КВАЗИГРИДИ СИСТЕМНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ПОДСИСТЕМ СИСТЕМЫ ФАБЕРА-ШАУДЕРА В $C(0, 1)$

А. А. Саргсян

Ереванский государственный университет

Резюме. Получено необходимое условие для квазигриды системности подсистем Фабера-Шаудера в $C(0, 1)$ и построена подсистема с плотностью 0, которая не является квазигридой системой в $C(0, 1)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нормированный базис в банаховом пространстве X . Тогда для каждого элемента $f \in X$ существует единственный ряд по системе $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящийся к f по норме пространства X :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(f) \psi_n.$$

Для заданного $f \in X$, назовём перестановку натуральных чисел $\sigma = \{\sigma(n)\}_{n=1}^{\infty}$ убывающей, если

$$|A_{\sigma(n)}(f)| \geq |A_{\sigma(n+1)}(f)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Множество всех таких убывающих перестановок обозначим через $D(f, \Psi)$. В случае строгих неравенств, множество $D(f, \Psi)$ содержит только одну убывающую перестановку. m -ый гриди аппроксимант элемента f по базису Ψ , отвечающий перестановке $\sigma \in D(f, \Psi)$, определим следующим образом :

$$G_m(f) = G_m(f, \Psi, \sigma) = \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(f) \psi_{\sigma(n)}.$$

Этот нелинейный метод аппроксимации известен как гриди алгоритм (см., например, [1]). Гриди алгоритмы для банаховых пространств относительно

нормированных базисов изучены Конягиным и Темляковым [1], Войташиком [2], ДеВором [3], Григоряном [4, 5] и другими (см. [6, 7]).

Определение 1. Говорят, что гриды алгоритм элемента $f \in X$ по системе Ψ сходится, если существует $\sigma \in D(f, \Psi)$, для которой

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|G_m(f, \Psi, \sigma) - f\|_X = 0. \quad (1.1)$$

Если базис Ψ является безусловным, то ясно, что последовательность операторов $\{G_m(f)\}_{m=1}^{\infty}$ сходится к $f \in X$, независимо от выбора $\sigma \in D(f, \Psi)$.

Определение 2. Система $\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квазигриды системой в X или, квазигриды базисом в $\overline{\text{span}}(\Psi)$, если для каждого элемента $f \in \overline{\text{span}}(\Psi)$ и для любой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ выполняется (1.1).

Теорема (Войташик [2]). Для того, чтобы базис Ψ был бы квазигриды базисом в X , необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $f \in X$, для всякой перестановки $\sigma \in D(f, \Psi)$ и для любого натурального числа m выполнялось бы неравенство

$$\|G_m(f, \Psi, \sigma)\|_X \leq B_0 \|f\|_X,$$

где постоянная B_0 не зависит от f и m .

Теперь напомним определение системы Фабера-Шаудера. Это система функций $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, в которой $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, и при $n = 2^k + i$, $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, 2, \dots, 2^k$ имеем

$$\varphi_n(x) = \varphi_{2^k+i}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на} \\ \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right] \quad \text{и} \quad \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Число k называется рангом функции $\varphi_k^{(i)}(x)$. Носитель функции $\varphi_n(x)$ ($n = 2, 3, \dots$) системы Фабера-Шаудера обозначим через Δ_n , а точку где $\varphi_n(x) = 1$ через x_n .

В работе [7] доказано, что в пространстве $C(0, 1)$ не существует квазигриды базиса. Следовательно, в случае системы Фабера-Шаудера (которая является базисом в $C(0, 1)$, см. [8]), для любого положительного числа B существуют функция $f_0 \in C(0, 1)$, перестановка $\sigma_0 \in D(f, \Phi)$ и натуральное число m_0 такие, что

$$\|G_{m_0}(f_0, \Phi, \sigma_0)\|_C > B \|f_0\|_C.$$

Отметим, что доказательство этого утверждения (для системы Фабера-Шаудера) не имеет конструктивного характера.

В настоящей статье приводится новое, конструктивное доказательство этого результата со следующими тремя усилениями.

Теорема 1. Для любого

$$x_0 \in E_0 = \left\{ \frac{3^i - 2}{3 \cdot 2^k} \cdot \frac{3^i - 1}{3 \cdot 2^k} \quad (k = 0, 1, \dots, i = 1, 2, \dots, 2^k) \right\}$$

существует функция $f_0 \in C(0, 1)$ такая, что для любой $\sigma \in D(f_0, \Phi)$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, x_0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m A_{\sigma(n)}(f_0) \varphi_{\sigma(n)}(x_0) = +\infty.$$

Пусть $S = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\Lambda(n)$ - число элементов S меньше n . Следующую величину назовем плотностью множества S :

$$\rho(S) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m}.$$

Пусть $\Phi_{S'} = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ - подсистема системы (1.2) такая, что носители функций $\varphi_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) попарно не пересекаются (например, $\Phi_{S'} = \{\varphi_{2^{k+2}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$). Тогда, очевидно $\Phi_{S'}$ является безусловным базисом в $\overline{\text{span}}(\Phi_{S'})$, и следовательно, является квазигриды базисом в замыкании своей линейной оболочки и $\rho(S') = 0$.

Теорема 2. Существует подсистема Φ_S системы Фабера-Шаудера такая, что $\rho(S) = 0$ и Φ_S не является квазигриды системой в $C(0, 1)$.

Пусть $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ некоторая подсистема системы (1.2), $S_0 = \{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \in S$ некоторое подмножество множества S и пусть $\Delta_{n_{k_j}}$ - носитель функции $\varphi_{n_{k_j}}(x)$ ($j = 1, 2, \dots$). Тогда для любого $S_0 = \{n_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \in S$ пересечение $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_{k_j}}$ либо пусто, либо является точкой отрезка $[0, 1]$. Если $\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_{n_{k_j}} = x_0 \in [0, 1]$, то точку x_0 назовём точкой сгущения носителей функций подсистемы Φ_S .

Теорема 3. Для того, чтобы подсистема $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ системы Фабера-Шаудера являлась квазигриды базисом в замыкании своей линейной оболочки, необходимо, чтобы носители функций подсистемы $\varphi_{n_k}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) не имели точек сгущения в множестве E_0 .

§2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ЛЕММЫ

Рассмотрим подсистему

$$\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \quad (2.1)$$

в которой

$\varphi_{n_1}(x) = \varphi_2(x) = \varphi_{2^{n_1+1}}(x)$ (носителем Δ_{n_1} является интервал $(0, 1)$, и $x_{n_1} = \frac{1}{2}$),

$\varphi_{n_2}(x) = \varphi_3(x) = \varphi_{2^{n_2+1}}(x)$ (носителем Δ_{n_2} является левая половина интервала Δ_{n_1} , и $x_{n_2} = \frac{1}{4}$),

$\varphi_{n_3}(x) = \varphi_6(x) = \varphi_{2^{n_3+2}}(x)$ (носителем Δ_{n_3} является правая половина интервала Δ_{n_2} , и $x_{n_3} = \frac{1/2+1/4}{2}$) и т.д.. Носителем функции $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ является правая половина интервала $\Delta_{n_{2m}}$ ($x_{n_{2m+1}} = \frac{x_{n_{2m}} + x_{n_{2m+1}}}{2}$), а носителем функции $\varphi_{n_{2m+2}}(x)$

является левая половина интервала $\Delta_{n_{2m+1}}$ ($x_{n_{2m+2}} = \frac{x_{n_{2m+1}} + x_{n_{2m+2}}}{2}$), $m = 1, 2, \dots$

Очевидно, что $\Delta_{n_{m+1}} \subset \Delta_{n_m}$, $m = 1, 2, \dots$ и

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \text{mes } \Delta_{n_m} = 0. \quad (2.2)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \exists \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} &\equiv x_0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m}} &= x_0 - 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m+1}} = x_0 + 0, \\ x_0 &\in \Delta_{n_m}, \quad m = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.3)$$

поскольку $x_{n_{2m}}$ и $x_{n_{2m+1}}$ являются соответственно левым и правым концом интервала $\Delta_{n_{2m+2}}$.

Предложение 1. Все функции подсистемы (2.1) имеют одно и то же значение $2/3$ в точке x_0 (см. (2.3)), т.е.

$$\varphi_{n_m}(x_0) = \frac{2}{3}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Доказательство. Из построения подсистемы (2.1) следует, что дробление носителя функции $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ точками $\{x_{n_{2k}}\}_{k=1}^{\infty}$ одно и то же для любого натурального k , а также дробление носителя функции $\{\varphi_{n_{2k-1}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ точками $\{x_{n_{2k-1}}\}_{k=1}^{\infty}$ одно и то же для любого натурального k .

Следовательно, точка $x_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m}$ делит носитель функции $\varphi_{n_{2k-1}}(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) на части, отношение которых одинаково для всех значений k . Ситуация та же и для функций $\{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Не трудно показать, что это отношение

$$1/3 : 2/3 \text{ для } \{\varphi_{n_{2k-1}}(x)\}_{k=1}^{\infty} \text{ и } 2/3 : 1/3 \text{ для } \{\varphi_{n_{2k}}(x)\}_{k=1}^{\infty}. \quad (2.4)$$

Следовательно, по определению системы Фабера-Шаудера следует, что

$$x_0 = \frac{1}{3}, \quad \varphi_{n_m}(x_0) = \frac{2}{3}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Следствие 1. Из вышеприведённого доказательства следует, что Предложение 1 верно также для подсистемы системы (1.2), в которой первой функцией является функция $\varphi_{n_1}(x)$ подсистемы (2.1), а для любого $m = 1, 2, \dots$ носители функций $\varphi_{n_{2m}}(x)$ и $\varphi_{n_{2m+1}}(x)$ являются, соответственно, правыми и левыми половинами интервалов $\Delta_{n_{2m-1}}$ и $\Delta_{n_{2m}}$. Из определения системы (1.2) вытекает, что для этой подсистемы будем иметь

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m}} = x_0 + 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m+1}} = x_0 - 0, \quad x_0 = \frac{2}{3}, \quad y_0 = \frac{2}{3}.$$

Следствие 2. Из свойства локальности системы Шаудера, Предложения 1 и Следствия 1 следует, что для каждой функции $\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x)$ ($n = 2, 3, \dots$) существуют точки $x_L(n)$ и $x_R(n)$ и подсистемы $\{\varphi_{n_m}^L(x)\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_{n_m}^R(x)\}_{m=1}^{\infty}$ системы Фабера-Шаудера ($\varphi_{n_1}^L(x) = \varphi_{n_1}^R(x) = \varphi_n(x)$, $\Delta_{n_2}^L$ является левой половиной носителя Δ_n , а $\Delta_{n_2}^R$ является правой половиной носителя Δ_n , $\text{mes } \Delta_m^L = \text{mes } \Delta_m^R = \frac{1}{2^{m+1}}$, $m = 1, 2, \dots$) такие, что

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{n_m}^L = x_L(n), \quad \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{n_m}^R = x_R(n),$$

$$\varphi_{n_m}^L(x_L(n)) = \varphi_{n_{m+1}}^L(x_L(n)) \equiv y_L(n), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\varphi_{n_m}^R(x_R(n)) = \varphi_{n_{m+1}}^R(x_R(n)) \equiv y_R(n), \quad m = 1, 2, \dots,$$

и

$$x_{n_{m+2}}^L = \frac{x_{n_m}^L + x_{n_{m+1}}^L}{2}, \quad x_{n_{m+2}}^R = \frac{x_{n_m}^R + x_{n_{m+1}}^R}{2}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m}}^L = x_L(n) - 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m+1}}^L = x_L(n) + 0,$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m}}^R = x_R(n) + 0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_{2m+1}}^R = x_R(n) - 0,$$

$$x_L(n), \quad x_R(n) \in E_0, \quad y_L(n) = y_R(n) = \frac{2}{3}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Ясно, что плотности этих подсистем равны нулю. Обозначим совокупность таких подсистем через $\bar{\Phi}$ и отметим, что с помощью простых расчетов нетрудно доказать, что E_0 является множеством всех возможных точек $x_L(n)$ и $x_R(n)$ ($n = 2, 3, \dots$).

Предложение 2. Прямой расчёт показывает, что функции $\varphi_{n_1}(x)$, $\varphi_{n_2}(x)$ и $\varphi_{n_3}(x)$ принимают одно и то же значение $2/3$ в точке $1/3$. Тогда, согласно свойству локальности системы (1.2), все функции подсистемы (2.1) принимают значение $2/3$ в точке $1/3$.

Далее, пусть $x_0 \in [0, 1]$ – точка, где функции подсистемы $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \bar{\Phi}$ принимают значение $2/3$. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|$ сходится в каждой точке $x \in [0, 1]$, так как в точке x_0 её сумма равна нулю, а в остальных точках $x \in [0, 1]$ он представляет собой конечную сумму. Положим

$$L_j(x) = \sum_{k=j+1}^{\infty} |\varphi_{n_k}(x) - \varphi_{n_{k-1}}(x)|, \quad j = 1, 2, \dots$$

Лемма 1. Для каждой подсистемы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} = \Phi_S \in \bar{\Phi}$:

$$L_1(x) < 3, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Доказательство. Используя свойство локальности системы Фабера–Шаудера и Следствие 1, докажем наше утверждение только для подсистемы (2.1), поскольку для прочих подсистем $\Phi_S \in \bar{\Phi}$ доказательство аналогично. Согласно определению системы Фабера–Шаудера и построению подсистемы (2.1), для любого натурального числа $j \geq 1$

$$L_j(x) - L_{j+1}(x) = |\varphi_{n_{j+1}}(x) - \varphi_{n_j}(x)| = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in ([0, 1] \setminus \Delta_{n_j}) \cup \{x_0\}, \\ 1, & \text{при } x = x_{n_j}, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } x = x_{n_{j+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна между} \\ \text{всеми соседними точками из} \\ \{x_{n_k}\}_{k=j-2}^{j+1} \cup \{x_0\}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Итак, $L_j(x) - L_{j+1}(x)$ равна нулю на $[0, 1] \setminus \Delta_{n_j}$, и представляет собой ломаную на Δ_{n_j} , с абсциссами вершин $x_{n_j}, x_{n_{j+1}}, x_0$ (где $x_{n_{(-1)}}$ и x_{n_0} суть концы интервала Δ_{n_1} , т.е. $x_{n_{(-1)}} = 0, x_{n_0} = 1$).

Используя (2.4), (2.5) и определение подсистемы (2.1), не трудно доказать, что

$$L_1(x) - L_3(x) = \sum_{j=1}^2 L_j(x) - L_{j+1}(x)$$

равна нулю при $x = x_0$, равна 1 при $x = x_{n_1}$, равна $1/2 + 1$ при $x = x_{n_2}$, и равна $1/2 + 1/4$ при $x = x_{n_3}$, кроме того, нетрудно доказать, что $L_1(x) - L_3(x)$ линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^3 \cup \{x_0\}$ (т.е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, x_0$), а

$$L_1(x) - L_{1+i}(x) = \sum_{j=1}^i L_j(x) - L_{j+1}(x), \quad i \geq 1$$

равна нулю при $x = x_0$, равна 1 при $x = x_{n_1}$, равна $\frac{1}{2} + 1$ при $x = x_{n_2}, \dots$, равна $\sum_{k=1}^i \frac{1}{2^{k-1}}$ при $x = x_{n_i}$, и, наконец, равна $\sum_{k=1}^i \frac{1}{2^k}$ при $x = x_{n_{i+1}}$. Кроме того, $L_1(x) - L_{i+1}(x) = \sum_{j=1}^i L_j(x) - L_{j+1}(x)$ ($i \geq 1$) линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{i+1} \cup \{x_0\}$, т.е. представляет собой ломаную с абсциссами вершин $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_{i+1}}, x_0$ (число вершин этой ломаной на единицу больше числа вершин ломаной, которую представляет собой $L_1(x) - L_i(x)$).

Из вышесказанного следует, что $L_1(x) = \sum_{j=1}^{\infty} L_j(x) - L_{j+1}(x)$ равна нулю при $x = x_0$, равна 1 при $x = x_{n_1}$, равна $\frac{1}{2} + 1$ при $x = x_{n_2}, \dots$, равна $\sum_{k=1}^i \frac{1}{2^{k-1}}$ при $x = x_{n_i}, \dots$, линейна и непрерывна между всеми соседними точками из $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$, т.е. представляет собой "ломаную линию" с абсциссами вершин $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{x_0\}$. Следовательно,

$$L_1(x) < 3, \quad \forall x \in [0, 1],$$

так как $L_1(x_0) = 0$ и $L_1(x_{n_i}) < 3, \forall i = 1, 2, \dots$

Замечание 1. Не трудно показать, что Лемма 1 верна и для всякой подсистемы системы (2.1).

Пусть

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \dots = +\infty, \quad (2.6)$$

и пусть A — некоторое конечное число. Тогда, по схеме Римана переставим члены ряда (2.6) так, чтобы он сходил к A . Обозначим члены переставленного ряда через A_k , т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = A. \quad (2.7)$$

Рассмотрим ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x), \quad (2.8)$$

где $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty} \in \bar{\Phi}$ или является подсистемой некоторой системы $\Phi_S \in \bar{\Phi}$. Пусть $x_0 \in [0, 1]$ — точка, в которой функции этой подсистемы принимают значение $2/3$. Тогда ряд (2.8) сходится в точках $x \in [0, 1]$, поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x_0) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} A_k = \frac{2}{3} A$$

(см. (2.7)) и представляет собой конечные суммы (см. определение $\bar{\Phi}$), когда $x \in [0, 1] \setminus \{x_0\}$.

Положим

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(z).$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. Ряд (2.8) равномерно сходится к $f(z)$.

Доказательство. Положим

$$r_j = \sum_{k=j}^{\infty} A_k \quad \text{и} \quad R_j(z) = \sum_{k=j}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(z).$$

Тогда, в силу (2.7), для любого $\epsilon > 0$ существует некоторое $j_0 \in N$ такое, что

$$|r_j| < \frac{\epsilon}{4} \tag{2.9}$$

при $j \geq j_0$. Кроме того,

$$R_j(z) = \sum_{k=j}^{\infty} (r_k - r_{k+1}) \varphi_{n_k}(z),$$

поскольку $A_k = r_k - r_{k+1}$, и поэтому

$$R_j(z) = r_j \varphi_{n_j}(z) + \sum_{k=j+1}^{\infty} r_k \{ \varphi_{n_k}(z) - \varphi_{n_{k-1}}(z) \}.$$

Следовательно, так как $\|\varphi_n(z)\|_{C(0,1)} = 1$, $n = 0, 1, \dots$ получаем

$$|R_j(z)| \leq |r_j| + \sum_{k=j+1}^{\infty} |r_k| |\varphi_{n_k}(z) - \varphi_{n_{k-1}}(z)|,$$

и с учетом (2.9)

$$|R_j(z)| < \frac{\epsilon}{4} \{1 + L_j(z)\}.$$

Следовательно, $|R_j(z)| < \epsilon$ согласно Лемме 1 и Замечанию 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ

Для заданной точки $z_0 \in E_0$, пусть $\Phi_S = \{\varphi_{n_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ - подсистема системы Фабера-Шаудера такая, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{n_k} = z_0, \quad \varphi_{n_k}(z_0) = \frac{2}{3} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(ясно, что либо Φ_S входит в $\bar{\Phi}$ либо является подсистемой некоторой системы $\Phi_{S'} \in \bar{\Phi}$, т.е. $\rho(S) = 0$.) Из Леммы 2 следует, что

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_{n_k}(x) \in \overline{\text{span}}(\Phi_S),$$

где $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – члены ряда (2.7). Из построения ряда (2.7) следует

$$G_m(f_0, \Phi, \sigma, z_0) = G_m(f_0, \Phi_S, \sigma, z_0) = \sum_{k=1}^m A_{\sigma(k)} \varphi_{n_{\sigma(k)}}(z_0) = \frac{2}{3} \sum_{k=1}^m a_k$$

при некоторой $\sigma \in D(f_0, \Phi_S) = D(f_0, \Phi)$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_m(f_0, \Phi, \sigma, z_0) = +\infty$$

для любой $\sigma \in D(f_0, \Phi_S) = D(f_0, \Phi)$. Следовательно, ввиду $\rho(S) = 0$, получим доказательства всех теорем.

Автор выражает благодарность профессору М. Г. Григоряну, под руководством которого выполнена эта работа.

Abstract. A necessary condition implying that a Faber–Schauder subsystem is quasi-greedy in $C(0, 1)$ is obtained and not quasi-greedy subsystem of 0-density is constructed in $C(0, 1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
2. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithms for general systems", J. Approx. Theory, vol.107, pp. 293 – 314, 2000.
3. R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Adv. in Comput. Math., no. 5, pp. 173 – 187, 1996.
4. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^p греди алгоритма по тригонометрической системе", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 39, № 5, стр. 1 – 14, 2004.
5. М. Г. Григорян, "On the algorithm of greedy", Harmonic Analysis and Approximations, II, International conference, Abstract, 2003.
6. С. Л. Гогян, "Подсистема Хаара как квазигреди базис", Доклады НАН Армении, том 105, № 1, стр. 5 – 9, 2005.
7. S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", Studia Math., vol. 159(1), pp. 67 – 101, 2003.
8. J. Schauder, "Zur Theorie stetiger abbildungen in functionalraumen", Math. Zeit., vol. 26, pp. 47 – 65, 1927.