψ = плоский угол между e и b.

При каждом выборе b мера, инвариантная относительно евклидовых движений de в пространстве $\mathbb{E}$ записывается в виде

$$de = \sin^2\psi\, dg\, d_g\psi, \tag{2.1}$$

где

dg = мера в пространстве $\mathbf{G}_b$, инвариантная относительно евклидовых движений

$d_g\psi$ = мера, инвариантная относительно вращений на окружности, ортогональной к g.

В пространстве пар (γ, e), где $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ (прямая в $\mathbb{R}^3$) и $e \in \mathbf{p}_\gamma$, где

$\mathbf{p}_\gamma$ = *пучок* плоскостей, содержащих γ,

рассмотрим меру $d\gamma d_\gamma\phi$

$d\gamma$ = инвариантная мера евклидовых движений в пространстве $\mathbb{\Gamma}$, тогда как

$d_\gamma\phi$ = мера на $\mathbf{p}_\gamma$, инвариантная относительно вращений вокруг γ.

В пространстве пар (e, g), где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in \mathbf{G}_e$, рассмотрим меру ded_eg. Благодаря "дуальному" отображению

$$(\gamma, \phi) = (e, g),$$

где $e \in \mathbf{p}_\gamma$ есть плоскость, соответствующая ϕ, а $g \in \mathbf{G}_e$ совпадает с γ как с множеством в $\mathbb{R}^3$, $d\gamma\, d_\gamma\phi$ и ded_eg являются, фактически, мерами в одном и том же пространстве. Хорошо известно, что

$$de\, d_eg = d\gamma\, d_\gamma\phi. \tag{2.2}$$

Пусть $\mathbf{B}$ – *строго выпуклое* ограниченное тело в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\mathbf{B}$ и τ *пластинка, стягивающая* тело $\mathbf{B}$ и соответствующая базовой плоскости, т.е.

$$\tau = \mathbf{B} \cap b.$$

Обозначим

$\mathbb{E}_\tau$ = множество плоскостей, пересекающих τ,

χ_e = длина хорды $e \cap \tau$.

Запишем (1.7) для каждого $e \in \mathbb{E}_\tau$. Интегрирование этого тождества по de вдоль $\mathbb{E}_\tau$ дает

$$\int_{\mathbb{E}_\tau} F(\chi_e)\, de = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{E}_\tau} de \int_{[\chi_e]} f(\chi)\, d_e g - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{E}_\tau} de \int_{[\chi_e]} f'(\chi)\chi \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, d_e g. \tag{2.3}$$

Заметим, что χ_e не зависит от ψ в соотношении (2.1) и χ не зависит от ϕ в (2.2). Отсюда, применяя соотношения (2.1) и (2.2), получим

$$\frac{\pi}{2}\int_{\mathbf{G}_\tau} F(\chi_e)\, d_\tau g = \frac{\pi}{2}\int_{\Gamma_\tau} f(\chi)\, d\gamma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\tau} f'(\chi)\chi\, d\gamma \int_0^\pi \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, d_\gamma\phi, \tag{2.4}$$

где

$\mathbf{G}_\tau$ = прямые в b, пересекающие τ,

$d_\tau g$ = инвариантная мера евклидовых движений в пространстве хорд плластинки τ,

Γ_τ = прямые, исходящие из Γ и пересекающие τ.

Окончательно, применяя результат работы [4]

$$\int_0^\pi \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, d_\gamma\phi = \cot\psi_1^* \cot\psi_2^* \cos\alpha,$$

получим

$$\int_{\mathbb{E}_\tau} F(\chi_g)\, d_\tau g = \int_{\Gamma_\tau} f(\chi)\, d\gamma - \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\tau} f'(\chi)\,\chi \cot\psi_1^* \cot\psi_2^* \cos\alpha\, d\gamma, \tag{2.5}$$

где

χ_g = длина хорды $g \cap \tau$ при $g \in \mathbf{G}_\tau$,

χ = длина хорды $\gamma \cap \mathbf{B}$,

ψ_1^*, ψ_2^* = углы между χ и плоскостями T_1, T_2, касательными к $\partial\mathbf{D}$ в концах хорды χ,

α = плоский угол между двумя плоскостями, содержащими хорду χ и перпендикулярными либо к T_1, либо к T_2.

Теперь, оставляя тело $\mathbf{B}$ неподвижным, будем стягивать пластинку τ (скажем, при помощи параллельного переноса) до точки $P \in \partial\mathbf{B}$, где предполагаем существование касательной плоскости к $\partial\mathbf{B}$. Нашей целью является найти *предельную форму* для (2.5).

Используя (см. [6]) стандартное представление

$$d\gamma = \sin\psi^* \, dP d\Omega,$$

где

Ω = пространственное направление прямой γ

ψ_1^* = угол между Ω и плоскостью, касательной к $\partial\mathbf{B}$ в точке P,

dP = мера площади на границе $\partial\mathbf{B}$,

$d\Omega$ = мера, инвариантная относительно вращений на сфере направлений в $\mathbb{R}^3$.

найдем

$$\int_{\mathbf{\Gamma}_\tau} f(\chi)\, d\gamma = ||\tau|| \int_{]P[} f(\chi) \sin\psi_1^* \, d\Omega + o(||\tau||).$$

В последнем интеграле

$]P[$ = множество хорд тела $\mathbf{B}$, исходящих из точки $P \in \partial\mathbf{B}$,

χ = длина хорды, исходящей из точки P в пространственом направлении Ω,

$||\tau||$ =площадь пластинки τ.

Применяя выражение для $d\gamma$, получим

$$\int_{\mathbf{\Gamma}_\tau} f'(\chi)\, \chi \cot\psi_1^* \cot\psi_2^* \cos\alpha \, d\gamma =$$

$$= ||\tau|| \int_{\partial\mathbf{D}} f'(\chi)\, \chi^{-1} \cos\psi_1^* \cos\psi_2^* \cos\alpha \, dP + o(||\tau||).$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет при $x = 0$ равенству $f(x) = o(x)$, то

$$\int_{\mathbf{E}_\tau} F(\chi_e)\, dg = o(||\tau||). \tag{2.6}$$

Так, что при условии (2.6) предельная форма выражения (2.5) примет вид

$$\int_{]P[} f(\chi) \sin\psi_1^* \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\partial\mathbf{D}} f'(\chi)\, \chi^{-1} \cos\psi_1^* \cos\psi_2^* \cos\alpha \, dP. \tag{2.7}$$

Применяя Якобиан

$$d\Omega = \frac{\sin\psi_2^*}{\chi^2}\, dP,$$

получим соотношение, "дуальное" к (2.7)

$$\int_{]P[} f(\chi)\sin\psi_1^* \, d\Omega = \int_{\partial\mathbf{D}} f(\chi)\,\frac{1}{\chi^2}\,\sin\psi_1^*\,\sin\psi_2^*\,dP \tag{2.8}$$

Теперь в (2.7) и (2.8) положим $f(x) = x^n$ и сложим оба уравнения. Получим

$$\int_{]P[} \chi^n \sin\psi_1^*\,d\Omega \le \frac{n}{2(n+2)}\int_{\partial\mathbf{B}} \chi^{n-2}\,dP. \tag{2.9}$$

в частности,

$$\int_{]P[} \chi^2 \sin\psi_1^*\,d\Omega \le \frac{1}{2}\|\partial\mathbf{B}\|, \tag{2.10}$$

где $\|\partial\mathbf{B}\|$ есть площадь $\partial\mathbf{B}$.

Значение величин

$$T_f(P) = \int_{]P[} f(\chi)\,\sin\psi_1^*\,d\Omega$$

имеет томографию, подобную $T(P)$ в §1 : они являются $\sin\psi_1^*$ весовыми интегралами вдоль X-ray хорд, исходящего из точки $P\in\partial\mathbf{B}$.

Неравенство (1.17), связывающее параметры $T(P)$ и $T_1(P)$ служит исходным пунктом для другого вычисления. Проинтегрируем (1.17) для $\mathbf{D} = e\cap\mathbf{B}$, относительно меры

$d\omega$ = инвариантная мера, заданная на множестве

$<P>$ = плоскости, проходящие через точку $P\in\partial\mathbf{D}$,

согласно параметризации $e\longmapsto\omega$:

ω = нормаль направления к плоскости $e\in]P[$.

Имеем

$$\int_{<P>} T^2(P)\,d\omega = \int_{<P>} d\omega \iint_{\psi_1,\psi_2\in e} \chi_1\sin\psi_1\,\chi_2\sin\psi_2\,d\psi_1\,d\psi_2.$$

Пользуясь соотношением

$$\sin\psi_1\,\sin\psi_2\,d\psi_1\,d\psi_2\,d\omega = \sin\psi_{12}\,d\Omega_1\,d\Omega_2$$

где

Ω_i = пространственное направление хорды χ_i, $i=1,2$,

$d\Omega$ = инвариантная мера на единичной сфере, а

ψ_{12} = угол между направлениями Ω_1,Ω_2.

Получим

$$\int_{<P>} T^2(P)\,d\omega = \iint_{]P[\times]P[} \chi_1\chi_2\sin\psi_{12}\,d\Omega_1\,d\Omega_2.$$

где

$[P]$ = множество хорд тела $\mathbf{B}$, исходящих из точки $P \in \partial\mathbf{B}$.

С другой стороны, согласно соотношению

$$d\omega\, d\psi = d\Omega\, d_\Omega \phi$$

где $d_\Omega \phi$ = инвариантная мера на единичной окружности, ортогональной к Ω, получим

$$\int_{<P>} T_1(P)\, d\omega = \pi \int_{[P]} \chi^2\, d\Omega.$$

Так, мы приходим к неравенству

$$4 \iint_{[P]\times[P]} \chi_1\chi_2 \sin\psi_{12}\, d\Omega_1\, d\Omega_2 \le \frac{\pi^2}{2} \int_{[P]} \chi^2\, d\Omega. \tag{2.11}$$

С обеих сторон участвуют параметры, допускающие интерпретацию в пространственной томографии ; из критерия плоской томографии в параграфе §1 следует следующий критерий :

неравенство(2.11) сводится к равенству тогда и только тогда, когда почти каждая (относительно меры de) плоская секция тела $\mathbf{B}$ *является круговым диском.* (Предположительно, тогда $\mathbf{B}$ является шаром.)

§3. КОМБИНАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ δ–МЕР В $\mathbb{E}$

Комбинаторные разложения для *δ–мер* в пространстве $\mathbf{E}$ могут задаваться теми же комбинаторными коэффициентами, что и в случае плоскости. Элемент $\mathbb{E}$, на котором будет сосредоточена δ–мера назовем *базовым* и запишем

b = базовая плоскость.

Обозначим также

φ = некоторое направление на плоскости b (параметр будущего разложения).

e_φ = плоскость, *нормальная* к направлению φ,

$\mathbb{E}_\varphi$ = пространство плоскостей, ортогональных к плоскости e_φ,

$\mathbf{G}_\varphi$ = пространство прямых на плоскости e_φ.

Каждой прямой $g \in \mathbf{G}_\varphi$ соответствует плоскость $e \in \mathbb{E}_\varphi$, определеная соотношением

$$g = e_\varphi \cap e, \tag{3.1}$$

и наоборот. Пусть задано конечное множество точек $\{P_i\} \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим $\{Q_i\}$ – перпендикулярную проекцию множества $\{P_i\}$ на e_φ, где

Q_i = перпендикулярная проекция P_i на e_φ.

Обращение отображения (3.1) определяет кольцо $r_\varphi\{P_i\}$ in $\mathbb{E}_\varphi$:
$A \subset \mathbb{E}_\varphi$ принадлежит кольцу $r_n\{P_i\}$ тогда и только тогда, когда множество $B = \{g = e_\varphi \cap e : e \in A\}$ принадлежит $r\{Q_i\}$, определенному, как обычно, (см. [2], [3]) в $\mathbf{G}_n$.

Пусть

$\delta_g = \delta$ мера в пространстве $\mathbf{G}_n$, сконцентрированная на элементе $g \in \mathbf{G}_n$.
Очевидно, что для любого $B \subset \mathbf{G}_n$ и $g \in \mathbf{G}_n$, выполняется

$$\delta_g(B) = I_B(g)$$

где $I_B(g)$ – обычная индикаторная функция. При условии, что прямая $g \in \mathbf{G}_n$ не содержит точек Q_i, для любого $B \in r_2\{Q_i\}$ можем записать комбинаторное разложение для меры δ_g в "индикаторной" форме

$$2\, I_B(g) = \sum_{i<j} u_{ij}(B)\, I_{[Q_i, Q_j]}(g), \tag{3.2}$$

где

$[Q_i, Q_j]$ = множество прямых в $\mathbf{G}_n$, разделяющих Q_i от Q_j. При соотношении (3.1) этому множеству соответсвует

$[P_i, P_j]$ = множество плоскостей в $\mathbb{E}_\varphi$, разделяющих P_i от P_j.

При этих соответствиях имеем

$$I_B(g) = I_A(e) \ \text{ и } \ I_{[Q_i, Q_j]}(g) = I_{[P_i, P_j]}(e),$$

откуда, для базовой плоскости b сотношение (3.2) представляется в виде

$$2\, I_A(b) = \sum_{i<j} u_{ij}(B)\, I_{[P_i, P_j]}(b). \tag{3.3}$$

Алгоритм вычисления коэффициентов $u_{ij}(B)$ можно с легкостью переформулировать в терминах плоскостей

$e_{ij}(\varphi)$ = плоскость, содержащая точки P_i, P_j и направления φ, $e_{ij}(\varphi) \in \mathbb{E}_\varphi$,
так это сделано ниже.

§4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ БЮФФОНА-СИЛЬВЕСТРА В $\mathbb{R}^3$

Пусть $\mathbf{B}$ = ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$. Пространство пластинок $\tau = \mathbf{B} \cap e$, $e \in \mathbf{E}$, по существу, совпадает с множеством

$\mathbb{E}_\mathbf{B}$ = множество плоскостей, пересекающих тело $\mathbf{B}$, так, что $\tau \in \mathbb{E}_\mathbf{B}$.

Мы также используем обозначения

$||\tau||$ = площадь пластинки τ.

$\mathbb{\Gamma}_\tau$ = множество хорд тела $\mathbf{B}$, пересекающие пластинку τ (ср. §2).

$[\nu]$ = пластинки, пересекающие хорду ν тела $\mathbf{B}$,

$\nu_1, \ldots, \nu_n$ = n направленных хорд тела $\mathbf{B}$.

$\{P_i\}$ = множество концов хорд ν_i, $i = 1, \ldots, n$,

Рассмотрим разложение (3.3) для

$A = \cap_{i=1}^n [\nu_i]$ = пластинки, пересекающие все хорды ν_i, $i = 1, \ldots, n$, $A \in \tau_\varphi\{P_i\}$, и

δ_b = δ-мера на $\mathbb{E}_\mathbf{B}$, сосредоточенная на некоторой *базовой пластинке* b.

Рассмотрим в пространстве n направленных хорд $\nu_1, \ldots, \nu_n$ меру

$$d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_n,$$

где каждая $d\nu_i$ является элементом инвариантной меры в $\mathbb{\Gamma}$. Плоскость b не содержит точки P_i для почти всех $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$. Согласно (3.3), коэффициенты в комбинаторном разложении для $\delta_b(A)$ по существу те же, что и в (1.1) :

$$2\,\delta_b(A) = 2\sum_{\nu_i} I_{[\nu_i]}(b)\, I_{n-1}(\tau_i(\varphi)) + \sum_{k<l}^{\bullet} I_{[P_k, P_l]}(b)\, I_{n-2}(\tau_{kl}(\varphi))\,[I_d - I_s] \qquad (4.1)$$

где

$I_{[\nu]}(\tau)$ = индикаторная функция множества $[\nu]$,

$I_m(\tau)$ =1, если пластинка τ пересекается m иглами из совокупности $\nu_1, \ldots, \nu_n$,

$\tau_i(\varphi)$ = пластинка, содержащая ν_i и направление φ,

$\tau_{kl}(\varphi)$ = пластинка, содержащая хорду P_k, P_l и направление φ,

I_d = 1, если ν_k и ν_l лежат в *различных* полупространствах относительно $\tau_{kl}(\varphi)$), 0 – в противном случае,

I_s = 1, если ν_k и ν_l лежат в *тех же самых* полупространствах относительно $\tau_{kl}(\varphi)$, 0 – в противном случае.

Пусть концы P_k, P_l фиксированы, тогда индикаторные функции I_d, I_s зависят только от направлений игл ν_k, ν_l, которые исходят из P_k и P_l.

Проинтегрируем (4.1) относительно $d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_n$. Во-первых, получим

$$2\int \delta(A)\, d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_n = 2\int I_A(b)\, d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_n = 2\,(2\pi||b||)^n. \qquad (4.2)$$

Из соображений симметрии

$$2\int d\nu_1\, d\nu_2 \ldots d\nu_n \sum_{\nu_i} I_{[\nu_i]}(b)\, I_{n-1}(\tau_i(\varphi)) =$$

$$= 2n \int I_{[\nu_1]}(b)\, I_{n-1}(\tau_1(\varphi))\, d\nu_1\, d\nu_2 ... d\nu_n =$$

$$= 2n \int_{[b]} (2\pi \|\tau_1(\varphi)\|)^{n-1}\, d\nu_1. \tag{4.3}$$

Интегрируя последний член в (4.1), для $i = 1, 2$ используем параметризацию

$$\nu_i = (P_i, \Omega_i),$$

где

P_i = *хвост* направленной хорды ν_i,

Ω_i = пространственное направление хорды ν_i (изменяется в полусфере). Обозначим

ψ_i = угол между Ω_i и направлением внутренней нормали в точке $P_i \in \partial\mathbf{D}$.

В силу симметрии выполняется

$$\int d\nu_1\, d\nu_2 ... d\nu_n \sum_{k<l}^{*} I_{[P_k, P_l]}(b)\, I_{n-2}(\tau_{kl}(\varphi))\, [I_d - I_s] =$$

$$4\,n(n-1) \int_{P_1 \in D_1, P_2 \in D_2} (2\pi \|\tau_{12}(\varphi)\|)^{n-2} [I_d - I_s] \cos\psi_1 \cos\psi_2\, dP_1\, d\Omega_1\, dP_2\, d\Omega_2, \tag{4.4}$$

где

D_1, D_2 = две части границы $\partial\mathbf{B}$, разделенные границей базовой пластинки b.

Оставляя P_1, P_2 фиксированными, вычислим, по отдельности, интегралы

$$Z_d = \iint I_d \cos\psi_1 \cos\psi_2\, d\Omega_1\, d\Omega_2 \text{ и } Z_s = \iint I_s \cos\psi_1 \cos\psi_2\, d\Omega_1\, d\Omega_2.$$

Очевидно, что

$$Z_s = \int_{\Delta_1} \cos\psi_1\, d\Omega_1 \int_{\Delta_2} \cos\psi_2\, d\Omega_2 + \int_{\Delta_1^c} \cos\psi_1\, d\Omega_1 \int_{\Delta_2^c} \cos\psi_2\, d\Omega_2,$$

где Δ_1, Δ_2 есть множества пространственных направлений :

Δ_i = плоский угол между $\tau_{12}(\varphi)$ и плоскостью, касательной к $\partial\mathbf{D}$ в P_i, $i = 1, 2$,

Δ_i^c = плоский угол, дополнительный к Δ_i, $i = 1, 2$,

для $i = 1, 2$, *углы* Δ_i, Δ_i^c *находятся внутри* $\mathbf{B}$, *в одном и том же полупространстве относительно* $\tau_{12}(\varphi)$. Аналогично, получаем

$$Z_d = \int_{\Delta_1} \cos\psi_1\, d\Omega_1 \int_{\Delta_2^c} \cos\psi_2\, d\Omega_2 + \int_{\Delta_1^c} \cos\psi_1\, d\Omega_1 \int_{\Delta_2} \cos\psi_2\, d\Omega_2.$$

Легко видеть, что $\int_{\Delta_1} \cos\psi_1\, d\Omega_1$ является площадью проекции сферического "двуугольника" Δ_1 на экватор параллельно плоскости, касательной в точке P_1. Следовательно,

$$\int_{\Delta_1} \cos\psi_1\, d\Omega_1 = \frac{\pi}{2}\,(1 - \cos|\Delta_1|),$$

где $|\Delta|$ обозначает развернутый угол между плоскостями, ограничивающими Δ. Из подобных равенств получаем

$$Z_d - Z_s = -\pi^2 \cos|\Delta_1| \cos|\Delta_2|. \tag{4.5}$$

После сокращения на $(2\pi)^n$ из (4.1) - (4.6) получим

$$2\,||b||^n = \frac{n}{\pi} \int_{[b]} ||\tau_1(\varphi)||^{n-1}\, d\nu_1 -$$

$$-n(n-1) \iint_{D_1\times D_2} ||\tau_{12}(\varphi)||^{n-2} \cos|\Delta_1| \cos|\Delta_2|\, dP_1 dP_2. \tag{4.6}$$

§5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СТИЛТЬЕСА

Для ограниченного выпуклого тела $\mathbf{B}$ in $\mathbb{R}^3$ рассмотрим *предельную форму* тождества (4.6). Применяя к b последовательность параллельных переносов, сожмем эту пластинку до точки $P_0 \in \partial\mathbf{B}$, в которой существует касательная к $\partial\mathbf{B}$ плоскость. Для всех $n \geq 2$ имеем $||b||^n = o(||b||)$. Следовательно, умножая (4.6) на $||b||^{-1}$ и устремляя $||b|| \to 0$, получим для $m = 1, 2...$

$$\frac{1}{\pi} \int_{[P_0]} ||\tau_\Omega(\varphi)||^m \cos(\Omega, \mathbf{n}_0)\, d\Omega = m \int_{\partial\mathbf{D}} ||\tau_{P_0,P}(\varphi)||^{m-1} \cos|\Delta_1| \cos|\Delta_2|\, dP. \tag{5.1}$$

где

$]P_0[$ = пучок хорд тела $\mathbf{B}$, исходящих из точки $P_0 \in \partial\mathbf{B}$ (полусфера пространственных направлений)

$\tau_\Omega(\varphi)$ = пластинка, стягиающая $\mathbf{B}$ и содержащая направления Ω и φ,

$(\Omega, \mathbf{n}_0)$ = угол между направлениями Ω и $\mathbf{n}_0$ = направление внутренней нормали к $\partial\mathbf{B}$ в точке P_0,

$\tau_{P_0,P}(\varphi)$ = пластинка, стягиающая $\mathbf{B}$ и содержащая точки $P_0, P \in \partial\mathbf{B}$ и направление φ.

Рассмотрим интеграл

$$T(P_0) = \frac{1}{\pi} \int_{[P_0]} ||\tau_\Omega(\varphi)||^m \cos(\Omega, \mathbf{n}_0)\, d\Omega.$$

В стандартных координатах на единичной сфере с полюсом в точке φ имеет место

$$d\Omega = \sin\lambda \, d\phi \, d\lambda,$$

где

$\lambda =$ угол между Ω и φ.

$\phi =$ азимут направлений Ω, измеряемый от $\mathbf{n}_0$, т.е. $\phi = \frac{\pi}{2} - |\Delta_1|$.

Фактически, $||\tau_\Omega(\varphi)||^n$ зависит от Ω только через азимута ϕ, т.е.

$$||\tau_\Omega(\varphi)|| = ||\tau_\phi(\varphi)||.$$

В силу соотношения

$$||\tau_\phi(\varphi)|| = \frac{1}{2}\int_0^\pi \chi^2 \, d\lambda \tag{5.2}$$

справедливого для каждого азимута ϕ, приходим к выводу, что $T(P_0)$ *есть томографический параметр* (функция $\chi = \chi(\Omega)$ представляет X-гау, исходящий из точки P_0).

Применяя сферическую cos-теорему

$$\cos(\Omega, \mathbf{n}_0) = \cos\phi \, \sin\lambda,$$

получим $T(P_0)$ в виде одномерного интеграла

$$T(P_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi ||\tau_\phi(\varphi)||^m \cos\phi \, d\phi \int_0^\pi \sin^2\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\pi ||\tau_\phi(\varphi)||^m \sin|\Delta_1| \, d\phi. \tag{5.3}$$

Теперь рассмотрим другой интеграл в (5.1). На самом деле, ϕ, λ могут служить координатами на границе $\partial\mathbf{B}$. Соответствующий Якобиан запишется в виде

$$dP = \frac{\chi^2}{\cos\psi} d\Omega = \frac{\chi^2}{\cos\psi}\sin\lambda \, d\phi \, d\lambda$$

где

$\psi =$ угол между направлениями Ω и направлением, нормальному к $\partial\mathbf{B}$ в точке P. Откуда получаем

$$\int_{\partial\mathbf{B}} ||\tau_{P_0,P}(\varphi)||^{m-1}\cos|\Delta_1|\cos|\Delta_2| \, dP = \int_0^\pi ||\tau_\phi(\varphi)||^{m-1}\cos|\Delta_1| \, Q(\phi) \, d\phi$$

где

$$Q(\phi) = \int_0^\pi \cos|\Delta_2| \frac{\chi^2}{\cos\psi}\sin\lambda \, d\lambda$$

Таким образом соотношение (5.1) представляется в виде

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi ||\tau_\phi(\varphi)||^m \sin|\Delta_1|\,d\phi = m\int_0^\pi ||\tau_\phi(\varphi)||^{m-1}\cos|\Delta_1|\,Q(\phi)\,d\phi \tag{5.4}$$

Можно убедиться, что

$$\left|\frac{\partial||\tau_\phi(\varphi)||}{\partial\phi}\right| = |Q(\phi)|$$

Повторяя соображения параграфа §1, получим интегральное соотношение Стилтьеса

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi F(||\tau_\phi(\varphi)||)\,d\sin|\Delta_1| = \int_0^\pi \cos|\Delta_1|\,dF(||\tau_\phi(\varphi)||) \tag{5.5}$$

действительное для любой функции $F(u)$, определенной при $u > 0$ с непрерывной производной и удовлетворяющей условию $F(0) = 0$. Последнее уравнение является аналогом уравнения (1.23).

Abstract. Measures in the Integral Geometry spaces such as $\mathbb{G}$ = lines in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}$ = planes in $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{\Gamma}$ = lines in $\mathbb{R}^3$ admit "Diophantine" or *combinatorial* decompositions valid for the sets A that belong to the so-called "Union rings" of subsets defined in the same spaces. Cases of integration of the "Diophantine" decompositions can be found in the earliest publications on Combinatorial Integral Geometry. For sets $A \subset \mathbb{G}$, $\mathbb{\Gamma}$ or $\mathbb{E}$ determined by collections of chords of bounded convex domains in $\mathbb{R}^2$ or bodies in $\mathbb{R}^3$, the integration procedures have led to a variety of identities or inequalities that are of interest in the convexity theory. However, at the early stage the combinatorial decompositions were always written for Euclidean motion invariant measures in the mentioned spaces. The first case of integration of a "Diophantine" decomposition in the space $\mathbb{G}$ written for delta-measures led to *the disintegrated isoperimetric inequality* that became the author's main motivation for further attempts in the same direction. The purpose of the present paper is to report on those attempts.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.J. Sylvester, "On a funicular solution of Buffon's "problem of the needle" in its most general form, Acta. Math., vol. 14, pp. 185-205, 1890.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. Р. В. Амбарцумян, "Аналитические применения комбинаторной интегральной геометрии : обзор", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 6, стр. 2 - 46, 1999.
4. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon—Sylvester problem in $\mathbb{R}^3$," Z. Wahrscheinlichkeits theorie, verw. Geb., vol. 27, pp. 53 — 74, 1973.
5. R. V. Ambartzumian, "The solution to the Buffon-Sylvester problem and stereology", Transactions ICM, vol. 2, Vancouver (Canada), 1974.
6. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

Поступила 1 мая 2005