Известия НАН Армении. Математика, 40, № 4, 2005, 42-57

ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ ХОРДЫ ДЛЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Н. Г. Агаронян, В. К. Оганян

Ереванский государственный университет
E-mails : narine78@ysu.am ; victo@aua.am

Резюме. В статье получены элементарные выражения для функции распределения длины хорды правильного треугольника, правильного пятиугольника и прямоугольника. Формулы выводятся двумя различными методами : а) прямым вычислением соответствующей плотности и б) используя δ-формализм в тождестве Плейеля. Для правильного треугольника и прямоугольника результаты совпадают с результатами Зуланке (1961) и Гилле (1988).

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\mathbf{G}$ – пространство всех прямых g на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, (p, φ) – полярные координаты основания перпендикуляра, опущенного из начала координат O на прямую g, суть стандартные координаты прямой $g \in \mathbf{G}$.

Пусть $\mu(\cdot)$ – локально конечная мера на $\mathbf{G}$, инвариантная относительно группы всех евклидовых движений плоскости. Хорошо известно, что (см. [1])

$$\mu(dg) = dg = dp\, d\varphi.$$

Для любой ограниченной выпуклой области D множество всех прямых, пересекающих D, обозначим через

$$[D] = \{g \in \mathbf{G} : g \cap D \neq \emptyset\}.$$

Имеем (см. [1], [2]) :

$$\mu([D]) = |\partial D|,$$

где ∂D – периметр области D, а $|\partial D|$ – длина периметра ∂D.

Случайная прямая в $[D]$ есть прямая с распределением, пропорциональным сужению меры μ на $[D]$. Следовательно, имеем

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{|\partial D|} \qquad \text{для любого борелевского } A \subset [D]. \tag{1}$$

Далее, пусть A_D^y — множество прямых, пересекающих D и образующих хорду $\chi(g) = g \bigcap D$ длины меньше, чем y :

$$A_D^y = \{g \in [D]: \ \chi(g) < y\}, \qquad y \in \mathbb{R}$$

Функция распределения длины случайной хорды χ области D обычно определяется как

$$F(y) = \frac{1}{|\partial D|}\,\mu(A_D^y) = \frac{1}{|\partial D|}\iint_{A_D^y} d\varphi\, dp. \tag{2}$$

Следовательно, для получения функции распределения длины хорды для ограниченной выпуклой области D, надо вычислить интеграл в правой части (2). Явные выражения для функций распределения длины хорды известны только в случаях круга, правильного треугольника (см. [4]) и прямоугольника (см. [3]).

Основными результатами данной статьи являются элементарные выражения для функции распределения длины хорды для правильного треугольника, правильного пятиугольника и прямоугольника. Формулы выводятся двумя разными методами : а) прямым вычислением плотности распределения ; б) используя δ формализм в тождестве Плейеля. В случаях треугольника и прямоугольника полученные результаты совпадают с результатами Зуланке (1961) и Гилле (1988) (см. также [5] - [8]).

§2. СЛУЧАЙ МНОГОУГОЛЬНИКА НА ПЛОСКОСТИ

Пусть D - выпуклый ограниченный многоугольник на плоскости и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - стороны D. Тогда

$$[D] = \bigcup_{i<j}([a_i] \cap [a_j])$$

где $[a_i] \cap [a_j]$ - множество всех прямых, пересекающих обе стороны a_i и a_j многоугольника D.

Имеем

$$F(y) = \frac{1}{|\partial D|}\sum_{i<j}\iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}} d\varphi\, dp =$$

$$= \frac{1}{|\partial D|}\left[\sum_{i<j}^{I}\iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}} d\varphi\, dp + \sum_{i<j}^{II}\iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}} d\varphi\, dp\right],$$

где $\sum^{I}$ распространяется на все пары непараллельных отрезков a_i, $a_j \subset \partial D$, а $\sum^{II}$ – по всем парам параллельных отрезков a_i и $a_j \subset \partial D$.

Переходя к координатам $(|\chi|, \varphi)$, в каждом из интегралов под знаком суммы $\sum\limits_{i<j}^{I}$, можно провести одно интегрирование. Имеем (см. [2]) :

$$dg = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{|\sin(\alpha_1+\alpha_2)|}\, d|\chi|\, d\varphi, \tag{3}$$

где α_1 - угол между a_i и хордой $\chi(g) = g \cap D$, а α_2 – угол между a_j и $\chi(g)$ $(g \in [a_i] \cap [a_j])$.

Таким образом, получаем

$$F(y) = \frac{1}{|\partial D|}\left[\sum_{i<j}^{I} \iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}} \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{|\sin(\alpha_1+\alpha_2)|}\, d|\chi|\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{i<j}^{II} I(b_{ij} < y) \iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}} d\varphi\, dp\right],$$

где b_{ij} – расстояние между параллельными отрезками a_i и a_j, а $I(A)$ - индикаторная функция события A, т.е. $I(A) = 1$, если имеет место A и 0, в противном случае.

Можно также получить плотность распределения длины случайной хорды для D :

$$f(y)\,dy \approx F(y+dy) - F(y) = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|}\left[\sum_{i<j}^{I} \frac{dy}{\sin\gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2\, d\varphi + \right.$$

$$+ \sum_{i<j}^{II}\left[I(b_{ij} < y+dy) \iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y+dy\}} d\varphi\, dp - \right.$$

$$\left.\left. - I(b_{ij} < y) \iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}} d\varphi\, dp\right]\right],$$

где γ_{ij} – угол между непараллельными сторонами a_i и a_j (или их продолжениями).

$\Phi_{ij}(y) = \{\varphi$: существует хорда направления φ, длины y, соединяющая a_i и $a_j\}$.

Имеем

$$\sum_{i<j}^{II}\left[I(b_{ij}<y+dy)\iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y+dy\}}d\varphi\,dp-\right.$$

$$\left.-\,I(b_{ij}<y)\iint_{\{g\in[a_i]\cap[a_j]:\chi(g)<y\}}d\varphi\,dp\right]=$$

$$=\sum_{i<j}^{II}I(b_{ij}<y)\int_{y<\chi(g)<y+dy}h(\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\sum_{i<j}^{II}I(b_{ij}<y)\,h(\varphi_y)\left[\arccos\frac{b_{ij}}{y+dy}-\arccos\frac{b_{ij}}{y}\right]=$$

$$=dy\sum_{i<j}^{II}I(b_{ij}<y)\,h(\varphi_y)\,\frac{b_{ij}}{y\sqrt{y^2-b_{ij}^2}},$$

где $h(\varphi)\neq b_{ij}$ – высота параллелограмма, две стороны которого равны $\chi(\varphi)=g(\varphi)\cap D$, $g(\varphi)\in[a_i]\cap[a_j]$, а две другие стороны лежат на параллельных сторонах a_i и a_j, $h(\varphi_y)=h(\varphi)$, для которого $\chi(\varphi)=y$ и

$$\frac{d\varphi_y}{dy}=\arccos\frac{b_{ij}}{y+dy}-\arccos\frac{b_{ij}}{y}=\frac{b_{ij}}{y\sqrt{y^2-b_{ij}^2}}. \tag{4}$$

Поскольку $\alpha_1=\pi/2-\varphi$ и $\alpha_2=\pi/2+(\varphi-\gamma_{ij})$, получаем

$$f(y)=\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|}\left[\sum_{i<j}^{I}\frac{1}{\sin\gamma_{ij}}\int_{\Phi_{ij}(y)}\cos\varphi\,\cos(\varphi-\gamma_{ij})\,d\varphi+\right.$$
$$\left.+\sum_{i<j}^{II}I(b_{ij}<y)\,h(\varphi_y)\,\frac{b_{ij}}{y\sqrt{y^2-b_{ij}^2}}\right]. \tag{5}$$

Заметим, что плотность распределения $f(y)$ определяется для любого $y\in\mathbb{R}$ за исключением тех значений y, которые являются сторонами, высотами и диагоналями многоугольника. Для таких значений y, функция распределения $F(y)$ не дифференцируема, но непрерывна.

§3. ТОЖДЕСТВО ПЛЕЙЕЛЯ

Пусть D – выпуклый ограниченный многоугольник на плоскости и $a_1,\dots,a_n$ – стороны многоугольника D. Тождество Плейеля для многоугольника D имеет следующий вид (см. [1] и [2]) :

$$\int_{[D]}f(|\chi(g)|)\,dg=\int_{\mathbf{G}}f'(|\chi|)\cdot|\chi|\cot\alpha_1\,\cot\alpha_2\,dg+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{|a_i|}f(u)\,du, \tag{6}$$

где $f(x)$ – функция с непрерывной первой производной $f'(x)$, α_1 и α_2 – углы между ∂D и прямой g на концах хорды $\chi(g) = g \cap D$, лежащие в одной полуплоскости относительно внутренности многоугольника D, $|a_i|$ суть длины сторон a_i, $i = 1, ..., n$.

Р. В. Амбарцумян в [1] и [2] показал, что тождество (6) полезно при вычислении функции распределения длины хорды в случае ограниченных выпуклых многоугольников. Если в (6) формально подставить

$$f_y(u) = \begin{cases} 0 & \text{если} \quad u \le y \\ 1 & \text{если} \quad u > y \end{cases}$$

то интеграл в левой части (6) будет равен

$$\mu\{g \in [D]: |\chi(g)| > y\},$$

т.е. инвариантной мере множества хорд многоугольника D, длины которых больше y. Производную функции $f_y(u)$ нужно заменить на δ-функцию Дирака, концентрированную в точке y. Следовательно, получаем

$$\begin{gathered}[1 - F(y)]\,|\partial D| = \sum_{i<j}{}^{I} \iint_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, dg + \\ + \sum_{i<j}{}^{II} \iint_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, dg + \sum_{i=1}^{n} (|a_i| - y)^+ ,\end{gathered} \tag{7}$$

где $[a_i]\cap[a_j]$ – множество прямых, пересекающих обе стороны a_i и a_j многоугольника D, $x^+ = x$, если $x > 0$ и 0, в противном случае.

Для любой непрерывной функции f имеем (см. [9]) :

$$\int_{\mathbb{R}^+} \delta(x - y)\, f(x)\, dx = f(y). \tag{8}$$

Для $\{a_i, a_j\} \in \sum_{i<j}^{I}$ делаем замену переменной $(p, \varphi) \to (|\chi|, \varphi)$ и используя (3) и (8), получаем

$$\iint_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, dg = \frac{y}{\sin\gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \sin\varphi \sin(\gamma_{ij} - \varphi)\, d\varphi.$$

Кроме того, для параллельных сторон a_i и a_j (т.е. $a_i, a_j \in \sum_{i<j}^{II}$) используя (4), имеем

$$\begin{aligned}&\sum_{i<j}{}^{II} \iint_{[a_i]\cap[a_j]} \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi| \cot\alpha_1 \cot\alpha_2\, dg = \\ &= -2 \sum_{i<j}{}^{II} I(b_{ij} < y) \int \delta(|\chi| - y) \cdot |\chi|\, h(\varphi_\chi)\, \tan^2\varphi_\chi \frac{d\varphi_\chi}{d\chi}\, d\chi = \\ &= -2 \sum_{i<j}{}^{II} I(b_{ij} < y)\, h(\varphi_y)\, \tan^2\varphi_y \frac{b_{ij}}{\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}},\end{aligned}$$

где $\varphi_y = \arccos \dfrac{b_{ij}}{y}$.
Следовательно, получаем

$$F(y) = 1 - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|} \left[\sum_{i<j}^{I} \frac{y}{\sin \gamma_{ij}} \int_{\Phi_{ij}(y)} \sin\varphi \, \sin(\gamma_{ij} - \varphi)\, d\varphi - \right.$$
$$\left. -2\sum_{i<j}^{II} I(b_{ij} < y)\, h(\varphi_y) \frac{\sqrt{y^2 - b_{ij}^2}}{b_{ij}} + \sum_{i=1}^{n} (|a_i| - y)^+ \right]. \tag{9}$$

В случае, когда ∂D не содержит параллельных сторон, формула (9) совпадает с выражением, приведенным Р. В. Амбарцумяном в [2].
Из (5) и (9) следует, что чтобы найти функцию распределения $F(y)$ или плотность распределения $f(y)$ должны вычислить интегралы вида

$$\frac{1}{\sin\gamma} \int_{\Phi(y)} \cos\varphi \, \cos(\varphi - \gamma)\, d\varphi \tag{10}$$

и

$$\frac{1}{\sin\gamma} \int_{\Phi(y)} \sin\varphi \, \sin(\gamma - \varphi)\, d\varphi \tag{11}$$

для любых двух непараллельных отрезков a и b ($a \le b$) с углом γ между a и b (или их продолжениями) и также вычислить вторую сумму в (5) и (9) (для пар параллельных сторон). В (10) и (11)

$$\Phi(y) = \{\varphi\colon \text{существует хорда, направления } \varphi \text{ и длины } y \text{ соединяющая } a \text{ и } b\}.$$

§4. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим интегралы (10) и (11) для непараллельных отрезков a и b, имеющие общий конец. Имеем значения следующих неопределённых интегралов

$$\frac{1}{\sin\gamma} \int \cos\varphi \, \cos(\varphi - \gamma)\, d\varphi = \cot\gamma \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right] - \frac{1}{4}\cos 2\varphi. \tag{12}$$

$$\frac{1}{\sin\gamma} \int \sin\varphi \, \sin(\gamma - \varphi)\, d\varphi = \cot\gamma \left[-\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right] - \frac{1}{4}\cos 2\varphi. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что для любого $\gamma \in (0, \pi)$ область интегрирования $\Phi(y)$ является подмножеством следующего интервала :

$$\Phi(y) \subset \left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, \frac{\pi}{2}\right].$$

Лемма 1. *а) Для острого угла γ и для $0 < y \le a \sin\gamma$ $(a = \min(a, b))$ и*

б) для тупого угла γ и для $0 < y \le a$ $(a \le b)$

получаем следующие результаты :

$$\frac{1}{\sin\gamma}\int_{\Phi(y)} \cos\varphi \cos(\varphi - \gamma)\, d\varphi = \frac{\pi - \gamma}{2}\cot\gamma + \frac{1}{2}, \tag{14}$$

и

$$\frac{1}{\sin\gamma}\int_{\Phi(y)} \sin\varphi \sin(\gamma - \varphi)\, d\varphi = -\frac{\pi - \gamma}{2}\cot\gamma + \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Доказательство. следует из (12), (13) и из факта, что для таких значений y имеем $\Phi(y) = \left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, \frac{\pi}{2}\right]$.

Лемма 2. *Для острого угла $\gamma \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ и для $a \sin\gamma < y \le a$, $(a = b)$ имеем*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin\gamma}\int_{\Phi(y)} \cos\varphi \cos(\varphi - \gamma)\, d\varphi = \\ &= \cot\gamma\left[-\frac{\pi + \gamma}{2} + 2\arcsin\frac{a\sin\gamma}{y} - \frac{a\sin\gamma}{y}\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\gamma}{y^2}} + \right.\\ &\left. + \frac{1}{4}\sin 2\gamma - \cos 2\gamma\frac{a\sin\gamma}{y}\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\gamma}{y^2}}\right] + \\ &+ \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2\gamma - \frac{a\sin\gamma\sin 2\gamma}{y}\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\gamma}{y^2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sin\gamma}\int_{\Phi(y)} \sin\varphi \sin(\gamma - \varphi)\, d\varphi = \\ &= \cot\gamma\left[-2\arcsin\frac{a\sin\gamma}{y} + \frac{\pi + \gamma}{2} - \frac{a\sin\gamma}{y}\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\gamma}{y^2}} + \right.\\ &\left. + \frac{1}{4}\sin 2\gamma - \frac{a\sin\gamma}{y}\cos 2\gamma\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\gamma}{y^2}}\right] + \frac{1}{4}(1 - \cos 2\gamma) - \\ &- \frac{a\sin\gamma}{y}\sin 2\gamma\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2\gamma}{y^2}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Доказательство. Если $y \in (a\sin\gamma, a)$ в интервале $\left[-\frac{\pi}{2} + \gamma, \frac{\pi}{2}\right]$ существуют направления $\varphi \notin \Phi(y)$. $\Phi(y)$ является объединением следующих трех интервалов :

$$\Phi(y) = \left[-\frac{\pi}{2}+\gamma, -\arccos\frac{a\sin\gamma}{y}\right) \bigcup$$
$$\bigcup\left(\arccos\frac{a\sin\gamma}{y}, \gamma - \arccos\frac{a\sin\gamma}{y}\right) \bigcup$$
$$\bigcup\left(\gamma+\arccos\frac{a\sin\gamma}{y}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Используя (12) и (13) получим требуемый результат.

Теперь используя Леммы 1 и 2, можно получить результаты Зуланке (см. [4]) для правильного треугольника и Гилле (см. [3]) для прямоугольника.

§5. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

Так как в треугольнике нет параллельных сторон и $\gamma = \frac{\pi}{3}$, $\sin\gamma = \sqrt{3}/2$, то формулы (5) и (9) можно записать в виде

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{3}\,a}\int_{\Phi_{12}(y)} \cos\varphi\,\cos(\varphi-\pi/3)\,d\varphi. \tag{18}$$

и

$$F(y) = 1 - \frac{2y}{\sqrt{3}\,a}\int_{\Phi_{12}(y)} \sin\varphi\,\sin(\pi/3-\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{a}(a-y), \tag{19}$$

где a - длина стороны правильного треугольника.

Используя (14) — (17), из (18) и (19) получим вид плотности распределения

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \notin [0, a] \\ \dfrac{1}{2a} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}a}, & \text{если} \quad 0 < y \le \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{4y^2-3a^2}}{2\,y^2} + \dfrac{1}{2a} + \dfrac{2}{\sqrt{3}a}\arcsin\dfrac{a\sqrt{3}}{2y} - \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}a}, & \text{если} \quad \dfrac{\sqrt{3}a}{2} < y \le a \end{cases} \tag{20}$$

и функции распределения

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0 \\ \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\dfrac{y}{a}, & \text{если} \quad 0 \le y \le \dfrac{\sqrt{3}a}{2} \\ \dfrac{y}{2a} - \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\dfrac{y}{a} + \dfrac{2y}{\sqrt{3}a}\arcsin\dfrac{a\sqrt{3}}{2y} + \dfrac{\sqrt{4y^2-3a^2}}{2y}, & \text{если} \quad \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \le y \le a \\ 1, & \text{если} \quad y \ge a. \end{cases} \tag{21}$$

Очевидно, что $f(y) = \dfrac{dF(y)}{dy}$.

Проверим теперь, что
$$\int_0^a f(y)\,dy = 1. \tag{22}$$

Имеем
$$\int_0^a f(y)\,dy = \int_0^{\sqrt{3}a/2} f(y)\,dy + \int_{\sqrt{3}a/2}^a f(y)\,dy =$$
$$= \left(\frac{1}{2a} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}a}\right)\frac{\sqrt{3}a}{2} + \left(\frac{1}{2a} - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a}\right)\left(a - \frac{\sqrt{3}a}{2}\right) +$$
$$+ \frac{2}{\sqrt{3}a}\int_{\sqrt{3}a/2}^a \arcsin\frac{a\sqrt{3}}{2y}\,dy - \frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}a/2}^a \frac{\sqrt{4y^2 - 3a^2}}{y^2}\,dy.$$

Используя значения следующих интегралов
$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\arcsin x - \ln\left|\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right|, \tag{23}$$
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} + \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|,$$
получим
$$\int_0^a f(y)\,dy == \frac{1}{2} + \ln\sqrt{3} + \frac{1}{2} - \ln(3a) + \ln(a\sqrt{3}) = 1,$$
т.е. (22).

§6. СЛУЧАЙ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Так как имеются две пары параллельных сторон ($a \le b$) и $\gamma = \frac{\pi}{2}$, $\sin\gamma = 1$, формулы (5) и (9) можно записать в виде

$$f(y) = \frac{1}{2(a+b)}\left[4\int_{\Phi_{12}(y)} \cos\varphi\,\cos(\varphi - \pi/2)\,d\varphi + I(a<y)\,h(\varphi_y, a)\,\frac{a}{y\sqrt{y^2 - a^2}} + \right.$$
$$\left. + I(b<y)\,h(\varphi_y, b)\,\frac{b}{y\sqrt{y^2 - b^2}}\right] \tag{24}$$

и

$$F(y) = 1 - \frac{1}{a+b}\left[2y\int_{\Phi_{12}(y)} \sin\varphi\,\sin(\pi/2 - \varphi)\,d\varphi + I(a<y)\,h(\varphi_y, a)\,\frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a} + \right.$$
$$\left. + I(b<y)\,h(\varphi_y, b)\,\frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{b} + (a-y)^+ + (b-y)^+\right], \tag{25}$$

где $h(\varphi_y, a)$ ($h(\varphi_y, b)$) - высота параллелограмма, параллельные стороны которого равны y а другие две стороны лежат на параллельных сторонах длины b (a). Нетрудно убедиться, что

$$h(\varphi_y, a) = \frac{a\cdot(b-\sqrt{y^2-a^2})}{y} \quad \text{и} \quad h(\varphi_y, b) = \frac{b\cdot(a-\sqrt{y^2-b^2})}{y}.$$

Используя (14) — (17), из (24) и (25) получим результат Гилле для прямоугольника (см. [3]). Плотность распределения длины случайной хорды для прямоугольника имеет вид :

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \notin [0, \sqrt{a^2+b^2}) \\ \dfrac{1}{a+b}, & \text{если} \quad 0 < y \le a \\ \dfrac{a^2 b}{(a+b)y^2\sqrt{y^2-a^2}}, & \text{если} \quad a < y \le b \\ \dfrac{ab}{(a+b)y^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{y^2-b^2}}\right)-\dfrac{1}{a+b}, & \text{если} \quad b < y \le \sqrt{a^2+b^2}, \end{cases} \tag{26}$$

а функция распределения $F(y)$ для прямоугольника $a \le b$ имеет вид

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0 \\ \dfrac{y}{a+b}, & \text{если} \quad 0 \le y \le a \\ \dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a+b}\dfrac{\sqrt{y^2-a^2}}{y}, & \text{если} \quad a \le y \le b \\ 1-\dfrac{y}{a+b}+\dfrac{1}{(a+b)y}(a\sqrt{y^2-b^2}+b\sqrt{y^2-a^2}), & \text{если} \quad b \le y \le \sqrt{a^2+b^2} \\ 1, & \text{если} \quad y \ge \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases} \tag{27}$$

Очевидно, что $f(y) = \dfrac{dF(y)}{dy}$.

Теперь проверим, что

$$\int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} f(y)\,dy = 1. \tag{28}$$

Имеем

$$\int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} f(y)\,dy = \frac{a}{a+b} + \frac{a^2 b}{(a+b)}\int_a^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-a^2}} +$$

$$+\frac{a\,b^2}{(a+b)}\int_b^{\sqrt{a^2+b^2}} \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2-b^2}} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a+b}.$$

Поскольку

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-c^2}} = \frac{\sqrt{x^2-c^2}}{c^2 x}$$

получим

$$\int_0^{\sqrt{a^2+b^2}} f(y)\,dy = \frac{a}{a+b} + \frac{b^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}-b}{a+b} = 1,$$

т.е. (28).

§7. СЛУЧАЙ ПРАВИЛЬНОГО ПЯТИУГОЛЬНИКА

Поскольку в правильном пятиугольнике нет параллельных сторон и

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{5} & \text{если} \quad j = i+1 \\ \dfrac{\pi}{5} & \text{если} \quad j \neq i+1 \end{cases}$$

($\gamma_{i,i+1}$ – угол между соседними сторонами правильного пятиугольника, а $\gamma_{i,j}$, $j \neq i+1$ – угол между продолжениями двух несоседних сторон), формулы (5) и (9) можно переписать в виде

$$5a[1-F(y)] = \frac{5y}{\sin\dfrac{3\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \sin\varphi \sin(3\pi/5-\varphi)\,d\varphi +$$
$$+ \frac{5y}{\sin\dfrac{\pi}{5}} \int_{\Phi_{13}(y)} \sin\varphi \sin(\pi/5-\varphi)\,d\varphi + 5\,(a-y)^+$$

и

$$f(y) = \frac{1}{5\,a}\left[\frac{5}{\sin\dfrac{3\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \cos\varphi \cos(\varphi-3\pi/5)\,d\varphi + \right.$$
$$\left. + \frac{5}{\sin\dfrac{\pi}{5}} \int_{\Phi_{13}(y)} \cos\varphi \cos(\varphi-\pi/5)\,d\varphi \right],$$

где a – длина стороны правильного пятиугольника.

Используя формулы

$$\sin\frac{3\pi}{5} = \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{и}$$

$$\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}\cdot(\sqrt{5}-1)}{8}$$

предыдущие выражения можно переписать в виде :

$$F(y) = 1 - \frac{4y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \int_{\Phi_{12}(y)} \sin\varphi \sin(3\pi/5 - \varphi)\, d\varphi -$$

$$- \frac{2(\sqrt{5}+1)\,y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \int_{\Phi_{13}(y)} \sin\varphi \sin(\pi/5 - \varphi)\, d\varphi - \frac{1}{a}(a-y)^{+}.$$

и

$$f(y) = \frac{1}{a\sin\dfrac{3\pi}{5}} \int_{\Phi_{12}(y)} \cos\varphi \cos(\varphi - 3\pi/5)\, d\varphi + \frac{1}{a\sin\dfrac{\pi}{5}} \int_{\Phi_{13}(y)} \cos\varphi \cos(\varphi - \pi/5)\, d\varphi.$$

В случае правильного прямоугольника $\Phi_{12}(y)$ и $\Phi_{13}(y)$ суть подмножества $\left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right)$. Нетрудно проверить, что

1) при $0 < y \le a$,

$$\Phi_{12}(y) = \left(\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad \Phi_{13}(y) = \emptyset;$$

2) при $a < y \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$, $\Phi_{12}(y)$ есть интервал

$$\Phi_{12}(y) = \left(\arcsin\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cos\frac{\pi}{5}}{y}, \frac{\pi}{10} + \arcsin\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}\cos\frac{\pi}{5}}{y}\right);$$

3) при $y > \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ (длина диагонали пятиугольника),

$$\Phi_{12}(y) = \Phi_{13}(y) = \emptyset;$$

4) при $a < y < \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ (длина перпендикуляра, опущенного из вершины пятиугольника на сторону),

$$\Phi_{13}(y) = \left(-\frac{3\pi}{10} + \arcsin\frac{a\cos\frac{\pi}{10}}{y}, \arccos\frac{a\cos\frac{\pi}{10}}{y}\right);$$

5) при $\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} < y < \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$, $\Phi_{13}(y)$ – объединение следующих трех интервалов :

$$\Phi_{13}(y) = \left(-\frac{3\pi}{10} + \arcsin\frac{a\cos\frac{\pi}{10}}{y}, -\arccos\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y}\right) \bigcup$$

$$\bigcup \left(-\arccos\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y}, \arcsin\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y} - \frac{3\pi}{10}\right) \bigcup$$

$$\bigcup \left(\frac{7\pi}{10} - \arccos\frac{a\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2y}, \arccos\frac{a\cos\frac{\pi}{10}}{y}\right)$$

Используя теперь (14) — (17), получим функцию распределения длины хорды для правильного пятиугольника :

$F(y) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если} \quad y \le 0 \\ \dfrac{y}{a}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right), & \text{если} \quad 0 \le y \le a \\ 1 + \dfrac{\pi(5+3\sqrt{5})\,y}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \dfrac{2(\sqrt{5}+1)\,y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin\dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} - & \\ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\left(\arcsin\dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y}\right), & \text{если} \quad a \le y \le \dfrac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ 1 + \dfrac{\pi(5+3\sqrt{5})\,y}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \dfrac{2(\sqrt{5}+1)\,y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin\dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} - & \\ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\left(\arcsin\dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y}\right) - & \\ -\dfrac{(\sqrt{5}+1)^2 y}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arccos\dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} + & \\ +\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^2}\sin\left(\arccos\dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)}\right), & \text{если} \quad \dfrac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \le y \le \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a \\ 1, & \text{если} \quad y \ge \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что эта функция является непрерывной. Для значения $y = a$, общее значение второго и третьего случаев совпадают и равно

$$\frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Действительно, так как

$$\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{2\pi}{5}$$

и

$$\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} = 1 - 2\sin^2\pi/5 =$$

$$= 1 - 2\frac{(10+2\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^2}{64} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

получим результат :

$$1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\,\frac{2\pi}{5} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\,\frac{\sqrt{5}-1}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$$

Случай $y = \frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ очевиден.

Рассмотрим случай $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$. Из последнего случая имеем $F\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}a\right) = 1$. Нетрудно проверить, что получаем тоже самое значение из предыдущего выражения. Действительно, поскольку

$$\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{\pi}{5} \quad \text{и}$$

$$\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)}\right) = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

и

$$\arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{10} \quad \text{и} \quad \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

получаем

$$1 + \frac{\pi(5+3\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{10\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)} -$$
$$- \frac{\sqrt{5}+1}{2}\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2(\sqrt{5}+1)}\right) - \frac{(\sqrt{5}+1)^3}{2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} +$$
$$+ \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)^2}\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) =$$
$$= 1 + \frac{\pi(10+4\sqrt{5})}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{\pi(6+2\sqrt{5})}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{8} -$$
$$- \frac{\pi(\sqrt{5}+1)^3}{20\sqrt{10+2\sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{5}+1}{2(\sqrt{5}-1)} = 1.$$

Плотность распределения имеет вид :

$f(y) =$

$$
= \begin{cases}
0, & \text{если} \quad y \notin \left[0, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\, a\right] \\[2mm]
\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\pi(\sqrt{5}-1)}{5\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right), & \text{если} \quad 0 < y \le a \\[2mm]
\dfrac{\pi(5+3\sqrt{5})}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} + \\
+ \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} - \\
- \dfrac{a^2(5+3\sqrt{5})}{2y^2\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}, & \text{если} \quad a < y \le \dfrac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} \\[2mm]
\dfrac{\pi(5+3\sqrt{5})}{5a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} - \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arcsin \dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4y} + \\
+ \dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} - \dfrac{a^2(5+3\sqrt{5})}{2y^2\sqrt{16y^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} - \\
- \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \arccos \dfrac{a\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2y(\sqrt{5}-1)} - \\
- \dfrac{(\sqrt{5}+1)^2}{\sqrt{4y^2(\sqrt{5}-1)^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}} + \\
+ \dfrac{4y^{-2}a^2(5+3\sqrt{5})(\sqrt{5}-1)^{-3}}{\sqrt{4y^2(\sqrt{5}-1)^2 - a^2(10+2\sqrt{5})}}, & \text{если} \quad \dfrac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}} < y \le \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\, a
\end{cases}
$$

Очевидно, что $f(y) = \dfrac{dF(y)}{dy}$.

Равенство

$$\int_0^{(\sqrt{5}+1)a/2} f(y)\, dy = 1$$

следует из

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}|,$$

$$\int \frac{\arccos x}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} \arccos x + \ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|,$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x\, a^2}$$

и (23)

Abstract. In the paper elementary expressions for the chord length distribution function of a regular triangle, pentagon and general rectangle are obtained. The formulae are derived by two different methods : a) by a direct calculation of the corresponding density function and b) using δ-formalism in Pleijel identity. In the cases of the triangle and rectangle the results are shown to coincide with those of Sulanke (1961) and Gille (1988).

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
2. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
3. W. Gille, "The chord length distribution of parallelepipeds with their limiting cases", Exp. Techn. Phys., vol. 36, pp. 197 – 208, 1988.
4. R. Sulanke, "Die Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren", Math. Nachr., vol. 23, pp. 51 – 74, 1961.
5. W. Nagel, "Orientation-dependent chord length distributions characterize convex polygons", J. Appl. Prob., vol. 30, pp. 730 – 736, 1993.
6. J. Gates, "Recognition of triangles and quadrilaterals by chord length distribution", J. Appl. Prob., vol. 19, pp. 873 – 879, 1982.
7. J. Gates, "Some properties of chord length distributions", J. Appl. Prob., vol. 24, pp. 863 – 874, 1987.
8. D. Stoyan and H. Stoyan, Fractals, Random Shapes and Point Fields,John Wiley& Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1994.
9. Г. Е. Шилов, Математический Анализ, (второй спец. курс), 2-ое издание, Москва, МГУ, 1984.

Поступила 3 апреля 2005