Известия НАН Армении. Математика, 40, № 4, 2005, 23-41

ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ В ТРЕХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Р. В. Амбарцумян

Институт математики НАН Армении
E-mail : rhambart@aua.am

Резюме. В настоящей статье рассматриваются семейства $\mathbb{F}$ of *прегеодезических* содержащихся в гладком трехмерном многообразии $\mathbf{D}_3$. Прегеодезические кривые в двух измерениях расматривались автором в [1] (Изв. НАН. Математика, том 39, no. 4, 2004). Прегеодезические $\gamma \in \mathbb{F}$ соответствуют прямым в Гильбертовой аксиоматике для трех измерений. В $\mathbf{D}_3$ имеется также семейство $\mathbb{E}$ *дискоидов*, являющихся аналогами плоскостей. Каждый дискоид $e \in \mathbb{E}$ представляет собой реализацию двумерного многообразия $\mathbf{D}$, рассмотренного в [1], в частности, предполагается, что каждый дискоид содержит семейство гладких прегеодезических в смысле [1]. В случае *классической среды* на $\mathbf{D}_3$ (аналогичное понятие рассматривалось в [1]) базовая мера длины dl порождает меры de в $\mathbb{E}$ и $d\gamma$ в $\mathbb{F}$, и приводит, через элегантное тождество, к определению кольца подмножеств в пространстве $\mathbb{F}$, где возможны комбинаторные разложения в смысле книги автора 1982 года. Эти разложения можно применить к изучению поверхностей на $\mathbf{D}_3$, скажем, для вычисления вероятностей чисел пересечений случайной $\gamma \in \mathbb{F}$. В работе получено геометрическое неравенство для площади минимальной поверхности, натянутой на *петлю* в $\mathbf{D}_3$ (*изопериметрическое неравенсво* для петель, новое неравенство даже в случае евклидова пространства). В частности, настоящий подход устанавливает в один прием справедливость этого неравенства для евклидова, гиперболического и Риманова пространства. Ради полноты изложения, в §1 приведены некоторые выдержки из работы [1].

§1. ВВЕДЕНИЕ : ПРЕГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В ДВУХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В данном параграфе приводятся некоторые сведения о прегеодезических кривых в двух измерениях из работы [1], которые необходимы для работы в трех измерениях.

Пусть $\mathbf{D}$ – гладкое двумерное многообразие с границей $\partial\mathbf{D}$, топологически эквивалентное замкнутому плоскому диску, и пусть $\mathbf{G}$ – семейство кривых на $\mathbf{D}$, удовлетворяющих следующим аксиомам A1 – A4 :

A1. Каждая кривая $g \in \mathbf{G}$ есть гладкая кривая без самопересечений, топологически эквивалентная замкнутому прямолинейному отрезку. Относительная внутренность g принадлежит внутренности $\mathbf{D}$, и оба конца g лежат на $\partial\mathbf{D}$.

A2. Для двух различных точек в $\mathbf{D}$ существует *единственная* кривая $g \in \mathbf{G}$, содержащая эти две точки ; это свойство остается в силе, если одна или обе точки взяты на $\partial\mathbf{D}$.

A3. Топология на $\mathbf{G}$, индуцированная из пространства замкнутых множеств в $\mathbf{D}$ совпадает с концевой топологией на $\mathbf{G}$.

A4. Для данного направления, касательного к $\mathbf{D}$ в точке $P \in int\mathbf{D}$, существует только одна кривая $g \in \mathbf{G}$, содержащая P и имеющая в P данное направление касательной.

Если условия A1 – A4 удовлетворяются, то $\mathbf{G}$ называется [1] семейством *прегеодезических* кривых, а каждая $g \in \mathbf{G}$ – прегеодезической.

Примеры. В следующих трех случаях свойства A1 – A4 удовлетворяются :

1. $\mathbf{D}$ = ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{R}^3$.

   прегеодезические кривые = евклидовы хорды области $\mathbf{D}$;

2. $\mathbf{D}$ = ограниченная гиперболически выпуклая область (скажем, евлидов диск) в модели Пуанкаре полуплоскости гиперболической плоскости.

   Здесь прегеодезические кривые суть гиперболические прямые (вертикальные евклидовы прямые и некоторые евклидовы дуги окружностей) ;

3. $\mathbf{D}$ = выпуклая область в открытой полусфере,

   прегеодезические кривые = дуги больших окружностей.

Базовая мера длины. В работе [1] многие факты зависят от существования меры длины dl на каждой прегеодезической $g \in \mathbf{G}$, означающее, в частности, что длину $|s|$ каждого прегеодезического отрезка s можно вычислить как интеграл вдоль s :

$$|s| = \int_s dl . \tag{1.1}$$

В работе [1] был предложен конкретный алгоритм определения длины достаточно гладких кривых.

Классическая двумерная среда. В [1] тройка $\mathbf{D}, \mathbf{G}, dl$ называлась *средой*. Теперь будем называть ее *2-средой*.

Обозначим через $T(P)$ окружность направлений на плоскости, касательной к $\mathbf{D}$ в точке $P \in \mathbf{D}$. Направление ϕ в точке $P \in \mathbf{D}$ есть элемент $\phi \in T(P)$.

Точка $Q \in \mathbf{D}$ принадлежит *прегеодезической окружности* $c(P, r)$ с центром в точке $P \in \mathbf{D}$ и радиуса r, коль скоро $|P, Q| = r$. Предполагаем, что прегеодезические окружности на $\mathbf{D}$ достаточно гладкие. Скажем, что 2-среда удовлетворяет РОО (= Радиус Ортогонален Окружности) если угол между направлениями $t \in T(Q)$ и $\rho \in T(Q)$, где

t = направление, касательное к $c(P, r)$ в некоторой точке $Q \in c(P, r)$,

ρ = направление прегеодезической, содежащей P и Q,

всегда равен $\frac{\pi}{2}$. При выполнении РОО, важная функция $h_P(Q)$, $P, Q \in \mathbf{D}$ определяется [1] как Якобиан

$$dl = h_P(l)\,d\alpha, \quad l \in c(P, r) \tag{1.2}$$

в соотношении между мерой длины dl на $c(P, r)$ и обычной угловой мерой $d\alpha$ на $T(P)$.

2-среда $\mathbf{D}, \mathbf{G}, dl$ называется *классической* если

C1. имеет место РОО,

C2. $h_{P_1}(P_2)$ симметрична, т.е. $h_{P_1}(P_2) = h_{P_2}(P_1) = h(P_1, P_2) = h(P_2, P_1)$, и

C3. *внутри малых окружностей* $c(P, r)$ (т.е. при $r \to 0$) геометрия, определенная мерой dl – асимптотически евклидова, в частности, для бесконечно малых треугольников применимы формулы евклидовой тригонометрии.

В предыдущих примерах, выбор *стандартной* меры dl (т.е. евклидовой длины для 1., гиперболической для 2. и меры инвариантной относительно вращения для 3.) обращает соответствующие 2-среды в классические.

Для данной прегеодезической $g_0 \in \mathbf{G}$, пусть $[g_0]$ обозначает множество прегеодезических, пересекающих g_0.

Параметризация по l, ψ. Прегеодезические g из $[g_0]$ можно описать параметрами l, ψ, где

l = одномерная координата длины на g_0 точки $g \cap g_0$,

ψ = угол между g и g_0 в точке $g \cap g_0$.

Параметризация l_1, l_2. Для заданных двух прегеодезических g_1, g_2, каждая прегеодезическая $g \in [g_1] \cap [g_2]$ может быть описана двумя параметрами l_1, l_2 :

l_i = одномерная координата длины на g_i точки $g \cap g_i$, $i = 1, 2$.

Теорема [1]. *В любой классической 2-среде* $\mathbf{D}, \mathbf{G}, dl$ *существует (единственная) мера* dg *на* $\mathbf{G}$, *представимая на каждом множестве* $[g_1] \cap [g_2]$ *в параметризации* l_1, l_2 *в виде*

$$dg = \frac{\sin\psi_1 \sin\psi_2}{h(l_1, l_2)}\, dl_1 dl_2, \tag{1.3}$$

где ψ_i = *угол между* g *и* g_i *в точке* $l_i \in g_i$, $i = 1, 2$. *На каждом множестве* $[g_0]$, *в* l, ψ *параметризация той же меры представляется в виде*

$$dg = \sin\psi\, dl\, d\psi.$$

Упомянем еще один результат из [1] : в классических 2-средах

$$|P_1, P_2| = \text{длина прегеодезического сегмента с концами } P_1,\ P_2$$

всегда является *Гильбертовой псевдометрикой*, т.е. мера длины dl превращает прегеодезические в геодезические (кратчайше). Эти результаты в [1] достигаются изучением *комбинаторных валюаций* Φ на так называемых *объединенных кольцах* подмножеств $\mathbf{G}$. (Для евклидовой плоскости соответствующая комбинаторика хорошо известна по книгам автора [2], [3].) Мы увидем далее, что комбинаторные валюации Φ существенны для построения комбинаторных разложений на объединенном кольце, определенном в $\mathbb{\Gamma}$ = пространстве прегеодезических в трех измеренениях. Ниже §6 содержит пример применения комбинаторных разложений в $\mathbb{\Gamma}$, т.н. *изопериметрическое неравенство для петель*, где используется формула площади $||D||$ области $D \in \mathbf{D}$, справедливая в классической 2-среде :

$$||D|| = \pi^{-1} \int |D \cap g|\, dg. \tag{1.4}$$

(1.4) легко следует из (1.3) и хорошо известна в интегральной геометрии конкретных пространств 1.,2., и 3., dl – стандартная, см. выше.

§2. ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{E}$ И $\mathbb{\Gamma}$

Сценой действия последующих параграфов является

$\mathbf{D}_3$ = дифференцируемое многообразие, топологически эквивалентное обычному замкнутому шару в $\mathbb{R}^3$.

Для данной точки $P \in \mathbf{D}_3$ обозначим через $T_2(P)$ пространство направлений касательных к $\mathbf{D}_3$ в точке P :

$T_2(P)$ = 2-сфера, точки в диаметрально-противоположных парах тождественны.

Обозначим через $\mathbb{E}$ семейство *дискоидов* $e \in \mathbb{E}$ и через $\mathbb{\Gamma}$ семейство *прегеодезических* $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$. Постулируем следующие свойства :

P1. Каждый дискоид e есть гладкое двумерное многообразие, топологички эквивалентное обычному замкнутому диску в $\mathbb{R}^2$. Относительная внутренность каждого e принадлежит внутренности $\mathbf{D}_3$, тогда как граница ∂e принадлежит $\partial \mathbf{D}_3$.

P2. Для любых трех различных точек в $\mathbf{D}_3$, не лежащих на прегеодезической, существует *единственный* дискоид $e \in \mathbb{E}$, содержащий все три точки.

P3. Каждый дискоид e содержит семейство $\mathbf{G}_e$ кривых γ, удовлетворяющих аксиомам A1–A4, §1. Те же самые кривые называются прегеоезическими в $\mathbf{D}_3$, т.е.

$$\mathbb{\Gamma} = \bigcup_{e \in \mathbb{E}} \mathbf{G}_e.$$

P4. Пересечение двух дискоидов $e_1 \in \mathbf{D}_3$ и $e_2 \in \mathbf{D}_3$ есть либо пустое множество, либо прегеодезическая кривая $\gamma = \mathbf{G}_{e_1} \cap \mathbf{G}_{e_2}$.

P5. Семейство $\mathbf{p}_\gamma$ дискоидов $e \in \mathbb{E}$, содержащее прегеодезическую $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ называется *δ-пучком*. Для заданной $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, точки $P \in \gamma$ и двух дискоидов $e_1, e_2 \in \mathbf{p}_\gamma$ рассмотрим угол

$\phi(P)$ = угол между направлениями ω_1 и ω_2, где

ω_i = направление, нормальное к e_i в точке P, $\omega_i \in T_2(P)$, $i = 1, 2$.

Принимаем как постулат, что *для каждого* $e_1, e_2 \in \mathbf{p}_\gamma$ *угол* ϕ_P *не зависит от* $P \in \gamma$. Величину $\phi = \phi_P$, на зависящую от $P \in g$, назовем *плоским углом* между дискоидами e_1, e_2. Если $e_1 \in \mathbf{p}_\gamma$ остается фиксированным, то каждому ϕ соответствует только один $e_2 \in \mathbf{p}_\gamma$, т.е. ϕ может служить для параметризации дискоидов из $\mathbf{p}_\gamma$. Топологически $\mathbf{p}_\gamma$ есть окружность, и часто пишется $\phi \in \mathbf{p}_\gamma$.

P6. Для заданного дискоида $e \in \mathbb{E}$ и прегеодезической $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, существуют только три возможности :

либо $\gamma \in \mathbf{G}_e$, либо $e \in [\gamma]$, либо $\gamma \cap e = \emptyset$, где

$[\gamma] = \{e \in \mathbb{E} :$ e и γ имеют только одну общую точку (коротко, e пересекает γ)$\}$.

Множества вида $[P]$ = дискоиды $e \in \mathbb{E}$, содержащие точку $P \in int\ e$ называются пучками.

P7. Каждому $\omega \in T_2(P)$ соответствует только один дискоид из $[P]$, имеющий в точке P направление нормали ω.

Примеры. В следующих примерах все свойства P1 – P7 удовлетворены :

1. $\mathbf{D}_3$ = ограниченное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$,

дискоиды = пересечения $\mathbf{D}_3$ евклидовыми плоскостями,

прегеодезические = евклидовы прямые ;

2. В модели Пуанкаре полупространства гиперболического пространства, возьмем

$\mathbf{D}_3$ = ограниченное гиперболически выпуклое тело (скажем, евклидовый шар),

дискоиды = пересечения $\mathbf{D}_3$ гиперболическими плоскостями (сферические диски),

прегеодезические = гиперболические линии (дуги окружности):

3. $\mathbf{D}_3$ = выпуклое тело в открытой 3-мерной полусфере,

дискоиды = пересечения $\mathbf{D}_3$ 2-мерными большими сферами,

прегеодезические = дуги больших окружностей.

Базовая мера длины. Предполагаем, что на каждой прегеодезической $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ определена мера длины dl. В частности, каждая *игла* (прегеодезический отрезок) ν получает длину

$$|\nu| = \int_\nu dl. \tag{2.1}$$

В случаях 1.,2. и 3. примерами dl являются евклидова длина, гиперболическая длина и длина, инвариантная относительно вращений.
Четверку $\mathbf{D}_3$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{\Gamma}$, dl назовем *3-средой*.

Классическая 3-среда. Точка $Q \in \mathbf{D}_3$ принадлежит $s(P,r)$ = прегеодезической сфере с центром в точке $P \in \mathbf{D}_3$ и прегеодезическим радиусом r тогда и только тогда, когда $|P,Q| = r$. Предполагаем, что сферы дифференцируемы. Назовем 3-среду $\mathbf{D}_3$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{\Gamma}$, dl *классической* если

Cl.1 Для каждого $e \in \mathbb{E}$ тройка $e, \mathbf{G}_e, dl$ есть классическая 2-среда в смысле §1. Заметим, что функция $h(P_1, P_2)$, см. С2., *a priori* может зависеть от $\phi \in \mathbf{p}_\gamma$, где γ = прегеодезическая, проходящая через точки P_1, P_2 и $\phi \in \mathbf{p}_\gamma$, так что, вообще говоря, функция $h(P_1, P_2)$ должна быть заменена функцией $h_\phi(P_1, P_2)$.

Cl.2 В *малых сферах* $s(P,r)$ (т.е. при $r \to 0$), dl асимптотически евклидова.

Cl.3 Дискоид, касательный к $s(P,r)$ в любой точке $Q \in s(P,r)$, ортогонален к прегеодезическому радиусу PQ в $Q \in \gamma$. Функция $h_\phi(P,Q)$ не зависит от ϕ и является симметричной, т.е.

$$h_\phi(P,Q) = h(P,Q) = h(Q,P). \tag{2.2}$$

§3. МЕРА В $\mathbb{\Gamma}$

Мера площади da. Чтобы подчеркнуть, что мы рассматриваем некоторый дискоид $e \in \mathbb{E}$ как отдельное пространство, точки в e обозначим через a.

Для каждой точки $a \in e$ полагаем

$$da = dl_1\, dl_2, \tag{3.1}$$

где dl_i – меры Лебега на двух взаимно-перпендикулярных прямых на касательной плоскости, исходящих из точки касания $a \in e$. Нормирующее условие : в точке a каждая dl_i эквивалентна dl.

Якобиан $J_P(a)$ в классической 3-среде. Пусть $P \in \mathbf{D}_3$ и $e \in \mathbb{E}$. Для точек $a \in e$ рассмотрим отображение

$a \longmapsto \Omega$, где $\Omega \in T_2(P)$ есть направление прегеодезической $P.a$.

Определим Якобиан $J_P(a)$ сотношением

$$\cos\psi\, da = J_P(a)\, d\Omega. \tag{3.2}$$

где

$d\Omega$ = телесная угловая мера, инвариантная относительно вращений на единичной сфере $T_2(P)$.

ψ = угол между γ и направлением, нормальным к e в точке a.

Согласно (3.1)

$$J_P(a) = h^2(P, a). \tag{3.3}$$

Замечание. В действительности, $a \in e$ – это некоторая точка $Q \in \mathbf{D}_3$. Как видно из соотношения (3.3) $J_P(a) = J_P(Q) = h^2(P,Q)$ не зависит от направления, нормального к e в точке Q. Это следствие наличия сомножителя $\cos\psi$ в (3.2) и утверждений Cl.2 и Cl.3.

Мера $d_{12}\gamma$. Для дискоида $e \in \mathbb{E}$ обозначим

$[e]$ = множество прегеодезических, пересекающих e только в одной точке.

Пусть e_1, e_2 – два дискоида из $\mathbb{E}$, $[e_1] \cap [e_2] \neq \emptyset$. Каждую прегеодезическую γ из этого множества можно описать с помощью двух параметров a_1, a_2 :

a_i = точка $\gamma \cap e_i$, $i = 1, 2$,

и использовать эту параметризацию для определения меры $d_{12}\gamma$ на $[e_1] \cap [e_2]$:

$$d_{12}\gamma = \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2}{h^2(a_1, a_2)}\, da_1 da_2, \text{ где}$$

ψ_i = угол между γ и направлением, нормальным к e_i в a_i, $i = 1, 2$.

da_i = мера площади на e_i, $i = 1, 2$.

В каждом из Примеров 1, 2, 3 предыдущего параграфа $d_{12}\gamma$ не зависит от выбора дискоидов e_1, e_2 и фактически определяет некоторую единственную меру $d\gamma$. Следующая теорема доказывает, что любая классическая 3-среда обладает этим свойством. При ее доказательстве мы используем обозначения, данные выше, для индексов 1, 2, 3, 4.

Теорема 1. *В любой классической $\mathcal{G}$-среде, существует единственная мера $d\gamma$ на $\mathbb{\Gamma}$ такая, что на каждом $[e_1] \cap [e_2]$*

$$d\gamma = \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2}{h^2(a_1, a_2)}\, da_1 da_2. \tag{3.4}$$

Доказательство : Рассмотрим две пары дискоидов : e_1, e_2 и e_3, e_4. Предположим, что внутренность $[e_1] \cap [e_2] \cap [e_3] \cap [e_4]$ не пуста. Прегеодезическая $\gamma \in [e_1] \cap [e_2] \cap [e_3] \cap [e_4]$ может быть представлена как a_1, a_2 или как a_3, a_4. Найдем Якобиан J в соотношении

$$da_1 da_2 = J\, da_3\, da_4.$$

Для $d\Omega_1 =$ меры на $T(P_1)$, из (3.2) имеем

$$d\Omega_1 = \frac{\cos\psi_2\, da_2}{J_{a_1}(a_2)}, \tag{3.5}$$

$$d\Omega_1 = \frac{\cos\psi_3\, da_3}{J_{a_1}(a_3)}. \tag{3.6}$$

Исключив $d\Omega_1$ и используя (3.3), получим

$$\frac{\cos\psi_2\, da_2}{h^2(a_1, a_2)} = \frac{\cos\psi_3\, da_3}{h^2(a_1, a_3)}. \tag{3.7}$$

Заменой индексов $1 \to 3$, $2 \to 1$ и $3 \to 4$, получаем

$$\frac{\cos\psi_1\, da_1}{h^2(a_3, a_1)} = \frac{\cos\psi_4\, da_4}{h^2(a_3, a_4)}. \tag{3.8}$$

Отсюда, умножая (3.7) на (3.8),

$$\frac{\cos\psi_1\ \cos\psi_2}{h^2(a_1, a_2)}\, da_1 da_2 = \frac{h^2(a_3, a_1)}{h^2(a_1, a_3)}\, \frac{\cos\psi_3\ \cos\psi_4}{h^2(a_3, a_4)}\, da_3\, da_4.$$

В силу свойства симметрии $h(P_1, P_2)$ это сводится к

$$\frac{\cos\psi_1\ \cos\psi_2}{h^2(a_1, a_2)}\, da_1\, da_2 = \frac{\cos\psi_3\ \cos\psi_4}{h^2(a_3, a_4)}\, da_3\, da_4. \tag{3.9}$$

Пусть имеем конечную последовательность дискоидов $e_1, e_2, ..., e_n$, каждый из которых содержит точку $P \in \mathbf{D}_3$. Каждому множеству индексов $S \subset \{1, ..., n\}$ соответствует

$b_S = [\cap_{s \in S}[e_s]] \bigcap [\cap_{s \in S^c}[e_s]^c]$, c обозначает дополнение.

Если $S_1 \neq S_2$, то b_{S_1} и b_{S_2} не пересекаются. Следовательно, для определения меры на

$$\mathbb{\Gamma}_n = \cup_{card\, S > 2}\, b_S$$

достаточно определить ее на *каждом* b_S. Для любого S, $card\ S > 1$ выберем 2-множество $\{i, j\} \subset S$ и определим меру на b_S как сужение $\frac{\cos\psi_i \cos\psi_j}{h^2(a_i, a_j)}\, da_i da_j$ на b_S. Согласно (3.9) результат не зависит от выбора $\{i, j\} \subset S$, так что повторяя эту процедуру, мы последовательно определим меру m_n на $\mathbb{\Gamma}_n$.
Устремим n к бесконечности, добавляя новые дискоиды. Потребуем, чтобы

$$\lim \mathbb{\Gamma}_n = \mathbb{\Gamma}, \tag{3.10}$$

где lim берется в смысле монотонной сходимости множеств. Условие (3.10) может быть удовлетворено, если, скажем, замыкание объединения множеств $\partial \mathbf{D}_3 \cap e_s$ есть $\partial \mathbf{D}_3$. Тогда (3.9) гарантирует, что сужение каждой меры m_{n+1} до $\mathbb{\Gamma}_n$ совпадает с m_n. Следовательно, m_n стремится к предельной мере m, определенной на всем $\mathbb{\Gamma}$.

Покажем, что m есть искомая мера $d\gamma$. По построению, m удовлетворяет (3.4) для счетного числа пар дискоидов. Для любой пары e_1, e_2, не принадлежащей этому классу, можно установить справедливость (3.4) для $[e_1] \cap [e_2]$, используя подобласти $\tau_1^{(n)} \subset e_1$ и $\tau_2^{(n)} \subset e_2$, последние зависят от n и стремятся, соответственно, к e_1 и e_2 при $n \to \infty$ в смысле монотонной сходимости. Предположим, что $[\tau_1^{(n)}] \cap [\tau_2^{(n)}] \subset \mathbb{\Gamma}_n$, где $[\tau] = \{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ пересекает $\tau\}$: откуда, используя (3.9), установим (3.4) на множестве $[\tau_1^{(n)}] \cap [\tau_2^{(n)}]$. В пределе при $n \to \infty$, множество $[\tau_1^{(n)}] \cap [\tau_2^{(n)}]$ заменяется на $[e_1] \cap [e_2]$. Доказательство завершено.

Следствие 1. Для любого дискоида e, каждая $\gamma \in [e]$ может быть представлена $\gamma = (a, \Omega)$, где $a = \gamma \cap e$ и $\Omega =$ направление γ в точке a. Тогда

$$d\gamma = \cos\psi\, da\, d\Omega \tag{3.11}$$

где ψ – угол между γ и направлением, нормальным к e в точке a.

§4. МЕРА В $\mathbb{E}$

Две важные функции в классической 3-среде $\mathbf{D}_3$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{\Gamma}$, dl. Пусть P – точка в $\mathbf{D}_3$. Дискоид e из пучка $[P]$ определяется параметром (см. P7)

$\omega =$ направление, нормальное к $e \in [P]$ в P, $\omega \in T_2(P)$.

При наличии двух преогедезических γ_1 и γ_2, $e \in [P]$ можно описать параметрами :,

$l_i = e \cap \gamma_i$, $i = 1, 2$.

Это определяет отображение $\omega \to (l_1, l_2)$ между $T_2(P)$ и парой γ_1, γ_2. Функцию $H_P(P_1, P_2)$, где $P, P_1, P_2 \in \mathbf{D}_3$, определим как Якобиан в соотношении

$$\cos\psi_1 \cos\psi_2\, dl_1 dl_2 = H_P(l_1, l_2)\, d\omega, \tag{4.1}$$

где

$d\omega$ = мера инвариантная относительно вращений на $T_2(P)$.

ψ_i = угол между γ_i и направлением, нормальным к e в точке l_i,

dl_i = базовая мера длины на γ_i.

Замечание. Функция $H_P(P_1, P_2)$ не зависит от направлений прегеодезических γ_1, γ_2 в точках P_1, P_2 в силу утверждения Cl.2 и наличия сомножителя $\cos\psi_1 \cos\psi_2$ в (4.1).

Пусть P_1, P_2 — две точки в $\mathbf{D}_3$. Любой дискоид e из δ пучка $\mathbf{p}_\gamma$, где γ проходит через точки P_1, P_2, может быть описан параметром по $\phi \in \mathbf{p}_\gamma$, см.P5. Для всякой прегеодезической γ_1 дискоид $e \in \mathbf{p}_\gamma$ может быть описан параметром $l_1 \in \gamma_1$ в силу отображения $\phi \to e$, где $e \in \mathbf{p}_\gamma$, $l_1 \in e$.

Функция $H_{P_1,P_2}(l_1)$ определяется как Якобиан в соотношении

$$\cos\psi_1 dl_1 = H_{P_1,P_2}(l_1) d\phi, \tag{4.2}$$

где $d\phi$ есть угловая мера, инвариантная относительно вращений на $\mathbf{p}_\gamma$. Из свойств

I. $H_P(P_1, P_2) = H_{P,P_1}(P_2)\, h(P, P_1)$ (см. Cl.3) и

II. $H_{P_1,P_2}(P_3) = H_\gamma(P_3)$ (зависимость от P_1, P_2 через γ, последняя содержит P_1, P_2)

вытекает следующее следствие :

В классической 3–среде из симметрии функции $h(P_1, P_2)$ следует симметрия функции $H_{P_1}(P_2, P_3) = H(P_1, P_2, P_3)$ по всем трем аргументам.

Параметризации дискоидов. Пусть γ_1, γ_2, γ_3 – три прегеодезические. На $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap [\gamma_3] \neq \emptyset$ рассмотрим параметризации.

Параметризация l_1, l_2, l_3 : соответствует отображению

$(l_1, l_2, l_3) \to e$ = дискоид, содержащий все l_i, $i = 1, 2, 3$.

Параметризация l_1, ω_1 : соответствует отображению

$(l_1, \omega_1) \to e$ = дискоид из $[l_1]$, направление нормали которого в точке l_1 есть ω_1.

Параметризация l_1, l_2, ϕ_{12} : соответствует отображению

$(l_1, l_2\, \phi_{12}) \to e$ = дискоид из $\mathbf{p}_\gamma$, где

γ = прегеодезическая, содержащая l_1, l_2 и

$\phi_{12} = \phi$, определяющее e в $\mathbf{p}_\gamma$.

Теорема 2. *В любой классической 3-среде существует мера de в $\mathbb{E}$, такая что на каждом (непустом) множестве $[\gamma_1] \cap [\gamma_2] \cap [\gamma_3]$, в параметризации l_1, l_2, l_3 записывается в виде*

$$de = \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3. \tag{4.3}$$

Доказательство : Рассмотрим две тройки прегеодезических : $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и $\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$. Пусть внутренность $\bigcap_{i=1,\dots,6}[\gamma_i]$ непуста. Пусть для любого $e \in \bigcap_{i=1,\dots,6}[\gamma_i]$

l_i = одномерная координата длины на γ_i точки $e \cap \gamma_i$,

ψ_i = угол между γ_i и направлением, нормальным к e в l_i, $i = 1,\dots,6$.

Дископд $e \in \bigcap_{i=1,\dots,6}[\gamma_i]$ можно представить как l_1, l_2, l_3, либо как l_4, l_5, l_6. Запишем варианты соотношения (4.1) :

$$H_{l_1}(l_2, l_3)\, d\omega_1 = \cos\psi_2 \cos\psi_3\, dl_2 dl_3$$

и

$$H_{l_1}(l_4, l_5)\, d\omega_1 = \cos\psi_4 \cos\psi_5\, dl_4 dl_5.$$

Используя симметрию, получаем

$$\frac{\cos\psi_2 \cos\psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_2 dl_3 = \frac{\cos\psi_4 \cos\psi_5}{H(l_1, l_4, l_5)} dl_4\, dl_5. \tag{4.4}$$

Варианты соотношения (4.2)

$$H_{l_4, l_5}(l_1) d\phi_{45} = \cos\psi_1 dl_1,$$

$$H_{l_4, l_5}(l_6) d\phi_{45} = \cos\psi_6 dl_6,$$

дают

$$\cos\psi_1\; dl_1 = \frac{H_{l_4, l_5}(l_1)}{H_{l_4, l_5}(l_6)} \cos\psi_6\; dl_6. \tag{4.5}$$

Из соотношений (4.4) и (4.5) получаем

$$\frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 = \frac{H_{l_4, l_5}(l_1)}{H_{l_4, l_5}(l_6)} \frac{\cos\psi_4 \cos\psi_5 \cos\psi_6}{H(l_1, l_4, l_5)} dl_4 dl_5 dl_6.$$

Умножая и деля последнее выражение на $H(l_4, l_5, l_6)$, найдем

$$\frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}{H(l_1, l_2, l_3)} dl_1 dl_2 dl_3 = J\, \frac{\cos\psi_4 \cos\psi_5 \cos\psi_6}{H(l_4, l_5, l_6)} dl_4 dl_5 dl_6. \tag{4.6}$$

Согласно свойству I. функции H находим

$$J = \frac{H_{l_4,l_5}(l_1)}{H_{l_4,l_5}(l_6)}\,\frac{H(l_4,l_5,l_6)}{H(l_1,l_4,l_5)} = \frac{h(l_4,l_5)}{h(l_4,l_5)} = 1$$

Пусть имеем конечную последовательность прегеодезических $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$ из пучка $[P]$, $P \in \mathbf{D}_3$. Каждому множеству индексов $S \subset \{1,\ldots,n\}$ соответствует множество $b_S = [\cap_{s\in S}[\gamma_s]]\bigcap[\cap_{s\in S^c}[\gamma_s]^c]$: если $S_1 \neq S_2$, то b_{S_1} и b_{S_2} не пересекаются. Следовательно, для определения меры на $\mathbb{E}_n = \cup_{card\, S>2} a_S$ достаточно определить ее на *каждом* b_S. Для любого S с $card\ S > 2$, выберем 3-множество $\{i,j,k\} \subset S$ и определим меру на b_S, которая есть сужение $\dfrac{\cos\psi_i\cos\psi_j\cos\psi_k}{H(l_i,l_j,l_k)}\,dl_i dl_j dl_k$ до b_S. Согласно (4.6) и $J = 1$ результат не зависит от выбора $\{i,j,k\} \subset S$, так что эта процедура последовательно определяет меры m_n на $\mathbb{E}_n$.

Устремим теперь n к бесконечности добавляя новые прегеодезические, но требуя, чтобы

$$\lim\ \mathbb{E}_n = \mathbb{E}, \tag{4.7}$$

где lim берется в смысле монотонной сходимости множеств. Условие (4.7) будет удовлетворено, если концы бесконечной последовательности $\{\gamma_s\}$ образуют всюду плотное подмножество на $\partial\mathbf{D}_3$. Очевидно (4.7) гарантирует, что сужение каждой меры m_{n+1} до $\mathbb{E}_n$ совпадает с m_n. Поэтому m_n стремится к предельной мере m, определенной на всем $\mathbb{E}$.

Для *произвольных* трех игл ν_1,ν_2,ν_3 из $int\mathbf{D}_3$, можем взять n достаточно большим и иметь $[\nu_1]\cap[\nu_2]\cap[\nu_3] \subset \mathbb{E}_n$. Соотношение (4.7) гарантирует, что сужение $m_n = m$ на любое множество $b_S\cap[\nu_1]\cap[\nu_2]\cap[\nu_3]$ в параметризации $l_i \in \nu_i$ представляется в виде

$$I_{a_S}(e)\frac{\cos\psi_1\ \cos\psi_2\ \cos\psi_3}{h(l_1,l_2,l_3)}\,dl_1dl_2dl_3, \tag{4.8}$$

где e есть дискоид, проходящий через l_1,l_2,l_3, а $I_{a_S}(e) = 1$, если $e \in a_S$, 0 в противном случае. Суммирование (4.8) по всем возможным $S \subset \{1,\ldots,n\}$ удаляет индикатор $I_{a_S}(e)$. Доказательство теоремы 2 завершено.

Следующие следствия легко следуют из (4.3).

Следствие 2. На каждом множестве $[\gamma]$ в параметризации l,ω

$$de = \cos\psi\, dl d\omega. \tag{4.9}$$

Следствие 3. На каждом множестве $[\gamma_1]\cap[\gamma_2]\cap[\gamma_3]$ в параметризации l_1,l_2,ϕ

$$de = \frac{\cos\psi_1\cos\psi_2}{H(l_1,l_2,l_3)}H_{l_1,l_2}(l_3)\,dl_1dl_2d\phi = \frac{\cos\psi_1\cos\psi_2}{h(l_1,l_2)}\,dl_1dl_2d\phi. \tag{4.10}$$

Следствие 4. Для данного дискоида $e_0 \in \mathbb{E}$ любой дискоид e из множества

(e_0) = дискоиды, пересекающие e_0 можно представить в виде

$e = (g, \psi)$, где

g = прегеодезическая $e_0 \cap e$ и

ψ = плоский угол между e и e_0 (определяет e внутри $\mathbf{p}_g$, т.е. $\psi \in \mathbf{p}_\gamma$).

На всяком множестве (e_0), в параметризации g, ψ

$$de = \sin^2 \psi \, dg \, d\psi, \text{ где} \tag{4.11}$$

dg = мера на $[e_0]$

$d\psi$ = мера на $\mathbf{p}_\gamma$, инвариантная относительно вращений.

Доказательство следует из (4.10). Возьмем γ_1, γ_2 внутри e_0. Согласно (1.3)

$$dg = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{h(l_1, l_2)} dl_1 dl_2$$

где α_i есть угол между γ_i и g. В силу Cl.2 справедливы формулы сферической тригонометрии

$$\cos\psi_i = \sin\alpha_i \sin\psi, \quad i = 1, 2 \tag{4.12}$$

откуда следует (4.11).

§5. СОВПАДЕНИЕ ДВУХ МЕР

В классической 3-среде dl определяет меры $d\gamma$ в $\mathbb{\Gamma}$ и de в $\mathbb{E}$, см. теоремы 1.2. Также, согласно [1], на каждом $[e]$ существует мера dg, которую теперь обозначим через $d_e g$, а на каждом пучке $\mathbf{p}_\gamma$ в силу P5 существует мера $d_\gamma \phi$, инвариантная относительно вращений.

В пространстве пар (γ, ϕ), где $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ и $\phi \in \mathbf{p}_\gamma$ рассмотрим меру $d\gamma d_\gamma \phi$

Аналогично, в пространстве пар (e, g), где $e \in \mathbb{E}$ и $g \in [e]$ рассмотрим меру $de d_e g$. В силу "дуальности" $(\gamma, \phi) = (e, g)$, где

$e \in \mathbf{p}_\gamma$ – дискоид, который соответствует ϕ, а

$g \in [e]$ как множество совпадает с γ,

две меры, $d\gamma \, d_\gamma \phi$ и $de d_e g$, можно рассматривать как меры в том же пространстве.

Теорема 3. *В классической 3-среде всегда*

$$de \, d_e g = d\gamma \, d_\gamma \phi. \tag{5.1}$$

Доказательство : Пусть γ_1, γ_2 и γ_3 – три прегеодезические в $\mathbf{D}_3$. Выберем $l_i \in \gamma_i$, $i = 1, 2, 3$ и пусть

g_i = прегеодезическая, проходящая через l_i и l_3, $i = 1, 2$,

g_{12} = прегеодезическая, проходящая через l_1 и l_2,

e_i = дискоид, содержащий γ_i и g_i, $i = 1, 2$,

e = дискоид, проходящий через l_1, l_2, l_3,

ψ_i = угол в точках l_i, $i = 1, 2, 3$ между γ_i и направлением, нормальным к e,

τ_i = угол между γ_{12} и направлением, нормальным к e_i в l_i, $i = 1, 2$,

α_i = угол между γ_i и g_i в точках l_i, $i = 1, 2$,

β_i = угол в точках l_i, $i = 1, 2$ между прегеодезической, проходящей через l_1, l_2 и g_i,

da_i = мера площади на e_i (так, $a_i \in e_i$), $i = 1, 2$,

dl_i = базовая мера длины на γ_i,

du_i = базовая мера длины на g_i, $i = 1, 2$.

Имеем для $i = 1, 2$ в точке $a_i = l_i$

$$da_i = \sin\alpha_i \, dl_i \, du_i, \quad i = 1, 2. \tag{5.2}$$

Согласно (1.3)

$$\frac{\sin\beta_1 \sin\beta_2}{h(a_1, a_2)} du_1 du_2 = d_e g. \tag{5.3}$$

Используя параметризацию

$(\gamma, \phi) \to (a_1, a_2, l_3)$, где $a_1 = \gamma \cap e_1$, $a_2 = \gamma \cap e_2$, $l_3 = e \cap \gamma_3$,

в силу (3.4) и (4.2) получаем

$$d\gamma \, d\phi = \frac{\cos\tau_1 \cos\tau_2 \cos\psi_3}{h^2(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} da_1 \, da_2 \, dl_3. \tag{5.4}$$

Согласно (5.2) и (5.3) последнее выражение запишется в виде

$$\frac{\cos\tau_1 \cos\tau_2 \cos\psi_3}{h^2(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \, dl_1 \, dl_2 \, dl_3 \, du_1 \, du_2 =$$

$$= \frac{\cos\tau_1 \cos\tau_2 \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\psi_3}{\sin\beta_1 \sin\beta_2 \; h(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} dl_1 \, dl_2 \, dl_3 d_e g. \tag{5.5}$$

В *любом сферическом треугольнике* произведение $\sin a \sin h_a$, где a является стороной, h_a — перпендикуляр к a, опущенный из вершины, противоположной к a, не зависит от выбора a. Согласно свойству

$$\frac{\cos\tau_i \sin\alpha_i}{\sin\beta_i} = \cos\psi_i, \quad i = 1, 2 \tag{5.6}$$

получаем

$$d\gamma \, d\phi = \frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}{h(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)} dl_1 \, dl_2 \, dl_3 \, d_e g. \tag{5.7}$$

Доказательство (5.1) завершено, так как по теореме 2

$$\frac{\cos\psi_1 \cos\psi_2 \cos\psi_3}{h(a_1, a_2) H_{a_1, a_2}(l_3)}\, dl_1\, dl_2\, dl_3 = de.$$

§6. КОМБИНАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА КОЛЬЦЕ $\mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$

Приведем некоторые определения из теории прегеодезических в *двух измерениях*, (см. [1]).

Пусть $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$, dl - 2-среда, $\{s_i\}$ - конечное множество прегеодезических сегментов в $\mathbf{D}$. Кольцо $\mathbf{r}\{s_i\}$ определяется как минимальное кольцо, содержащее все открытые множества $[s_i] \subset \mathbf{G}$, где

$[s]$ = множество прегеодезических, разделяющих концы s.

Множество $A \subset \mathbf{G}$ принадлежит кольцу $\mathbf{U}_{\mathbf{G}}$ коль скоро существует конечное множество прегеодезических сегментов $\{s_i\}$, $s_i \subset \mathbf{D}$ таких, что $A^* \in \mathbf{r}\{s_i\}$. Здесь A^* есть открытое множество, *эквивалентное* A : это означает, что симметричная разность A и A^* может быть покрыта конечным числом пучков

$[P]$ = прегеодезические, содержащие точку $P \in \mathbf{D}$.

(Таком образом элементы $U_{\mathbf{G}}$ являются классами эквивалентности, а не отдельными множествами).

Пусть $\mathbf{D}_3$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{\Gamma}$, dl - 3-среда. Для любого $e \in \mathbb{E}$ обозначим

$\mathbf{U}_e$ = объединенное кольцо в $\mathbf{G}_e$, см. P3.

Для любого множества точек $\{a_i\} \subset e$, пусть

$\mathbf{r}_e\{a_i\} = \mathbf{r}\{s_k\}$, где $\{s_k\}$ множество всех прегеодезических отрезков с концами в $\{a_i\}$.

Для любого подмножества $A \subset \mathbb{\Gamma}$ запишем

$A_e = \{\gamma \in \mathbf{G}_e : \gamma$ принадлежит $A\}$

Определение $\mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$. *Множество $A \subset \mathbb{\Gamma}$ принадлежит $\mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$ тогда и только тогда, когда A_e принадлежит $\mathbf{U}_e$ для почти всех $e \in \mathbb{E}$.*

Два примера. *I. Множества, определенные пластинками.* Следующее построение дает нам представление, насколько богатым является класс $\mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$. Пусть

τ = пластинка, т.е. g -выпуклая часть некоторого дискоида

$[\tau] = \{\gamma \in \Gamma : \gamma$, пересекающие пластинку $\tau\}$,

$r\{\tau_i\}$ = минимальное кольцо подмножеств $\mathbb{\Gamma}$, содержащее все $[\tau_i]$ для некоторй конечной совокупности $\{\tau_i\}$.

Ясно, что *при любом выборе совокупности* $\{\tau_i\}$, *любое* $A \in r\{\tau_i\}$ *является членом* $\mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$.

II. Прегеодезические, проходящие через петлю. Любую кривую $L \subset \mathbf{D}_3$ без самопересечений назовем *петлей*, если она может быть преобразована в окружность гомеоморфизмом $\mathbf{D}_3$. Множество $\{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma$ содержит по крайней мере одну точку из $L\}$ отделяет только одну *неограниченую* компоненту в $\mathbb{\Gamma}$. Положим

$[L]$ = дополнение в $\mathbb{\Gamma}$ к этой неограниченной компоненте. Иначе говоря,

$[L]$ = множество $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$, которые проходят через петлю L.

Если мы дополнительно предположим, что L – ломаная линия, состоящая из конечного числа прегеодезиских сегментов, то для почти всех $e \in \mathbb{E}$ множество $e \cap L$ есть конечная совокупность точек $\{a_i\}$. Существует правило : индикаторная функция $I_{[L]}(\gamma)$ остается постоянной на любом непрерывном пути в $\mathbb{\Gamma}$, пока этот путь не выйдет на $\{\gamma \in \mathbb{\Gamma} : \gamma \cap L \neq \emptyset\}$. Этим свойством обладает

$I_{[L]}(g)$ = сужение $I_{[L]}(\gamma)$ до $\mathbf{G}_e$,

из которого следует, что $I_{[L]}(g)$ остается постоянным на любом атоме $r_e\{a_i\}$. Откуда необходимо следует $[L] \cap e \in \mathbf{r}_e\{a_i\}$ и $[L] \in \mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$. В общем случае $[L] \in \mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$, если дополнительно потребовать, чтобы *для почти всех $e \in \mathbb{E}$ множество $e \cap L$ являлось бы конечной совокупностью точек.*

Последнее условие будет удовлетворено, если кривая L достаточно гладкая.

Комбинаторные разложения.

В работа [1] описан функционал $\Phi(A)$, определенный для $A \in \mathbf{U}_{\mathbf{G}}$: если $A \in \mathbf{r}\{s_i\}$, то $\Phi(A)$ получается линейной комбинацией dl–длин прегеодезических сегментов, соединяющих все пары концов сегментов s_i, взятых с некоторыми целыми коэффициентами имеющими комбинаторное значение. В классических 2-средах всегда ([1])

$$\int_A d\gamma = \Phi(A).$$

Обозначим через Φ_e функционал Φ, построенный как в [1] посредством сужения меры dl на e. Для любого $B \in \mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$ определим

$$\Psi(B) = \frac{1}{\pi} \int \Phi_e(B_e)\, de.$$

В классической 3-среде (5.1) приводит, через теорему Фубини к тождеству, справедливому для каждого $B \in \mathbf{U}_{\mathbb{\Gamma}}$

$$\int_B d\gamma = \Psi(B).$$

Ниже применим это уравнение к множеству B из примера II. Предположим, что петля L состоит из конечного числа прегеодезических игл ν_j. Полагая

$a_j = e \cap \nu_j$ (возможность $e \cap \nu_j = \emptyset$ не исключается),

получим конечное точечное множество $\{a_j\} \subset e$. Для любого $A \in r\{\tau_i\}$ имеем $A_e \in r_e\{a_j\}$, так, согласно [1]

$$\Phi_e(B_e) = \sum_{k<s} c_{ks}(B_e)\,|a_k, a_s|.$$

Для вычисления интеграла $\int_{[ks]} c_{ks}(B_e)\,|a_k, a_s|\,de$ где

$[ks]$ = множество дискоидов, пересекающих ν_k, и ν_s,

используем параметризацию $e = (l_1, l_2, \phi)$ где

$l_1 = \nu_k \cap e$ и $l_2 = \nu_s \cap e$.

Комбинируя (4.10) с простой сферической тригонометрией в $T_2(l_1)$ и $T_2(l_2)$ находим

$$de = \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{h(l_1, l_2)} \sin\lambda_1 \sin\lambda_2\, d\phi\, dl_1\, dl_2,$$

где

α_i = угол между прегеодезической γ_{12} и ν_i, $i = 1, 2$,

γ_{12} = прегеодезическая, содержащая l_1 и l_2.

λ_i = плоский угол между дискоидом e и дискоидом, содержащим γ_{12} и точку l_i, $i = 1, 2$.

Коэффициенты $c_{kl}(B_e) = c_{kl}(l_1, l_2, \phi)$ как функции от ϕ суть *постоянные* величины на

Λ_+, Λ_- = взаимно-дополняющие дуги на которые p_γ разделяется дискоидами e_1 и e_2,

e_1 (или e_2) = дискоид, содержащий l_1, l_2 и ν_s (или ν_k).

Для простоты предположим, что *для почти каждого* $e \in \mathbb{E}$ *число точек из* $\{a_i\}$ *на* γ_{12} *равно двум*. Тогда две искомые постоянные – это 2 и -2. Условимся, что Λ_+ *соответствует постоянной* 2., а Λ_- соответствует постоянной -2. Таким образом,

$$c_{ks}(l_1, l_2, \phi) = 2\,I_{\Lambda_+}(\phi) - 2\,I_{\Lambda_-}(\phi)$$

где $I_{\Lambda_-}(\phi)$ – обычная индикаторная функция, откуда получаем

$$\int_{[ks]} c_{ks}(l_1, l_2, \phi)\,|a_k, a_s|\,de =$$

$$= 2\int_{a_k}\int_{a_s} |l_1, l_2| \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{h(l_1, l_2)}\, dl_1\, dl_2 \int [I_{\Lambda_+}(\phi) - I_{\Lambda_-}(\phi)] \sin\lambda_1 \sin\lambda_2\, d\phi.$$

Простым вычислением получаем

$$\int_\Lambda \sin\lambda_1 \sin\lambda_2\, d\phi = \int_0^\Lambda \sin\phi\, \sin(\Lambda - \phi)\, d\phi = \sin|\Lambda| - |\Lambda| \cos|\Lambda|.$$

где $|\Lambda|$ – обычная угловая мера дуги Λ. Следовательно,

$$\int [I_{\Lambda_+}(\phi) - I_{\Lambda_-}(\phi)] \sin\lambda_1 \sin\lambda_2 \, d\phi = \pi \cos\Lambda_- .$$

Итак, приходим к следующему представлению :

$$\Psi([L]) = 2\sum_{k<s} \int_{a_k} \int_{a_s} |l_1, l_2| \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{h(l_1,l_2)} \cos\Lambda_- \, dl_1 \, dl_2.$$

Теперь условие, что L состоит из конечного числа прегеодезических отрезков можно опустить, и для любой кусочно-гладкой петли L получим, что в любой классической 3–среде имеет место

$$\Psi([L]) = \int\int_{L\times L} |l_1, l_2| \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{h(l_1,l_2)} \cos\Lambda_- \, dl_1 \, dl_2. \tag{6.1}$$

Завершим несколькими замечаниями относительно формулы (6.1). Предположим, что в классической 3–среде имеем петлю L и поверхность $\mathbf{S}$, для которой L является границей. Пусть любая прегеодезическая γ, проходящая через L, т.е. $\gamma \in [L]$ по крайней мере один раз пересекает $\mathbf{S}$, иначе говоря, $\mathbf{S}$ *натянута* на петлю L. Следствием (3.11) является формула для площади $||\mathbf{S}||$ поверхности $\mathbf{S}$:

$$||\mathbf{S}|| = \frac{1}{2\pi}\int N(\gamma)\, d\gamma, \quad N(\gamma) = card(\mathbf{S}\cap\gamma).$$

Теперь легко находим

$$||\mathbf{S}|| \geq \frac{1}{2\pi}\int_{[L]} N(\gamma)\, d\gamma \geq \frac{1}{2\pi}\int_{[L]} d\gamma = \frac{1}{2\pi}\Psi([L]), \tag{6.2}$$

или, используя (6.1)

$$||\mathbf{S}|| \geq \frac{1}{2\pi}\int\int_{L\times L} |l_1, l_2| \frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}{h(l_1,l_2)} \cos\Lambda_- \, dl_1 \, dl_2. \tag{6.3}$$

Равенство в (6.3) имеет место, если L принадлежит некоторому дискоиду e и мы берем

$\mathbf{S}$ = часть e, ограниченная L.

Тогда $N(\gamma) = 1$, если $\gamma \in [L]$, $N(\gamma) = 0$ в противном случае, и (6.2) сводится к равенству. Проверка этого состоит в следующем :

из $L \subset e$ следует, что $\cos\Lambda_- = 1$,

согласно (1.3) интеграл в (6.3) сводится к $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\int_{L\times L} |l_1, l_2|\, dg$,

согласно (1.4) последний интеграл равен $2\pi\, ||\mathbf{S}||$, т.е. (6.3) сводится к $||\mathbf{S}|| = ||\mathbf{S}||$.

Заметим, что неравенство (6.3) имеет место также для *минимальных поверхностей*, натянутых на L. В частности, дискоид в случае $L \subset e$ есть минимальная поверхность. В евклидовом случае имеем $|l_1, l_2| = h(l_1, l_2)$, сводящем (6.3) к виду, который вероятно оправдывает название "изопериметрическое неравенство для петель" :

$$||\mathbf{S}|| \geq \frac{1}{2\pi} \int\int_{L \times L} \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos\Lambda_- \, dl_1 \, dl_2. \tag{6.4}$$

Abstract. The present paper extends the topic of author's recent paper [1] (Izv. AN Armenii.Matematika, vol. 39, no. 4, 2004) on pregeodesics in two dimensions, to families $\mathbb{\Gamma}$ of *pregeodesics* contained in a smooth three dimensional manifold $\mathbf{D}_3$. Pregeodesics $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$ correspond to lines in Hilbert axioms scheme for dimension 3, and so they exist in $\mathbf{D}_3$ along with a family $\mathbb{E}$ of *discoids* that are counterparts of planes. Each discoid $e \in \mathbb{E}$ is a replica of two-dimensional $\mathbf{D}$ considered in [1], in particular each discoid is assumed to contain a family of smooth pregeodesics in the sense of [1]. The relationships between the points in $\mathbf{D}_3$, pregeodesics and discoids are introduced axiomatically, following Hilbert's axioms scheme for dimension 3. Within a *classical environment* in $\mathbf{D}_3$ (a concept analogous to the classical environment of [1]) the basic length measure dl gives simultaneous birth to measures de in $\mathbb{E}$ and $d\gamma$ in $\mathbb{\Gamma}$, and leads via an elegant measure identity to the definition of a subset ring in the space $\mathbb{\Gamma}$, where combinatorial decompositions in the sense of the author's 1982 book are possible. That decompositions can be applied to the study of surfaces in $\mathbf{D}_3$ say, for calculation of probabilities of numbers of hits by random $\gamma \in \mathbb{\Gamma}$. In the paper a geometrical inequality is derived for the area of the minimal surface spanned over a *loop* in $\mathbf{D}_3$ that can be called an *isoperimetric inequality* for the loops (a loop is not necessarily restricted to a discoid). It seems that the corresponding inequality was unknown even in the Euclidean case. The present approach establishes that inequality in one stroke, as valid at least for Euclidean, hyperbolic and Riemann spaces. For the sake of completeness, §1 reproduces some passages from [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. В. Амбарцумян, "Комбинаторные валюации в пространстве прегеодезических", Изв. НАН Армении. Математика, том 39, no. 4, стр. 2 – 35, 2004.
2. R. V. Ambartzumian, Combinatorial Integral Geometry with Applications to Mathematical Stereology, John Wiley and Sons, Chichester, 1982.
3. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometric Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

Поступила 9 мая 2005