Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 67-79

ВЕЩЕСТВЕННАЯ ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ДВУСТОРОННЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

С. Б. Якубович

Университет г. Порто, Португалия
E-mail : syakubov@fc.up.pt

Резюме. Для двустороннего преобразования Лапласа $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$, определённого для любой функции $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\Phi(t) = O(e^{-\cosh \alpha t})$ при $|t| \to \infty$ для некоторого $\alpha > 1$, доказана следующая формула обращения

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k e^{x(n+k+1)}}{k!} F(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R},$$

где сходимость понимается или в смысле L_p-нормы $(1 \le p < \infty)$, или почти всюду. Если функция Φ представима в виде преобразования Фурье L_1-функции, то сходимость равномерна для всех $x \in \mathbb{R}$. В гильбертовом случае $p = 2$ получена скорость сходимости аппроксимирующего оператора. Также получена соответствующая формула обращения для преобразования Меллина вещественной переменной.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Настоящая работа посвящена двустороннему преобразованию Лапласа [3], [9] вещественной переменной

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi(t)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

Работа выполнена при поддержке фонда "Centro de Matemática" университета г. Порто, Португалия.

где $\Phi(t)$ – почти всюду ограниченная, комплекснозначная функция на $\mathbb{R}$, т.е. $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$, поведение которой на бесконечности заведомо обеспечивает абсолютную сходимость интеграла (1.1). Устанавливаются некоторые интегральные разложения и разложения в виде рядов для класса функций Φ, приводящие к вещественной формуле обращения для преобразования (1.1), что заполняет пробел в вещественной теории обращения для двустороннего преобразования Лапласа и преобразования Меллина.

Преобразование Меллина вещественной переменной (см. [6]) легко получается из (1.1) простой подстановкой $e^t = y$, приводящей к интегральному представлению Меллина

$$F(x) = \int_0^\infty y^{x-1}\Phi(\log y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Если $\Phi(t)$ является чётной (или нечётной) функцией на $\mathbb{R}$, то $F(x)$ также чётная (или нечётная) и может быть, соответственно, представлена в виде

$$F(x) = 2\int_0^\infty \cosh xt\ \Phi(t)\,dt, \tag{1.3}$$

$$F(x) = 2\int_0^\infty \sinh xt\ \Phi(t)dt. \tag{1.4}$$

Далее, полагая в (1.1) $x = z$ из вертикальной полосы $\sigma_1 < \Re z < \sigma_2$ комплексной плоскости (двустороннее преобразование Лапласа), при некоторых условиях $F(z)$ будет аналитической функцией внутри вышеопределённой полосы. Используя преобразование Фурье, получаем формулу обращения с интегрированием по вертикальной прямой комплексной плоскости. Свойства ограниченности двустороннего преобразования Лапласа комплексной переменной могут быть получены из соответствующего одностороннего преобразования, где интегрирование по $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$. Например, если $0 < x < \infty$, то для одностороннего преобразования Лапласа

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\Phi(t)dt$$

имеет место хорошо известная вещественная формула обращения Видера–Поста (см. [3], [7] – [9]) :

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{x}\right)^{n+1} F^{(n)}\left(\frac{n}{x}\right),$$

где $F^{(n)}$ – n-ая производная функции F.

Существуют различные подходы к вещественным формулам обращения для одностороннего преобразования Лапласа и его итераций. Последние принадлежат классу более общих преобразований типа свёртки Фурье и Меллина с гипергеометрическими ядрами. В этой связи следует отметить хорошо известные преобразования Стилтьеса, Мейера, Вейерштрасса, и т.д. (см. [3]).

В работах [2], [3], [9] применяется метод интегрального представления Меллина-Барнса (см. [4]) на основе разложений в бесконечные произведения отношений эйлеровских гамма-функций [1]. Вероятностный подход к вещественным формулам обращения был применён в работе [5]. Скорость сходимости аппроксимирующего обращения одностороннего преобразования Лапласа рассматривалась в работах [7], [8].

Прежде всего укажем некоторые достаточные условия, при которых существует двустороннее преобразование Лапласа (1.1), и его оценку для всех $x \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Для любой функции $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющей условию $\Phi(t) = O\left(e^{-\cosh \alpha t}\right)$ при $|t| \to \infty$, $\alpha > 1$, существует двустороннее преобразование Лапласа (1.1), причём его интеграл абсолютно и равномерно сходится на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Кроме того,*

$$|F(x)| < \frac{2C}{\alpha} K_{x/\alpha}(1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

где $C > 0$ – постоянная не зависящая от x, а $K_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя.

Доказательство. Прямое вычисление даёт

$$|F(x)| \le \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} |\Phi(t)|\, dt < C \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} e^{-\cosh \alpha t} dt =$$

$$= \frac{2C}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\cosh t} \cosh\left(\frac{xt}{\alpha}\right) dt = \frac{2C}{\alpha} K_{x/\alpha}(1), \tag{1.6}$$

где $K_\nu(z)$ – модифицированная функция Бесселя (см. [1]), имеющая интегральные представления

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z\cosh u} \cosh \nu u \, du, \tag{1.7}$$

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-t-\frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt. \tag{1.8}$$

Доказательство Леммы 1 завершено.

Обозначим через $L_p(\mathbb{R}; \omega(t)dt)$ весовые лебеговы пространства функций, для которых

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R};\omega(t)dt)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p \omega(t)\, dt\right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \le p < \infty. \tag{1.9}$$

Тогда гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}; e^{t^2}dt)$, очевидно, содержит все функции $\Phi(t)$, удовлетворяющие условиям Леммы 1, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} dt \le C \int_{-\infty}^{\infty} e^{t^2 - 2\cosh \alpha t} dt < \infty.$$

Лемма 2. *Если $\Phi \in L_2(\mathbb{R}; e^{t^2}dt)$, то существует двустороннее преобразование Лапласа (1.1) в виде интеграла Лебега, являющееся бесконечно гладкой функцией, т.е. $F \in C^\infty(\mathbb{R})$. Кроме того, все производные $\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)$, $n \in \mathbb{N}_0$, принадлежат $L_2(\mathbb{R}; dx)$ и удовлетворяют следующему условию :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)\right|^2 dx \le 2\pi n! ||\Phi||^2_{L_2(\mathbb{R}; e^{t^2}dt)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.10}$$

Доказательство. Очевидно

$$e^{-x^2/2}F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{t^2/2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt.$$

Нетрудно проверить, что в последнем равенстве можно дифференцировать по x под знаком интеграла на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Поэтому имеем

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{t^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\right) dt =$$

$$= (-1)^n 2^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t) e^{t^2/2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} H_n\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right) dt,$$

где $H_n(y)$, $n \in \mathbb{N}_0$, является системой полиномов Эрмита (см. [6]). Используя неравенство Шварца и учитывая значение нормировочного множителя для полиномов Эрмита, получаем

$$\left|\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)\right|^2 \le 2^{-n} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} H_n^2\left(\frac{x-t}{\sqrt{2}}\right) dt =$$

$$= 2^{-n+\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n^2(y)\, dy =$$

$$= n!\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt. \tag{1.11}$$

Следовательно, интегрируя по x и меняя порядок интегрирования, получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2/2}F(x)\right)\right|^2 dx \le n!\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dx dt =$$

$$= 2\pi n! \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t)|^2 e^{t^2} dt,$$

откуда следует(1.10). Лемма 2 доказана.

§2. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ

Следующая теорема является основным результатом этого параграфа.

Теорема 1. *Если Φ удовлетворяет условиям Леммы 1, то Φ имеет представление*

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k e^{x(n+k+1)}}{k!} F(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

где $F(-n-k-1)$ суть значения двустороннего преобразования Лапласа (1.1) в целых точках. В (2.1) сходимость как по норме пространства $L_p(\mathbb{R}; dt)$, $1 \le p < \infty$, так и почти всюду. Кроме того, если $\Phi \in L^*(\mathbb{R})$, т.е. является преобразованием Фурье некоторой суммируемой функции, то (2.1) сходится равномерно.

Доказательство. Полагая

$$\Phi_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) \tag{2.2}$$

и используя асимптотическую формулу Стирлинга (см. [1])

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}, \quad n \to \infty, \tag{2.3}$$

находим, что функция $\Phi_n(x)$ эквивалентна, при $n \to \infty$, выражению под знаком предела в формуле (2.1). Для того, чтобы оценить ряд в (2.2) для всех $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, воспользуемся (1.5) и неравенством $K_\nu(1) \le 2^{|\nu|-1}\Gamma(|\nu|)$, $\nu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, которое легко следует из (1.8). Воспользовавшись формулой Стирлинга (см. [1])

$$\Gamma(z) = O\left(z^{z-1/2}e^{-z}\right), \quad |z| \to \infty, \tag{2.4}$$

получаем

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ne^x)^k}{k!} F(-n-k-1)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^x)^k}{k!} |F(-n-k-1)| \le$$

$$\le C 2^{(n+1)/\alpha - 1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2ne^x)^k}{k!} \Gamma\left(\frac{n+k+1}{\alpha}\right) < C_{n,\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2ne^{x+1-1/\alpha})^k}{k^{k(1-1/\alpha)-n-1}} < \infty,$$

где $\alpha > 1$ и $C_{n,\alpha} > 0$ – некоторая константа. Следовательно мы можем подставить в (2.2) представление (1.1) для коэффициентов $F(-n-k-1)$ и поменять порядок интегрирования и суммирования, в силу абсолютной и равномерной сходимости. Тогда вычисление внутреннего ряда даёт :

$$\Phi_n(x) = \frac{(ne^x)^{n+1}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ne^x)^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(n+k+1)t} \Phi(t)dt =$$

$$= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^{x-t}} e^{(x-t)(n+1)}\Phi(t)dt. \tag{2.5}$$

Рассмотрим сначала случай $p = 2$. Очевидно, $\Phi \in L_1(\mathbb{R}; dt) \cap L_2(\mathbb{R}; dt)$ и значит допускает преобразование Фурье $\hat{\Phi}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(i\tau) \in L_2(\mathbb{R}; d\tau)$. Поэтому, для любого $n \in \mathbb{N}$ выражение (2.5) является свёрткой Фурье Φ с суммируемой функцией $e^{-ne^t}e^{t(n+1)} \in L_1(\mathbb{R}; dt)$. Используя стандартное интегральное представление для гамма-функции Эйлера и применяя тождество Планшереля (см. [6], Теорема 65), вытекает

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{n!\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(n+1+i\tau)\hat{\Phi}(\tau)e^{-(x+\log n)i\tau}d\tau. \tag{2.6}$$

Кроме того, из равенства Парсеваля и неравенства $|\Gamma(n+1+i\tau)| \le \Gamma(n+1) = n!$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n!}\right|^2 \left|\hat{\Phi}(\tau)\right|^2 d\tau \le \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\Phi}(\tau)\right|^2 d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx$$

и аналогично, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n^{i\tau}n!} - 1\right|^2 \left|\hat{\Phi}(\tau)\right|^2 d\tau, \tag{2.7}$$

где интеграл в правой части, при $n \to \infty$ стремится к нулю, согласно теореме о доминантной сходимости и формуле Стирлинга (2.3). Следовательно, при $p = 2$ равенство (2.1) доказано в смысле сходимости в среднем, являясь искомой вещественной формулой обращения.

Если преобразование Фурье $\hat{\Phi}(\tau)$ принадлежит $L_1(\mathbb{R}; d\tau)$, т.е. $\Phi \in L^*(\mathbb{R})$, то функция Φ непрерывна на $\mathbb{R}$. Поэтому имеем

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n^{i\tau}n!} - 1\right| \left|\hat{\Phi}(\tau)\right| d\tau \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}||\hat{\Phi}||_{L_1(\mathbb{R};d\tau)}.$$

Отсюда легко следует, что (2.1) сходится равномерно.

Для того, чтобы получить сходимость почти всюду, воспользуемся формулой Стирлинга (2.3) и запишем

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le \frac{n^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^{x-t}} e^{(x-t)(n+1)} |\Phi(t) - \Phi(x)| dt \le$$

$$\le M\sqrt{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{g_n(x-t)} |\Phi(t) - \Phi(x)| dt, \tag{2.8}$$

где $M > 0$ – абсолютная постоянная, а $g_n(y) = n(1-e^y) + (n+1)y$, $g_n(0) = 0$. Легко доказать, что $-\infty < g_n(y) < g_n(y_0)$, $y \in \mathbb{R}$, где $y_0 = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ есть точка, в которой достигается максимальное значение функции

$$g_n(y_0) = (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Кроме этого, функция $g_n(y)$ монотонно возрастает при $-\infty < y \le y_0$ и монотонно убывает при $y_0 < y < \infty$. Поэтому, разбивая интеграл в правой части формулы (2.8), для малых $\delta \in \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{2}\right)$ и достаточно больших $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\Phi_n(x) - \Phi(x)| \le M[I_1 + I_2 + I_3], \tag{2.9}$$

где

$$I_1 = \sqrt{n}\int_{|t-x|<1/\sqrt{n}} e^{g_n(x-t)}|\Phi(t)-\Phi(x)|\,dt.$$

$$I_2 = \sqrt{n}\int_{|t-x|>1/\sqrt{n}}^{|t-x|<\delta} e^{g_n(x-t)}|\Phi(t)-\Phi(x)|\,dt,$$

$$I_3 = \sqrt{n}\int_{|t-x|>\delta} e^{g_n(x-t)}|\Phi(t)-\Phi(x)|\,dt.$$

Для почти всех $x \in \mathbb{R}$ и $n \to \infty$, выводим

$$I_1 \le \sqrt{n}\int\limits_{|t-x|<1/\sqrt{n}} e^{1/n}|\Phi(t)-\Phi(x)|\,dt \le e\sqrt{n}\int\limits_{|t-x|<1/\sqrt{n}} |\Phi(t)-\Phi(x)|\,dt = o(1),$$

в силу того, что $\Phi \in L_1(\mathbb{R})$ и x можно рассматривать как точку Лебега функции Φ. Далее, беря $g_n'(y) = 1 + n(1-e^y) \ne 0$ при $|y| > \delta$ и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{|t-x|>\delta} e^{g_n(x-t)}dt = \frac{1}{n}\int_{|y|>\delta} e^{g_n(y)}\frac{g_n'(y)dy}{1+1/n-e^y} = \frac{1}{n}\left.\frac{e^{g_n(y)}}{1+1/n-e^y}\right|_{|y|>\delta} -$$

$$-\frac{1}{n}\int_{|y|>\delta} e^{g_n(y)+y}\frac{dy}{(1+1/n-e^y)^2} \le O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{e}{n}\int_{|y|>\delta}\frac{e^y dy}{(1+1/n-e^y)^2} =$$

$$= O\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{e}{n}\left.\frac{1}{1+1/n-e^y}\right|_{|y|>\delta} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \to \infty.$$

Следовательно, так как $|\Phi(t) - \Phi(x)|$ ограничена, то

$$I_3 \le C\sqrt{n}\int_{|t-x|>\delta} e^{g_n(x-t)}dt = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Для того, чтобы оценить I_2, запишем

$$I_2 = \sqrt{n}\int_{|y|>1/\sqrt{n}}^{|y|<\delta} e^{g_n(y)}|\Phi(x+y)-\Phi(x)|\,dy = I_{2,1}+I_{2,2},$$

где

$$I_{2,1} = \sqrt{n}\int_{-\delta}^{-1/\sqrt{n}} e^{g_n(y)}|\Phi(x+y)-\Phi(x)|\,dy,$$

$$I_{2,2} = \sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} e^{g_n(y)}\,|\Phi(x+y)-\Phi(x)|\,dy.$$

Оценим только $I_{2,2}$, так как $I_{2,1}$ оценивается аналогично. Интегрируя по частям и используя $g'_n(y)<0$, $y\in(1/\sqrt{n},\delta)$, получаем

$$I_{2,2} = \sqrt{n}e^{g_n(y)}\int_0^y |\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du\Big|_{1/\sqrt{n}}^{\delta} -$$

$$-\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} g'_n(y)e^{g_n(y)}\int_0^y |\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du\,dy =$$

$$= \sqrt{n}e^{g_n(\delta)}\int_0^{\delta}|\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du - \sqrt{n}e^{g_n(1/\sqrt{n})}\int_0^{1/\sqrt{n}}|\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du-$$

$$-\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} yg'_n(y)e^{g_n(y)}\frac{1}{y}\int_0^y |\Phi(x+u)-\Phi(x)|\,du\,dy =$$

$$= \sqrt{n}\delta e^{g_n(\delta)}o(1)+o(1)-o(1)\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} yg'_n(y)e^{g_n(y)}dy,$$

имея ввиду, что x – точка Лебега функции Φ. Легко видеть, что $g_n(\delta)<0$. Действительно, находим

$$g_n(\delta) = \delta + n(1+\delta-e^{\delta}) < \delta - \frac{n\delta^2}{2} < \delta - \frac{1}{2} < 0.$$

Следовательно,

$$\sqrt{n}\,\delta\, e^{g_n(\delta)} < \frac{\sqrt{n}\,\delta}{1-g_n(\delta)} = \frac{\sqrt{n}\,\delta}{1-\delta+n(e^{\delta}-1-\delta)} < \frac{2\sqrt{n}\,\delta}{n\delta^2} = \frac{2}{\sqrt{n}\,\delta} < 2.$$

В тоже время, имеем

$$\sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} yg'_n(y)\,e^{g_n(y)}dy = \sqrt{n}\,\delta e^{g_n(\delta)} - e^{g_n(1/\sqrt{n})} - \sqrt{n}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta} e^{g_n(y)}dy <$$

$$< O(1)+\frac{2}{\sqrt{n}}\int_{1/\sqrt{n}}^{\delta}\frac{dy}{y^2} = O(1)+\frac{2}{\sqrt{n}}\left[\sqrt{n}-\frac{1}{\delta}\right] = O(1)+2-\frac{2}{\sqrt{n}\,\delta} = O(1).$$

Поэтому, $I_{2,2} = o(1)$ при $\delta \to 0+$ и $n \to \infty$. Аналогично, $I_{2,1} = o(1)$. Итак, можно найти $\delta > 0$, для которого I_2 достаточно мало и устремляя $n \to \infty$, приходим к (2.9). Следовательно, (2.1) сходится почти всюду.

В случае общего $p \in [1, \infty)$, мы вновь используем (2.5). Действительно, согласно включению $\Phi \in L_p(\mathbb{R}; dx)$, применяя обобщённое неравенство Минковского и тождество

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^t} e^{t(n+1)} dt = 1,$$

выводим

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{n^{n+1}}{n!} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^t} e^{t(n+1)} \left[\Phi(x-t) - \Phi(x) \right] dt \right|^p dx \right)^{1/p} \le$$

$$\le \frac{n^{n+1}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ne^t} e^{t(n+1)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt.$$

Рассуждая как и в (2.9), получаем

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} \le M_1 [J_1 + J_2 + J_3], \tag{2.10}$$

где

$$J_1 = \sqrt{n} \int_{|t| < 1/\sqrt{n}} e^{g_n(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt,$$

$$J_2 = \sqrt{n} \int_{|t| > 1/\sqrt{n}}^{|t| < \delta} e^{g_n(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt,$$

$$J_3 = \sqrt{n} \int_{|t| > \delta} e^{g_n(t)} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} dt.$$

Поэтому, используя неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x-t) - \Phi(x)|^p dx \right)^{1/p} \le 2 ||\Phi||_{L_p(\mathbb{R}; dx)},$$

нетрудно проверить, что J_3 стремится к нулю при $n \to \infty$ (см. рассуждения о сходимости почти всюду). Касаясь J_1, воспользуемся непрерывностью в p-среднем, которая означает, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$||\Phi(\cdot - t) - \Phi||_{L_p(\mathbb{R}; dx)} \le \varepsilon, \quad |t| < \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sqrt{n}\int_{|t|<1/\sqrt{n}} e^{g_n(t)}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x-t)-\Phi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}dt=O(\varepsilon).$$

J_2 снова становится малым для достаточно малого $\delta>0$ при $n\to\infty$. Итак, формула (2.1) доказана для любого $p\geq 1$ в смысле сходимости в среднем.

Наконец, покажем, что преобразование (1.1) функции $\Phi_n(t)$ сходится к $F(x)$ для всех $x\in\mathbb{R}$ при $n\to\infty$. В самом деле, подставив представление (2.5) функции $\Phi_n(x)$ в (1.1), поменяем порядок интегрирования. Тогда, при $n>-x-1$, непосредственным вычислением получим

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{xt}\Phi_n(t)\,dt=\frac{n^{n+1}}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(y)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ne^{t-y}}e^{(t-y)(n+1)+xt}dtdy=$$

$$=\frac{\Gamma(n+1+x)}{n!\,n^x}F(x).$$

Поэтому по формуле Стирлинга, для всех $x\in\mathbb{R}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)$. Теорема 1 доказана.

Замечание. Легко видеть, что функция Φ в Лемме 1 очень быстро убывает на бесконечности. Однако, беря, например, $\Phi(t)=e^{-t^2}$, которая не принадлежит данному классу, имеем $F(-n-k-1)=\sqrt{\pi}e^{(n+k+1)^2/4}$ и ряд (2.1) расходится для всех $x\in\mathbb{R}$ и $n\in\mathbb{N}$.

В качестве следствия, приходим к теореме о преобразовании Меллина вещественной переменной (см. (1.2))

$$h^*(x)=\int_0^{\infty}h(t)t^{x-1}dt. \tag{2.11}$$

Теорема 2. *Пусть $h\in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ и $h(t)=O(e^{-\frac{1}{2}(t^\alpha+t^{-\alpha})})$, $\log t\to\infty$, где $\alpha>1$. Тогда существует преобразование Меллина (2.11), где интеграл сходится абсолютно и равномерно на любом компактном множестве из $\mathbb{R}$. Кроме того, $h(x)$ допускает представление*

$$h(x)=\lim_{n\to\infty}e^n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)^kx^{n+k+1}}{k!}h^*(-n-k-1),\quad x\in\mathbb{R}_+,$$

где, в свою очередь, ряд абсолютно сходится как по норме пространства $L_p(\mathbb{R}_+;dt)$, $1\leq p<\infty$, так и почти всюду. В случае $h(e^x)\in L^*(\mathbb{R})$ сходимость равномерна.

Теорема 3. *Пусть функции Φ, Ψ удовлетворяют условиям Леммы 1 с $\alpha > 2$ и F, G суть соответствующие преобразования Лапласа (1.1). Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\Psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} F(-n-k-1)G(n+k+1), \quad (2.12)$$

где интеграл и ряд сходятся абсолютно. Если функция $\Phi(x)$ чётна (или нечётна) на $\mathbb{R}$, то имеют место соотношения типа Парсеваля для преобразований (1.3) и (1.4) :

$$\int_{0}^{\infty} |\Phi(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{8\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} |F(n+k+1)|^2. \quad (2.13)$$

Доказательство. Изменяя порядок интегрирования и суммирования в равенствах (2.1) и (2.2), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x)\Psi(x)dx = e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k}{k!} F(-n-k-1)G(n+k+1), \quad (2.14)$$

так как в силу Леммы 1 имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} |F(-n-k-1)G(n+k+1)| = O\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4en)^k}{k^{k(1-2/\alpha)-n-1}}\right) < \infty, \quad \alpha > 2,$$

для любых $n \in \mathbb{N}$. Более того,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \left[\Phi_n(x) - \Phi(x)\right] \Psi(x)dx\right| \le ||\Psi||_{L_2(\mathbb{R};dx)} ||\Phi_n - \Phi||_{L_2(\mathbb{R};dx)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поэтому вычисление предела в (2.14) приводит к (2.12). Соотношение (2.13) немедленно вытекает из $\Psi = \overline{\Phi}$ и свойства чётности как самой функции, так и преобразований (1.3) и (1.4).

§3. СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ

В этом параграфе мы, как и в [7], оценим скорость сходимости аппроксимирующего оператора (2.2) в $L_2(\mathbb{R}; dx)$. Воспользовавшись равномерной для всех $\tau \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, оценкой

$$\left|\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{n^{i\tau} n!}\right| \le 1,$$

равенством $n! = \Gamma(n+1)$ и асимптотической формулой (см. [1, Vol. I]) для отношения Гамма-функций при $n \to \infty$, получаем

$$\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{\Gamma(n+1)n^{i\tau}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{i\tau} \left(1 + \frac{i\tau(i\tau-1)}{2(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{|\tau|+\tau^2}{n}\right).$$

При $\frac{\tau^2}{n} < 1$ имеет место соотношение

$$\frac{\Gamma(n+1+i\tau)}{\Gamma(n+1)n^{i\tau}} = 1 + O\left(\frac{|\tau|}{\sqrt{n}}\right).$$

Возвращаясь к (2.7), находим

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right\|_{L_2(\mathbb{R};dx)} \le$$

$$\le \frac{C}{n}\left[\left\|\tau\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R};d\tau)} + \left\|\tau^2\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R};d\tau)}\right], \tag{3.1}$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right\|_{L_2(\mathbb{R};dx)} \le \frac{C}{\sqrt{n}}\left\|\tau\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R};d\tau)}, \tag{3.2}$$

где $C > 0$ – абсолютная постоянная. Следовательно, правая часть неравенства (3.1) конечна и скорость сходимости – $O\left(\frac{1}{n}\right)$, предполагая, что функция Φ дважды дифференцируема и $\Phi', \Phi'' \in L_2(\mathbb{R}; dx)$. Если же функция Φ только один раз дифференцируема, то в свою очередь, правая часть неравенства (3.2) конечна, и скорость сходимости равна $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Теорема 4. a) *Пусть функция Φ дифференцируема и удовлетворяет условиям Леммы 1, и $\Phi' \in L_2(\mathbb{R}; dx)$. Тогда аппроксимирующий оператор (2.2) сходится к функции Φ по норме пространства $L_2(\mathbb{R}; dx)$ со скоростью $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

b) *Пусть функция Φ дважды дифференцируема и удовлетворяет условиям Леммы 1, и $\Phi', \Phi'' \in L_2(\mathbb{R}; dx)$. Тогда аппроксимирующий оператор (2.2) сходится к функции Φ в норме пространства $L_2(\mathbb{R}; dx)$ со скоростью n^{-1}.*

Аналогично (см. доказательство Теоремы 1), если $\Phi, \Phi', \Phi'' \in L^*(\mathbb{R})$, то мы получаем ту же скорость сходимости в равномерной метрике :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right| \le \frac{C}{n}\sum_{j=1}^{2}\left\|\tau^j\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_1(\mathbb{R};d\tau)},$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (ne^x)^{k+n+1}}{n!\,k!} F(-n-k-1) - \Phi(x)\right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}\left\|\tau\hat{\Phi}(\tau)\right\|_{L_1(\mathbb{R};d\tau)}.$$

Abstract. For the bilateral Laplace transform $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt}\Phi(t)dt$, $x \in \mathbb{R}$ well defined for any $\Phi(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$ satisfying $\Phi(t) = O(e^{-\cosh \alpha t})$ as $|t| \to \infty$ for some

$\alpha > 1$, the inversion formula

$$\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} e^n \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-n)^k e^{x(n+k+1)}}{k!} F(-n-k-1), \quad x \in \mathbb{R},$$

is proved, where the convergence is in the L_p-norm $(1 \le p < \infty)$ or almost everywhere. If Φ is representable as the Fourier transform of an L_1-function, then the above limit is uniform for all $x \in \mathbb{R}$. For the Hilbert case $p = 2$ the convergence rate of the approximate operator is obtained. The corresponding inversion formula is derived for the real variable Mellin transform.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vols I, II, McGraw-Hill, New York, London and Toronto, 1953.
2. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Плоскости, Москва, Наука, 1966.
3. I. I. Hirshman, D. V. Widder, The Convolution Transform, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1955.
4. Nguyen Thanh Hai, S. B. Yakubovich, The Double Mellin-Barnes Type Integrals and their Applications to Convolution Theory, World Scientific, Singapore, New York, London, 1992.
5. J. L. Teugels, "Probabilistic proofs of some real inversion formulas", Math. Nachr., vol. 146, pp. 149 – 157, 1990.
6. Е. С. Титчмарш, Введение в Теорию Интегралов Фурье, Москва, 1948.
7. Vu Kim Tuan, Dinh Thanh Duc. "Convergence rate of Post-Widder approximate inversion of the Laplace transform". Vietnam J. Math., vol. 28, no. 1, pp. 93–96, 2000.
8. Vu Kim Tuan, Dinh Thanh Duc. "A new real inversion formula of the Laplace transform and its convergence rate". Frac. Cal. & Appl. Anal. vol. 5, no. 4, pp. 387– 394, 2002.
9. D. V. Widder. The Laplace transform, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1941.

Поступила 23 мая 2005