Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 35–45

КРИТЕРИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СЕЧЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МАТРИЦЫ

С. Г. Далалян

Ереванский государственный университет

Резюме. Вводится понятие лх-вырождаемости семейства матриц, которое используется в критерии линейной зависимости сечений трёхмерных матриц. Используя этот критерий, доказывается, что система линейных операторов линейно зависима тогда и только тогда, когда значения этих операторов в любой точке линейно зависимы.

Теория многомерных матриц является естественным продолжением теории обычных матриц, [1]–[7]. Например, сохранение свойства полилинейности для обобщённых детерминантов многомерных матриц приводит к детерминантам кубической матрицы размерности p и порядка n с различными сигнатурами ([6], стр. 13). Другое обобщение получается при использовании результанта системы полилинейных форм ([8, 9]).

В теории обычных матриц важную роль играет понятие ранга, основанное на том фундаментальном факте, что максимальное число линейно независимых строк и максимальное число линейно независимых столбцов одинаково. Этот факт не имеет многомерного аналога, как показывает пример кубической матрицы второго порядка, у которой горизонтальные грани линейно зависимы, если, например, $(a', b', c', d') = \gamma(a, b, c, d)$, а лицевые и вертикальные грани линейно независимы, если $ad - bc \neq 0$ (см. Рис. 1).

Для любой кубической трёхмерной матрицы, из линейной зависимости сечений этой матрицы какого-либо одного измерения следует, что произвольная линейная комбинация её сечений каждого из двух других измерений является вырожденной матрицей. Для матриц порядка $2 \times 2 \times 2$ легко проверяется, что обратное

утверждение в общем случае также верно : **если любая линейная комбинация сечений какого–либо измерения является вырожденной матрицей, а среди сечений другого измерения d есть невырожденное, то сечения измерения d линейно зависимы.** Действительно, детерминант

$$\begin{vmatrix} \alpha a + \beta b & \alpha c + \beta d \\ \alpha a' + \beta b' & \alpha c' + \beta d' \end{vmatrix} = (ac' - a'c)\alpha^2 + (ad' + bc' - a'd - b'c)\alpha\beta + (bd' - b'd)\beta^2$$

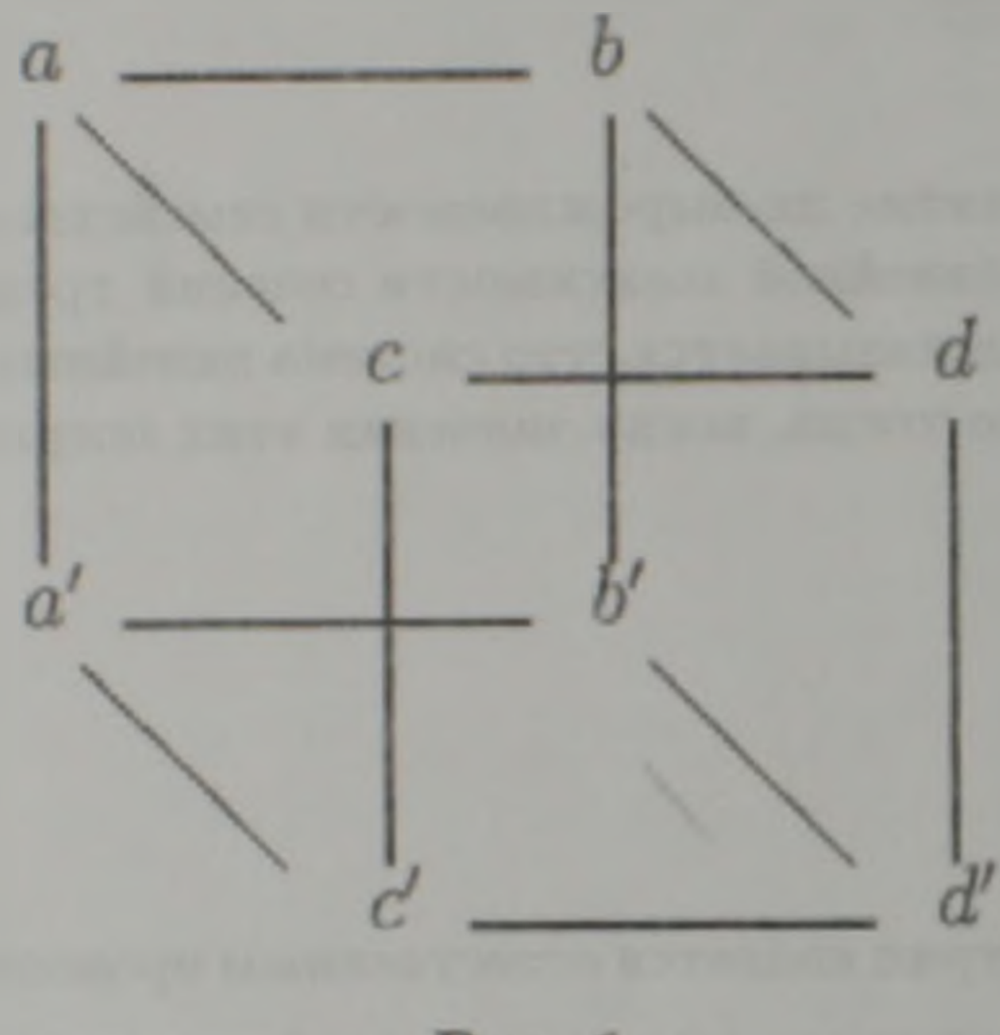

Рис. 1.

равен нулю при всех α и β тогда и только тогда, когда все коэффициенты мономов от α и β равны нулю. Для равенства нулю первого и третьего коэффициентов необходимо и достаточно, чтобы

$$(a', c') = \kappa(a, c) \quad \text{and} \quad (b', d') = \lambda(b, d).$$

Если $ad - bc \neq 0$, то из условия обнуления второго коэффициента

$$(\lambda - \kappa)(ad - bc) = 0,$$

следует, что $\kappa = \lambda$. Таким образом, горизонтальные сечения линейно зависимы. Заметим, что условие $ad - bc \neq 0$ является достаточным, но не необходимым условием справедливости вышеуказанного критерия линейной зависимости сечений одного измерения кубической трехмерной матрицы второго порядка. Например, если

$$(a', b') = \kappa(a, b), \quad (c, d) = \lambda(a, b) \quad \text{and} \quad (c', d') = \kappa\lambda(a, b),$$

то каждая из трех пар сечений одного измерения линейно зависима и любая линейная комбинация сечений одного измерения вырождена.
Главной целью настоящей статьи является обобщение этих фактов на трёхмерные матрицы произвольного порядка (Теорема 2 в §6). В качестве приложения доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $A_1, \ldots, A_m$ – линейные операторы в n-мерном линейном пространстве L и пусть $m \leq n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(a) *$A_1, \ldots, A_m$ линейно зависимы.*
(b) *$A_1(x), \ldots, A_m(x)$ линейно зависимы при любом $x \in L$,*
т.е. $A_1, \ldots, A_m$ (глобально) линейно зависимы тогда и только тогда, когда они поточечно (локально) линейно зависимы.

1. Пусть дана кубическая трехмерная матрица порядка n над полем k :

$$a = (a_{ijk}), \quad i, j, k \in \overline{1n} = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad a_{ijk} \in \mathrm{k}.$$

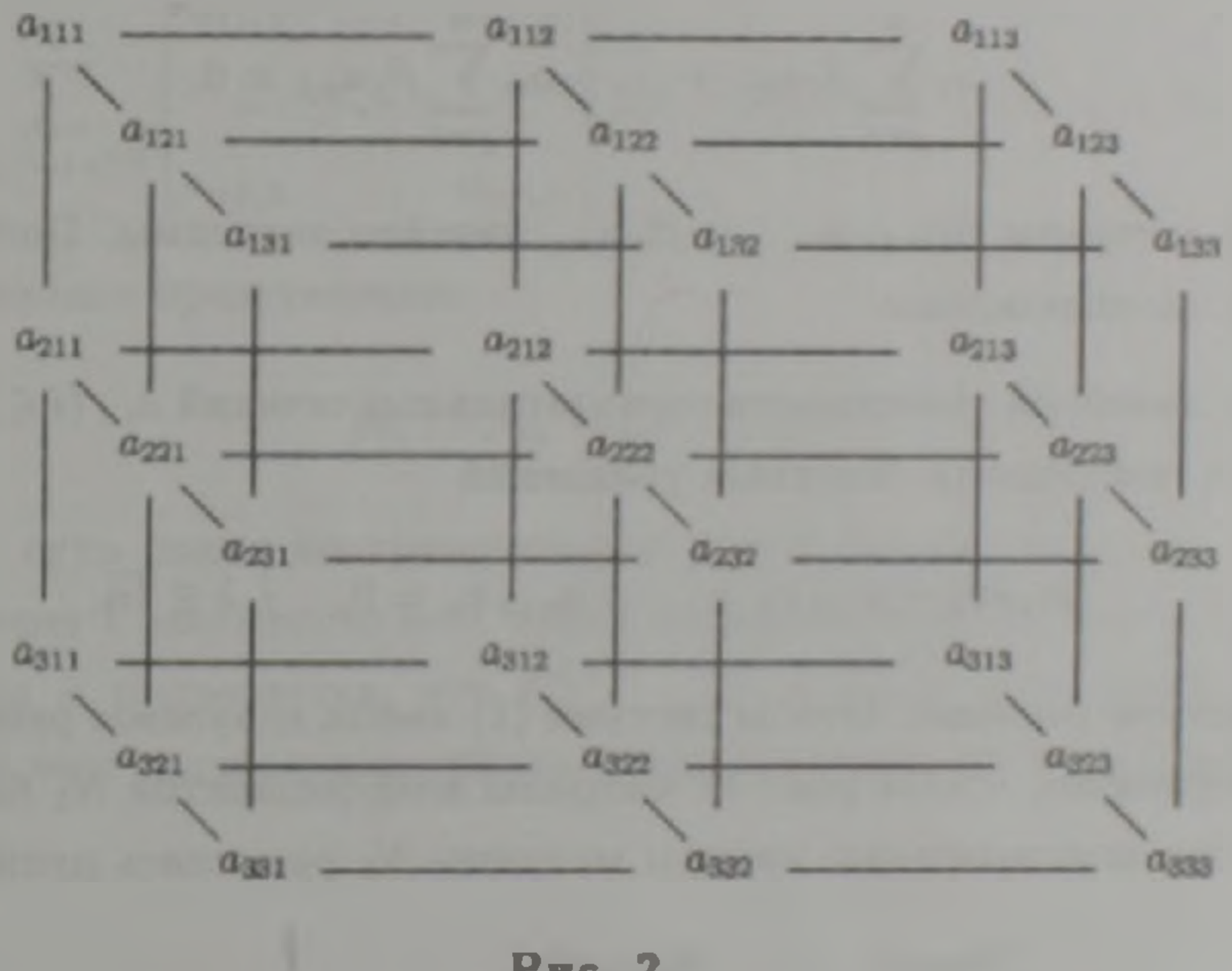

Рис. 2.

Пусть $M_{n^3}(\mathrm{k})$ – множество всех таких матриц. Обозначим через $a_{i__}$ матрицу, образованную элементами a_{ijk}, когда i фиксировано, а j и k изменяются от 1 до n. Будем называть $a_{i__}$ i-тым горизонтальным сечением матрицы a. Через $a_{ij_}$ и a_{i_k} будем обозначать j-тую строку и k-тый столбец матрицы $a_{i__}$. Аналогично определяются j-ое лицевое сечение $a_{_j_}$ и k-ое вертикальное сечение $a_{__k}$ и их соответствующие строки и столбцы.

Определение 1. Семейство квадратных матриц одинакового порядка назовём **лк-вырожденным**, если любая линейная комбинация этих матриц является вырожденной.

Предложение 1. *При линейной зависимости сечений некоторого измерения произвольной матрицы $a \in M_{n*}(\mathbf{k})$ сечения каждого из двух других измерений образуют лк-вырожденные семейства.*

Доказательство. Пусть, например, сечения $a_{i..}$, $i \in \overline{1n}$ линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 a_{1..} + \ldots + \alpha_n a_{n..} = 0, \quad \exists \quad \alpha_i \neq 0.$$

Тогда

$$\alpha_1 a_{1jk} + \ldots + \alpha_n a_{njk} = 0, \quad \forall j,k \in \overline{1n},$$

и, следовательно,

$$\alpha_1 a_{1j.} + \ldots + \alpha_n a_{nj.} = 0, \quad \forall j \in \overline{1n}.$$

Поэтому при любых $\beta_1, \ldots, \beta_n$

$$\alpha_1 \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1j.} + \ldots + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{nj.} = 0,$$

т.е. строки матрицы $\beta_1 a_{.1.} + \ldots + \beta_n a_{.n.}$ линейно зависимы. Поэтому сечения $a_{.1.}, \ldots, a_{.n.}$ лк-вырождены.

2. Условие линейной зависимости горизонтальных сечений $a_{i..}$ ($i \in \overline{1n}$) означает, что система однородных линейных уравнений

$$a_{1jk}x_1 + a_{2jk}x_2 + \ldots + a_{njk}x_n = 0, \quad j,k \in \overline{1n}, \tag{1}$$

имеет ненулевое решение. Чтобы система (1) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг её матрицы коэффициентов N_1 был меньше n, т.е. чтобы все максимальные миноры матрицы N_1 равнялись нулю :

$$\begin{vmatrix} a_{1j_1k_1} & \ldots & a_{nj_1k_1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1j_nk_n} & \ldots & a_{nj_nk_n} \end{vmatrix} = 0, \quad \forall j_r, k_r \in \overline{1n}. \tag{2}$$

Полученная система полиномиальных уравнений определяет детерминантное алгебраическое подмногообразие X_1 в $M_{n*}(\mathbf{k})$. Аналогично, множества всех матриц с линейно зависимыми лицевыми и/или вертикальными сечениями параметризуются точками детерминантных многообразий X_2 и X_3 соответственно.

Обозначим через Y_1, Y_2, Y_3 множества всех матриц $a \in M_{n^3}(\mathbf{k})$ у которых, соответственно, семейства всех горизонтальных, лицевых, вертикальных сечений лк-вырождены. Согласно Предложению 1

$$X_r \subset Y_s, \quad \forall r, s \in \{1,2,3\}, \quad r \neq s.$$

Мы докажем, что справедливы и обратные включения.

3. Лк-вырожденность лицевых сечений $a_{.1.}, \ldots, a_{.n.}$ означает, что

$$\begin{vmatrix} \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1j1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{1jn} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{nj1} & \ldots & \sum_{j=1}^{n} \beta_j a_{njn} \end{vmatrix} = 0, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n.$$

Применяя линейность детерминанта по столбцам, получаем

$$\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1j_1 1} & \ldots & a_{1j_n n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nj_1 1} & \ldots & a_{nj_n n} \end{vmatrix} \beta_{j_1} \ldots \beta_{j_n} = 0, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n. \tag{3}$$

Имеем однозначное представление

$$\beta_{j_1} \ldots \beta_{j_n} = \beta_1^{\gamma_1} \ldots \beta_n^{\gamma_n},$$

где $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ суть целые неотрицательные числа такие, что $\gamma_1 + \ldots + \gamma_n = n$. Обозначим через Γ множество всех таких последовательностей $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Индукцией по k проверяется, что $C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{(k-1)!n!}$ есть число последовательностей k неотрицательных чисел, сумма которых даёт n. Следовательно, $\# \Gamma = C_{2n-1}^{n}$.

Положим

$$j = (j_1, \ldots, j_n), \quad \nu_s(j) = \#\{r \mid j_r = s\}, \quad \nu(j) = (\nu_1(j), \ldots, \nu_n(j)).$$

После приведения подобных членов в (3) получим

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{\nu(j)=\gamma} \begin{vmatrix} a_{1j_1 1} & \ldots & a_{1j_n n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{nj_1 1} & \ldots & a_{nj_n n} \end{vmatrix} \beta_1^{\gamma_1} \ldots \beta_n^{\gamma_n} = 0, \quad \forall \beta_1, \ldots, \beta_n.$$

Следовательно, множество Y_2 является алгебраическим многообразием, задаваемым системой из $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!}$ уравнений (4), соответствующих всем $\gamma \in \Gamma$:

$$\sum_{\nu(j)=\gamma} \begin{vmatrix} a_{1j_1 1} & \dots & a_{1j_n n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{nj_1 1} & \dots & a_{nj_n n} \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

Заметим, что столбцы определителей из (4) получаются транспонированием строк $a_{\cdot jk}$. Это ещё раз доказывает, что $X_1 \subset Y_2$.

4. Для любого $a \in \bar{M}_{n*}(\mathbf{k})$, обозначим

$$a^{(n)\cdot\cdot} = (a_{ijk}) \mid \quad a_{njk} = 0 \quad (i,j,k \in \overline{1n}),$$

и рассмотрим проекцию

$$pr^{(n)\cdot\cdot} : M_{n*}(\mathbf{k}) \to M_{n*}(\mathbf{k}) \mid \; a \mapsto a^{(n)\cdot\cdot}.$$

Её ограничения на X_1 и Y_2 обозначим через p_1 и q_2 соответственно. Из определения детерминантных многообразий X_1 и Y_2 следует, что

$$p_1(X_1) = q_2(Y_2) = pr^{(n)\cdot\cdot}(M_{n*}(\mathbf{k})).$$

Эти образы можно отождествить с пространством $M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ трёхмерных матриц порядка $(n-1)\times n\times n$.

Пусть S_1 – подмножество $M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$, состоящее из матриц a с линейно зависимыми горизонтальными сечениями $a_{1\cdot\cdot}, \dots, a_{(n-1)\cdot\cdot}$. Можно показать, что S_1 также является детерминантным алгебраическим многообразием, потому что определяется условием существования ненулевого решения системы однородных линейных уравнений вида (1) с $n-1$ неизвестными, т.е. системой уравнений типа (2) из детерминантов порядка $n-1$. Обозначим через U_1 дополнительное к S_1 открытое множество.

Предложение 2. *Слои расслоения*

$$p_1 : X_1 \to M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$$

над точками открытого множества U_1 суть линейные пространства размерности $n-1$, а над точками замкнутого множества S_1 – линейные пространства размерности n^2.

Доказательство. Точки X_1 суть матрицы порядка $n \times n \times n$ с линейно зависимыми горизонтальными сечениями. Слой над точкой множества U_1 образован матрицами, получаемыми из базовой матрицы добавлением n-го горизонтального сечения, являющегося произвольной линейной комбинацией горизонтальных сечений базовой матрицы. Следовательно, любой слой над точкой из U_1 является линейным пространством размерности $n-1$. Слой же над точкой из S_1, есть множество матриц, получаемых из базовой матрицы добавлением произвольного n-го горизонтального сечения. Поэтому слой над точкой из S_1 является линейным пространством размерности n^2.

5. Аналогично опишем расслоение

$$q_2 : Y_2 \to M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k}).$$

Заметим, что слой этого расслоения над любой базовой точкой $a \in M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ является линейным пространством, потому что (4) при фиксированных a_{ijk}, $i,j,k \in \overline{1n}$, $i \neq n$, превращается в систему однородных линейных уравнений относительно a_{njk}, $j,k \in \overline{1n}$. Размерность пространства её решений равна $n^2 - \rho$, где ρ – ранг матрицы коэффициентов M_2 этой системы. В силу соотношения $X_1 \subset Y_2$, для любой базовой точки слой расслоения p_1 содержится в слое расслоения q_2. Согласно Предложению 2 размерность слоя расслоения p_1 не меньше $n-1$. Следовательно, $\rho \leq n^2 - n + 1$.

Лемма 1. *Существует базовая точка $a \in M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ такая, что слой расслоения q_2 над точкой a имеет размерность $n-1$.*

Доказательство. Рассмотрим слой над базовой точкой a с элементами $a_{ijk} = 1$ $(k = j+i-1)$, $a_{ijk} = 0$ $(k \neq j+i-1)$. Для того, чтобы получить любую точку $\hat{a}$ этого слоя надо к a добавить произвольное горизонтальное сечение $a_{n..} = (a_{njk})$. Линейная комбинация лицевых сечений кубической матрицы $\hat{a}$ с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ равна

$$\left\|\begin{array}{ccccccc}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\
0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \\
0 & 0 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 \\
\sum\limits_j \alpha_j a_{nj1} & \sum\limits_j \alpha_j a_{nj2} & \sum\limits_j \alpha_j a_{nj3} & \ldots & \sum\limits_j \alpha_j a_{nj(n-1)} & \sum\limits_j \alpha_j a_{njn}
\end{array}\right\|$$

Эта матрица должна быть вырожденной при любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Эквивалентно, линейная комбинация строк этой матрицы с некоторыми коэффициентами $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$ (не все из которых равны нулю) должна быть равна нулю. В частности, $\kappa_m \neq 0$ ибо в противном случае все $\kappa_i = 0$. Следовательно, можно считать, что $\kappa_m = -1$. Рассматривая произвольную s-тую координату вышеупомянутой линейной комбинации, получим соотношения

$$\kappa_1\alpha_s + \kappa_2\alpha_{s-1} + \ldots + \kappa_s\alpha_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{njs} \ (s \leq n-1), \tag{5}$$

$$\kappa_1\alpha_n + \kappa_2\alpha_{n-1} + \ldots + \kappa_{n-1}\alpha_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{njn}. \tag{6}$$

Взяв в (5)

$$\alpha_r = 1, \ \alpha_l = 0 \ (l \neq r), \quad r = s+1, \ldots, n,$$

получим

$$a_{nrs} = 0, \ r = s+1, \ldots, n.$$

Поэтому (5) сводится к виду

$$\kappa_1\alpha_s + \kappa_2\alpha_{s-1} + \ldots + \kappa_s\alpha_1 = \sum_{j=1}^{s} \alpha_j a_{njs} \ (s \leq n-1). \tag{7}$$

Подставляя $s = 1$, получаем $\kappa_1 = a_{n11}$, следовательно, κ_1 не зависит от $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Подставляя в (7) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$ для каждого $s = 2, \ldots, n-1$, а в (6) $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0$, получим

$$\kappa_1 = a_{n11} = \ldots = a_{nnn}.$$

Аналогично, используя уже полученные результаты, получаем, что все κ_s, $s \in \overline{1;(n-1)}$ не зависят от α и $\kappa_s = a_{n1s} = \ldots = a_{n(n-s+1)n}$. Наконец, подставляя $\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$ в (6), получаем $a_{n1n} = 0$. Таким образом, над взятой базовой точкой слой расслоения q_2 имеет размерность $n-1$. Лемма доказана.

Итак, ранг матрицы M_2 удовлетворяет неравенству $\rho \leq n^2 - n + 1$, причём $\rho = n^2 - n + 1$ в некоторой точке базы расслоения q_2. Следовательно, в общей точке базы, $rk\ M_2 = n^2 - n + 1$. Ранг матрицы M_2 падает на детерминантном алгебраическом многообразии $R_2 \subset M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbb{k})$, задаваемым условием обнуления всех миноров матрицы M_2 порядка $n^2 - n + 1$. Пусть V_2 есть дополнение к R_2 до всей базы.

Предложение 3. *Слои расслоения*

$$q_2 : Y_2 \to M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$$

над точками открытого множества V_2, являются линейными пространствами размерности $n-1$, а над точками замкнутого множества R_2 - линейными пространствами большей чем $n-1$ размерности.

6. Перейдём от $M_{n^2}(\mathbf{k})$ и $M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k})$ к их проективизациям. Так как X_1 и Y_2 задаются системой однородных уравнений, им будут соответствовать проективные многообразия $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_2 \subset \mathbf{P}(M_{n^2}(\mathbf{k}))$, а проекциям $\mathbf{p}_1 : \mathbf{X}_1 \to \mathbf{P}(M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k}))$, $\mathbf{q}_2 : \mathbf{Y}_2 \to \mathbf{P}(M_{(n-1)\times n\times n}(\mathbf{k}))$ проекции p_1 и q_2. Отметим, что $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{Y}_2$ будут неприводимыми многообразиями согласно Теореме 8 из параграфа 6, Главы I работы [10] (условие совпадения размерностей слоев в этой теореме лишнее). Из $X_1 \subset Y_2$ следует, что $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{Y}_2$, и по Теореме 7 из параграфа 6, Главы I работы [10] вытекает, что $\dim \mathbf{X}_1 = \dim \mathbf{Y}_2$ поскольку $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{q}_2$ имеют одинаковую базу и их слои в общей точке имеют одинаковую размерность. Следовательно, $\mathbf{X}_1 = \mathbf{Y}_2$ и поэтому $X_1 = Y_2$. Таким образом доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Одномёрные сечения кубической трёхмерной матрицы линейно зависимы тогда и только тогда, когда сечения каждого из двух других измерений лк-вырождены.*

7. Для того, чтобы доказать Теорему 1, сформулированную во введении, используем Теорему 2. Прежде всего заметим, что импликация $(a) \Rightarrow (b)$ очевидна. Для доказательства обратной импликации, зафиксируем некоторый базис в L и предположим, что a_{ijk} - матрица оператора A_i в этом базисе ($i \in \overline{1,m}$). Условие линейной зависимости данного семейства операторов эквивалентно условию линейной зависимости горизонтальных сечений трёхмерной матрицы $a = (a_{ijk})$ порядка $m \times n \times n$.

Значение оператора A_i в $x \in L$ при фиксированном базисе задаётся линейной комбинацией столбцов матрицы $a_{i\,_\,_}$ с коэффициентами, являющимися координатами x в этом базисе. Поэтому линейная зависимость векторов $A_1(x), \ldots, A_m(x)$ означает линейную зависимость строк соответствующей линейной комбинации вертикальных сечений $a_{_\,j\,k}$ матрицы a. Следовательно, при $m = n$ доказываемая теорема сразу следует из Теоремы 2.

Для доказательства импликации $(b) \Rightarrow (a)$ при $m < n$, к данным операторам добавим линейные операторы $A_{m+1}, \ldots, A_n$, удовлетворяющие условию

$$\dim(A_1, \ldots, A_{k+1}) = \dim(A_1, \ldots, A_k) + 1, \quad k = m, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Это возможно, так как размерность пространства операторов равна n^3. Поскольку для любого $x \in L$ система векторов $A_1(x), \ldots, A_m(x)$ линейно зависима, то система векторов $A_1(x), \ldots, A_n(x)$ также линейно зависима. Ввиду справедливости утверждения при $m = n$, операторы $A_1, \ldots, A_n$ линейно зависимы, т.е. $\dim(A_1, \ldots, A_n) < n$. Допустим, что $A_1, \ldots, A_m$ линейно независимы, т.е. $\dim(A_1, \ldots, A_k) = m$. Тогда из (8) получим, что $\dim(A_1, \ldots, A_n) = n$. Это противоречие показывает, что $A_1, \ldots, A_m$ линейно зависимы.

8. Согласно предыдущему пункту, утверждение Теоремы 2 будет выполняться в более общей ситуации, для трёхмерных матриц порядка $m \times n \times n$ при любом натуральном числе $m \leq n$, если обобщить понятие лк-вырожденности на семейства прямоугольных матриц.

Определение 2. Семейство матриц $a_1, \ldots, a_m$ одинакового порядка назовём лк-вырожденным, если у любой линейной комбинации этого семейства ранг меньше максимально возможного, т.е. как числа строк, так и числа столбцов данных матриц.

Теорема 3. *Для произвольной трёхмерной матрицы a порядка $m \times l \times n$ следующие условия эквивалентны:*

(a) *сечения $a_{1\cdot\cdot}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}$ линейно зависимы.*

(b) *сечения $a_{\cdot 1\cdot}, \ldots, a_{\cdot l\cdot}$ лк-вырождены.*

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) доказывается тем же путем, как в Предложение 1. Чтобы доказать обратную импликацию при $l \neq n$, сначала предположим, что $l > n$. Тогда для любых $1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq l$ сечения $a_{\cdot j_1 \cdot}, \ldots, a_{\cdot j_n \cdot}$ лк-вырождены, и следовательно подматрицы $a_{1\cdot\cdot}^{j_1 \ldots j_n}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}^{j_1 \ldots j_n}$ сечений $a_{1\cdot\cdot}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}$ (составленные из строк, указанных в верхнем индексе) линейно зависимы. Поэтому, сечения $a_{1\cdot\cdot}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}$ линейно зависимы.

Если $l < n$, то для произвольных $1 \leq k_1 < \ldots < k_l \leq n$ рассмотрим подматрицы $a_{\cdot 1\cdot}^{k_1 \ldots k_l}, \ldots, a_{\cdot l\cdot}^{k_1 \ldots k_l}$ сечений $a_{\cdot 1\cdot}, \ldots, a_{\cdot l\cdot}$, составленные из столбцов, указанных в верхнем индексе. Из (b) следует, что указанное семейство подматриц лк-вырождено. Следовательно, подматрицы $a_{1\cdot\cdot}^{k_1 \ldots k_l}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}^{k_1 \ldots k_l}$ сечений $a_{1\cdot\cdot}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}$ составленные из столбцов, указанных в верхнем индексе, линейно зависимы. Поэтому, сечения $a_{1\cdot\cdot}, \ldots, a_{m\cdot\cdot}$ линейно зависимы.

Abstract. A notion of lc-degeneracy is introduced and used to obtain a linear dependence criterion for sections of three-dimensional matrices. Applying this criterion, it is proved that the system of linear operators is linearly dependent if and only if their values are linearly dependent at any point.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Р. Гантмахер, Теория Матриц, Наука, Москва, 1967.
2. Р. Беллман, Введение в Теорию Матриц, Наука, Москва, 1969.
3. П. Ланкастер, Теория Матриц, Наука, Москва, 1982.
4. М. Маркус, Х. Минк, Обзор По Теории Матриц и Матричных Неравенств, Наука, Москва, 1972.
5. Н. П. Соколов, Пространственные Матрицы и их Приложения, ФМ, Москва, 1960.
6. Н. П. Соколов, Введение в Теорию Многомерных Матриц, Наукова Думка, Киев, 1972.
7. А. С. Гаспарян, "О некоторых приложениях многомерных матриц", Вычисл. Центр АН СССР, Москва, 1983.
8. J. P. Jouanolou, Le formalisin du resultant, Adv. in Math., vol. 90, no. 2, December 1991.
9. С. Г. Далалян, "Дискриминантная форма конечного семейства однородных полиномов", Доклады АН Арм.ССР, том 81, № 1, стр. 12 – 16, 1985.
10. И. Р. Шафаревич, Основы Алгебраической Геометрии, том 1, Наука, Москва, 1988.

Поступила 23 февраля 2005