Известия НАН Армении. Математика, 40, № 3, 2005, 24–34

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ НА КОНЕЧНОМ ПРОМЕЖУТКЕ

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН Армении
E-mail : AniBarseghyan@mail.ru

Резюме. Работа посвящена исследованию интегрального уравнения, которое представляет собой интерес в математической физике :

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r K_0(x+t)f(t)dt,$$

где ядерные функции K и K_0 представимы в виде суперпозиций экспонент. Факторизационный метод совместно с уравнением В. Амбарцумяна, ассоциированный ядром K, сводит задачу к простым алгебраическим соотношениям.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральные уравнения свертки на конечных промежутках представляют значительный теоретический и прикладной интерес. Простейшим из них является уравнение вида

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt, \quad x \in [0, r], \tag{1.1}$$

где $K \in L_1(-r, r)$.

Методам решения различных классов уравнений (1.1) посвящено множество исследований, см. [1] – [7]. Недавно Н. Б. Енгибаряном ([10] – [13]) найден новый факторизационный метод, который в ряде случаев, приводит к эффективному численно-аналитическому решению уравнения (1.1). В настоящей работе этот

Работа выполнена при поддержке гранта А–823 МНТЦ.

метод обобщается на уравнения с суммарно-разностными ядрами, т.е. на уравнения вида

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r K_0(x+t)f(t)dt, \tag{1.2}$$

где $K \in L_1(-r,r)$ и $K_0 \in L_1(0,2r)$.

Основное внимание будет уделено случаю, когда ядерные функции K и K_0 представлены через экспоненты, в виде интегралов Стилтьеса :

$$K(\pm x) = \int_a^b e^{-xs}\,d\sigma_\pm(s), \quad x > 0, \quad 0 \le a < b \le \infty, \tag{1.3}$$

$$K_0(x) = \int_a^b e^{-xs}\,d\sigma_0(s). \tag{1.4}$$

Скалярными и векторными уравнениями (1.2) – (1.4) описывается ряд физических процессов, происходящих в однородном плоском слое толщины $r \le \infty$ с отражающей границей. В теории переноса излучения такие задачи возникают при расчёте ядерных реакторов, поля излучения в планетных атмосферах, в водных бассейнах и др. (см. [7]). Задачи Крамерса и Куэтта (см. [8]) в кинетической теории газов также сводятся к уравнению (1.2). В указанных задачах, ядро K_0 учитывает отражательную способность границы $x = 0$ среды.

Предлагаемый подход имеет некоторое сходство с работой [9], в которой применены результаты [5] к уравнению (1.2), (1.3) с симметрическим ядром.

§2. ФАКТОРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ (1.2)

2.1. Продолжение решений (1.2) на $(0,\infty)$. Пусть E_r, $r < \infty$, – одно из банаховых пространств $L_p(0,r)$, $1 \le p \le \infty$, или $C[0,r]$, и пусть E^+ – одно из пространств $L_p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$, или $C_0[0,\infty)$. Будем предполагать, что в (1.2) ядерные функции удовлетворяют условиям $K \in L_1(-\infty,\infty)$ и $K_0 \in L_1(0,\infty)$. Кроме того, допустим, что $g(x) = 0$, $x > r$.

Обозначив характеристические функции интервалов $[0,r]$ и (r,∞) соответственно через λ и $\bar\lambda$, представим уравнение (1.2) в виде

$$S(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)\lambda(t)S(t)\,dt + \int_0^\infty K_0(x+t)\lambda(t)S(t)dt, \tag{2.1}$$

Отметим, что уравнение (2.1) эквивалентно уравнению (1.2) в следующем смысле : если уравнение (1.2) имеет решение $f \in E_r$ при некотором $g \in E_r$, то её правая часть имеет смысл не только при $x \in [0,r]$, но и при $x > r$. Продолжение S этого решения на $(0,\infty)$ является решением уравнения (2.1), причём $S \in E_+$. С другой стороны, если уравнение (2.1) имеет решение $S \in E_+$ при некотором $g \in E_+$, то его сужение $f = S\,|_{[0,r]} \in E_r$ удовлетворяет уравнению (1.2).

2.2. Операторная форма уравнений (2.1) и (1.2). Через Ω обозначим класс интегральных операторов Винера-Хопфа

$$(\hat{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \quad K \in L_1(-\infty,\infty).$$

Далее, через Ω_0 обозначается класс операторов ганкелева типа с суммарными ядрами :

$$(\hat{K}_0 f)(x) = \int_0^\infty K_0(x+t)f(t)dt, \quad K_0 \in L_1(0,\infty).$$

В любом из пространств E_+ имеют место следующие оценки :

$$\|\hat{K}\|_{E_+} \le \mu = \int_{-\infty}^\infty |K(x)|dx, \quad \|\hat{K}_0\|_{E_+} \le \int_0^\infty |K_0(x)|dx.$$

Пространство Ω является прямой суммой алгебр Ω^- и Ω^+ верхних и нижних операторов свертки типа Вольтерра, т.е. если $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$, то

$$(\hat{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt, \quad V_+ \in L_1(0,\infty), \tag{2.2}$$

$$(\hat{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt, \quad V_- \in L_1(0,\infty), \tag{2.3}$$

Если операторы $I - \hat{V}_\pm$ (где I - единичный оператор) обратимы в E_+, то

$$(I - \hat{V}_\pm)^{-1} = I + \hat{\Phi}_\pm, \tag{2.4}$$

где $\hat{\Phi}_\pm \in \Omega^\pm$, т.е.

$$(\hat{\Phi}_+ f)(x) = \int_0^x \Phi_+(x-t)f(t)\,dt, \quad \Phi_+ \in L_1(0,\infty), \tag{2.5}$$

$$(\hat{\Phi}_- f)(x) = \int_x^\infty \Phi_-(t-x)f(t)\,dt, \quad \Phi_- \in L_1(0,\infty). \tag{2.6}$$

Резольвентные функции $\Phi_\pm$ удовлетворяют уравнению восстановления

$$\Phi_\pm(x) = V_\pm(x) + \int_0^x V_\pm(x-t)\Phi_\pm(t)\,dt, \tag{2.7}$$

Пусть Λ и $\bar{\Lambda}$ суть операторы умножения на характеристические функции λ и $\bar{\lambda}$, соответственно. Тогда $\Lambda + \bar{\Lambda} = I$. Кроме того, уравнение (2.1) можно записать в операторной форме

$$(I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda)S = g, \tag{2.8}$$

где $\hat{K} \in \Omega$ и $\hat{K}_0 \in \Omega_0$, а уравнение (1.2) имеет операторный вид

$$(I - \hat{K}_r - \hat{K}_r^0) f = g, \tag{2.9}$$

где

$$(\hat{K}_r f)(x) = \int_0^r K(x-t) f(t)\, dt, \quad K \in L_1(-r, r),$$

$$(\hat{K}_r^0 f)(x) = \int_0^r K_0(x+t) f(t)\, dt, \quad K_0 \in L_1(0, 2r).$$

Из эквивалентности уравнений (2.1) и (1.2) в отмеченном выше смысле следует :

Лемма 2.1. *Оператор $I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda$ обратим в E_+ тогда и только тогда, когда оператор $I - \hat{K}_r - \hat{K}_r^0$ обратим в E_r.*

2.3. Факторизация оператора $I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda$. Перейдем к построению одной факторизации для оператора $I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda$. Воспользуемся следующими правилами умножения операторов : если $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ и $\hat{V}_0 \in \Omega_0$, то $\hat{U}_0 = \hat{V}_- \hat{V}_0 \in \Omega_0$ и $\hat{W}_0 = \hat{V}_0 \hat{V}_+ \in \Omega_0$ (см. [10]). Отметим, что ядра операторов $\hat{U}_0$ и $\hat{W}_0$ определяются по формулам

$$U_0(x) = \int_0^\infty V_-(s) V_0(s+x)\, ds, \tag{2.10}$$

$$W_0(x) = \int_0^\infty V_0(s+x) V_+(s)\, ds. \tag{2.11}$$

Теперь предположим, что существует факторизация Винера–Хопфа :

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+), \tag{2.12}$$

где $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ суть операторы вида (2.2), (2.3), причем $I - \hat{V}_-$ обратим. Тогда, используя факторизацию (2.12), после некоторых преобразований будем иметь

$$I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda = I - \hat{K} + \hat{K}\bar{\Lambda} - \hat{K}_0\Lambda = (I - \hat{V}_-)[I - \hat{V}_+ + (I - \hat{V}_-)^{-1}\hat{K}\bar{\Lambda} - (I - \hat{V}_-)^{-1}\hat{K}_0\Lambda]. \tag{2.13}$$

Из (2.12) и (2.4) получаем

$$(I - \hat{V}_-)^{-1}\hat{K} = \hat{V}_+ + \hat{\Phi}_-,$$

поэтому, используя (2.13), приходим к разложению

$$I - \hat{K}\Lambda - \hat{K}_0\Lambda = (I - \hat{V}_-)[I - \hat{V}_+\Lambda + \hat{\Phi}_-\bar{\Lambda} - \hat{T}_0\Lambda], \tag{2.14}$$

где

$$\hat{T}_0 = (I - \hat{V}_-)^{-1}\hat{K}_0 = (I + \hat{\Phi}_-)\hat{K}_0 \in \Omega_0,$$

$$T_0(x) = K_0(x) + \int_0^\infty \Phi_-(t) K_0(x+t)\, dt. \tag{2.15}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть оператор $I-\hat{K}$ допускает факторизацию (2.12), причем оператор $I-\hat{V}_-$ обратим. Тогда имеет место факторизация (2.14), где $\hat{T}_0 \in \Omega_0$, $\hat{V}_\pm \in \Omega^\pm$ и имеет место формула (2.15).*

§3. ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ (2.14)

3.1. Сведение (2.8) к системе интегральных уравнений. В силу обратимости оператора $I-\hat{V}_-$, факторизация (2.14) сводит уравнение (2.1) к виду

$$(I-\hat{V}_+\Lambda+\hat{\Phi}_-\hat{\Lambda}-\hat{T}_0\Lambda)S=g_1, \tag{3.1}$$

где

$$g_1=(I-\hat{V}_-)^{-1}g=(I+\hat{\Phi}_-)g\in E^+$$

и $g_1(x)=0$ при $x>r$, а

$$g_1(x)=g(x)+\int_x^r \Phi_-(t-x)g(t)\,dt \qquad 0\le x\le r.$$

Перепишем уравнение (3.1) в раскрытом виде

$$S(x)=g_1(x)+\int_0^x V_+(x-t)\lambda(t)S(t)\,dt-$$

$$-\int_x^\infty \Phi_-(t-x)\bar{\lambda}(t)S(t)\,dt+\int_0^\infty T_0(x+t)\lambda(t)S(t)\,dt. \tag{3.2}$$

Введём обозначение $F(x)=S(x)$, $x>r$, и заметим, что при $x\le r$ из (3.1) следует

$$f(x)=g_1(x)+\int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt-\int_r^\infty \Phi_-(t-x)F(t)\,dt+\int_0^r T_0(x+t)f(t)\,dt, \tag{3.3}$$

а при $x>r$

$$F(x)=\int_0^r V_+(x-t)f(t)\,dt-\int_x^\infty \Phi_-(t-x)F(t)\,dt+\int_0^r T_0(x+t)f(t)\,dt. \tag{3.4}$$

В системе интегральных уравнений (3.3), (3.4) неизвестными функциями являются f и F.

Лемма 3.1. *Система (3.3), (3.4) эквивалентна уравнению (3.1), следовательно, и уравнению (1.2).*

Между функциями f и F имеется другое соотношение, более простое чем (3.4) :

$$F(x)=\int_0^r K(x-t)f(t)\,dt+\int_0^r K_0(x+t)f(t)\,dt, \quad x>r \tag{3.5}$$

которое прямо вытекает из исходного уравнения (1.2).

Лемма 3.2. *Системы (3.3), (3.4) и (3.3), (3.5) эквивалентны.*

Доказательство. Решая уравнение (3.4) относительно F, получаем

$$F(x) = \int_0^r V_+(x-t)f(t)\,dt + \int_0^r T_0(x+t)f(t)\,dt - \int_x^\infty V_-(t-x)dt \times$$

$$\times \int_0^r V_+(t-\tau)f(\tau)\,d\tau - \int_x^\infty V_-(t-x)\,dt \int_0^r T_0(t+\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{3.6}$$

Используя нелинейные уравнения факторизации Н. Енгибаряна (НУФ) (см. [10], [11]), заключаем, что факторизация (2.12) эквивалентна следующей системе нелинейных интегральных уравнений

$$V_\pm(x) = K(\pm x) + \int_0^\infty V_\mp(t)V_\pm(x+t)\,dt, \tag{3.7}$$

называемое НУФ для задачи (2.12).

После замены порядка интегрирования в (3.6), и учитывая первое из уравнений (3.7) и второе из уравнений (2.7), приходим к уравнению (3.5). Доказательство завершено.

Таким образом, решение исходного уравнения (1.2) сведено к решению системы (3.3), (3.5).

§4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ (3.3), (3.5) В СЛУЧАЕ ВПОЛНЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ $K(\pm x)$ И $K_0(x)$

4.1. Некоторые вспомогательные функции. В этом параграфе будем рассматривать систему (3.3), (3.5) в частном случае, когда функции $K(\pm x)$ и $K_0(x)$ представлены в виде суперпозиций экспонент (1.3) и (1.4), где $\sigma_\pm$ и σ_0 – некоторые неубывающие функции, удовлетворяющие условиям

$$\mu = \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma_+(s) + \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma_-(s) \le 1, \tag{4.1}$$

$$\mu_0 = \int_a^b \frac{1}{s}\,d\sigma_0(s) < +\infty. \tag{4.2}$$

Рассматриваемый случай представляет основной интерес в физической кинетике. Каждое из следующих двух условий обеспечивает обратимость оператора $I - \hat{V}_-$: $\mu < 1$ или $\mu = 1$ и $\nu_1 > 0$. Через ν_1 обозначим первый момент ядра K :

$$\nu_1 = \int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx = \nu_1^+ - \nu_1^-, \tag{4.3}$$

где $\nu_1^\pm = \int_a^b s^{-2}\,d\sigma_\pm(s)$, а интеграл для ν_1^- считается сходящимся.

В случае ядра (1.3), из (4.1) следует, что решение нелинейного уравнения факторизации (3.7) имеет вид

$$V_{\pm}(x) = \int_a^b e^{-xs}\varphi_{\pm}(s)d\sigma_{\pm}(s), \tag{4.4}$$

где $\varphi_{\pm}$ является каноническим решением уравнения В. Амбарцумяна (см. [11], [12]) :

$$\varphi_{\pm}(s) = 1 + \varphi_{\pm}(s)\int_a^b \frac{1}{s+p}\varphi_{\mp}(p)\, d\sigma_{\mp}(p). \tag{4.5}$$

Каноническим решением называется предел простых итераций с нулевым начальным приближением.

Из формул (4.4) и результатов работы [13] следует, что резольвентные функции $\Phi_{\pm}$, полученные из уравнений (2.7), допускают представление

$$\Phi_{\pm}(x) = \int_0^b e^{-xp}d\omega_{\pm}(p), \tag{4.6}$$

где $\omega_{\pm}$ – неубывающие функции и $\int_0^b p^{-1}d\omega_{\pm}(p) < +\infty$.

4.2. Преобразование системы (3.3), (3.5). Пусть

$$\alpha(s) = \int_0^r e^{-(r-t)s}f(t)\, dt, \quad \beta(s) = \int_r^\infty e^{-(t-r)s}F(t)\, dt, \quad \gamma(s) = \int_0^r e^{-ts}f(t)\, dt. \tag{4.7}$$

Нашей ближайшей целью является преобразование системы (3.3), (3.5) в систему относительно α, β, γ.

Подставляя выражения (4.6), (2.15), (1.3) и (1.4) функций Φ_-, T_0, K и K_0 в (3.3) и (3.5), получим

$$f(x) = g_1(x) + \int_0^x V_+(x-t)f(t)\,dt - \int_0^b e^{-(r-x)p}\beta(p)\,d\omega_-(p) +$$

$$+\int_a^b e^{-xs}\left[1+\int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{s+p}\right]\gamma(s)\,d\sigma_0(s), \tag{4.8}$$

$$F(x) = \int_a^b e^{-(x-r)s}\alpha(s)\,d\sigma_+(s) + \int_a^b e^{-xs}\gamma(s)\,d\sigma_0(s). \tag{4.9}$$

Тогда, решая уравнение (4.8) относительно f, получаем

$$f(x) = g_2(x) - \int_0^b U_1(x,p)\beta(p)\,d\omega_-(p) + \int_a^b U_2(x,s)\left[1+\int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{s+p}\right]\gamma(s)\,d\sigma_0(s), \tag{4.10}$$

где $g_2(x) = g_1(x) + \int_0^x \Phi_+(x-t)g_1(t)dt$ и

$$U_1(x,p) = e^{-(r-x)p}\left[1 + \int_0^x \Phi_+(t)e^{-tp}\,dt\right], \tag{4.11}$$

$$U_2(x,p) = e^{-xp}\left[1 + \int_0^x \Phi_+(t)e^{tp}\,dt\right]. \tag{4.12}$$

Умножая обе части уравнения (4.9) на $e^{-(x-r)s}$ и интегрируя по x от r до ∞, получаем следующее соотношение между функциями α, β и γ :

$$\beta(p) = \int_a^b \frac{\alpha(s)}{s+p}d\sigma_+(s) + \int_a^b \frac{e^{-rs}\gamma(s)}{s+p}d\sigma_0(s). \tag{4.13}$$

Умножая обе части уравнения (4.10) на $e^{-(r-x)s}$ и интегрируя по x от 0 до r, получаем второе соотношение между функциями α, β и γ :

$$\alpha(s) = \alpha^0(s) - \int_0^b W_1(s,p)\beta(p)\,d\omega_-(p) + \int_a^b W_2(s,q)\left[1 + \int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{p+q}\right]\gamma(q)\,d\sigma_0(q), \tag{4.14}$$

где $\alpha^0(s) = \int_0^r e^{-(r-t)s}g_2(t)\,dt$ и

$$W_i(s,\xi) = \int_0^r e^{-(r-t)s}U_i(t,\xi)dt, \quad i = 1,2. \tag{4.15}$$

Теперь, умножая обе части уравнения (4.10) на e^{-xs} и интегрируя по x от 0 до r, получаем еще одно соотношение между функциями β и γ :

$$\gamma(s) = \gamma^0(s) - \int_0^b W_3(s,p)\beta(p)\,d\omega_-(p) + \int_a^b W_4(s,q)\left[1 + \int_a^b \frac{d\omega_-(p)}{p+q}\right]\gamma(q)\,d\sigma_0(q), \tag{4.16}$$

где $\gamma^0(s) = \int_0^r e^{-ts}g_2(t)dt$ и

$$W_i(s,\xi) = \int_0^r e^{-ts}U_{i-2}(t,\xi)dt, \quad i = 3,4. \tag{4.17}$$

Из (4.11) и (4.12) получаем

$$W_1(s,p) = \frac{1}{s+p}\left[A(p) - e^{-rp}B(s)\right], \quad W_2(s,q) = \frac{1}{s-q}\left[B(q) - B(s)\right], \tag{4.18}$$

$$W_3(s,p) = \frac{1}{s-p}\left[e^{-rp}A(s) - e^{-rs}A(p)\right], \quad W_4(s,q) = \frac{1}{s+q}\left[A(s) - e^{-rs}B(q)\right], \tag{4.19}$$

где

$$A(p) = 1 + \int_0^r \Phi_+(t)e^{-tp}\,dt, \quad B(p) = e^{-rp}\left(1 + \int_0^r \Phi_+(t)e^{tp}\,dt\right).$$

Итак, получили замкнутую систему интегральных уравнений относительно α, β и γ. Все эти функции зависят от одной переменной. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Функции α, β, $\gamma \in C_0[0,\infty)$ определяются единственным образом системой (4.13), (4.14), (4.16). Решение уравнения (1.2), (1.3), (1.4) определяется по формуле (4.10).*

§5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

В этом параграфе вкратце опишем схему приближенного решения уравнения (1.2), (1.3), основанную на построениях предыдущих параграфов.

При численно-аналитическом решении уравнения (1.1) с ядром (1.3) применяется метод дискретных ординат (МДО) Чандрасекара : функции $\sigma_\pm(s)$ в представлениях (1.3) приближенно заменяются кусочно-постоянными функциями

$$\sigma_\pm(s) \approx \widetilde{\sigma}_\pm(s) = \sum_{k=1}^{n} a_k^\pm \theta(s - s_k), \tag{5.1}$$

где $a_k > 0$, $0 < s_1 < \cdots < s_n$, а θ – функция Хевисайда единичного скачка.

Прямое применение редукции (5.1) сводит исходное уравнение (1.2) к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$. Задача Коши для этой системы плохо поставлена (ее решение сводится к плохо обусловленным алгебраическим системам и др.). Кроме того, эта система дифференциальных уравнений обладает экспоненциально возрастающими и убывающими решениями, что сильно затрудняет или делает практически невозможным решение задачи классическими методами при больших значениях r.

Одним из основных достоинств построения факторизации (2.12) и резольвентных функций $\Phi_\pm$ методом уравнения Амбарцумяна является "устойчивая алгебраизация" задачи. Согласно (5.1), уравнение Амбарцумяна обращается в конечную, нелинейную алгебраическую систему с простой и устойчивой итерацией. Для полученного уравнения, представление (4.6) принимает вид

$$\Phi_\pm(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k^\pm \exp\left(-p_k^\pm x\right), \quad 0 < p_1^\pm < s_1 < \cdots < p_n^\pm < s_n,$$

и вычисление $p_k^\pm$ и $b_k^\pm$ сводится к некоторым алгебраическим процедурам.

Ниже покажем, что линейные уравнения, полученные в предыдущем параграфе, допускают аналогичную алгебраизацию.

Решение системы (4.13), (4.14), (4.16) основано на (5.1) и на замене ядра K_0 дискретной суммой

$$K_0(x) \approx \sum_{m=1}^{n} a_k^0 \exp\left(-s_k^0 x\right)$$

сводящая систему (4.13), (4.14), (4.16) к линейной алгебраической системе, которая легко решается итерациями. Например, уравнение (4.16) обращается в следующее :

$$\gamma_k = \gamma_k^0 - \sum_{m=1}^{n} h_{km}\beta_m + \sum_{m=1}^{n} h_{km}^0 \gamma_m,$$

где

$$\gamma_k^0 = \gamma^0(s_k^0), \quad \gamma_k = \gamma(s_k^0), \quad \beta_m = \beta(p_m^-),$$

$$h_{km} = W_3(s_k^0, p_m^-) b_m^-, \quad h_{km}^0 = W_4(s_k^0, s_m^0) a_m^0 \left[1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{s_m^0 + p_j^-} b_j^- \right].$$

Автор выражает благодарность профессору Н. Б. Енгибаряну за руководство работой и профессору А. Х. Хачатряну за полезные обсуждения.

Abstract. The paper is devoted to investigation of the integral equation that is of interest in mathematical physics :

$$f(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t) f(t)\, dt + \int_0^r K_0(x+t) f(t) dt,$$

where the kernel functions K and K_0 are represented as superpositions of exponentials. A factorization method in conjunction with V. Ambartsumian's equation associated with the kernel K reduce the problem to simple algebraic relations.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Амбарцумян, Научные Труды, том 1, Ереван, 1960 [Английский перевод : A Life in Astrophysics, Selected works by V. A. Ambartsumian, Allerton Press, New York, 1998].
2. С. Чандрасекар, Перенос Лучистой Энергии, ИЛ, Москва, 1953.
3. И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в Свертках и Проекционные Методы их Решения, Наука, Москва, 1971.
4. Л. А. Сахнович, "Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке", УМН, том 35, № 4, стр. 69 – 129, 1980.
5. J. Casti, R. Kalaba, Embedding Methods in Applied Mathematics, Addison Wesley, 1973.
6. Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, "Об одном интегральном уравнении с разностным ядром", Мат. Заметки, том 19, № 6, стр. 927 – 932, 1976.
7. В. В. Соболев, Рассеяние Света в Атмосферах Планет, Наука, Москва, 1972.
8. C. Cherchignani, Theory and Application of the Boltzmann Equation, Scottish Acad. Press, Edinburgh, 1975.
9. А. Х. Хачатрян, А. Н. Афян, "Об аналитическом и численном решении задач переноса излучения при наличии отражающей поверхности", жур. Выч. Мат. и Мат. Физики, том 418, стр. 1217 – 1228, 2001.

10. Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян, "О некоторых задачах факторизации для интегральных операторов типа свертки", Дифф. Уравнения, том 26, № 8, стр. 1442 – 1452, 1990.
11. Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян, "Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами", Мат. сборник, том 97(139), № 1(5), стр. 35 – 58, 1975.
12. Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, "Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения", Итоги Науки и Техники, том 22, "Математический Анализ", стр. 175 – 242, 1984.
13. Н. Б. Енгибарян, А. А. Погосян, "Об одном классе интегральных уравнений восстановления", Мат. Заметки, том 47, № 6, стр. 23 – 30, 1990.

Поступила 19 марта 2005