ОБОБЩЁННАЯ ЗАДАЧА ЛИТТЛВУДА

К. Л. Аветисян

Ереванский государственный университет

E-mail : avetkaren@ysu.am

Резюме. Для n -гармонических и голоморфных функций в единичном поликруге пространства $\mathbb{C}^n$ определено новое семейство g -функций типа Литтлвуда-Пэли и установлены связанные с ними L^p -неравенства. В недавней работе автора был получен положительный ответ на вопрос Литтлвуда о распространении L^p -неравенств на случай нескольких комплексных переменных. Настоящая статья, представляя собой дальнейшее обобщение в этом направлении, усиливает и упрощает результаты недавней работы автора.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $U^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$ – единичный поликруг пространства $\mathbb{C}^n$, и $T^n = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{C}^n : |\omega_j| = 1, 1 \leq j \leq n\}$ – остов поликруга U^n (т.е. n -мерный тор). В поликруге U^n рассмотрим n -гармонические функции, т.е. функции, гармонические по каждой переменной z_j в отдельности. g -функция Литтлвуда и Пэли [1] определяется формулой

$$g(f)(\vartheta) = \left(\int_0^1 (1-r) |f'(re^{i\vartheta})|^2 dr \right)^{1/2}, \quad \vartheta \in (-\pi, \pi), \quad (1)$$

где $f(z)$ – голоморфная функция в единичном круге U^1 . Один из основных результатов для этой функции является эквивалентность норм $\|g(f)\|_{L^p}$ и $\|f\|_{L^p}$ на единичной окружности при $p > 1$ (см. [1] и [2], Глава XIV). Аналогичный результат в верхнем полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ установлен Стейном [3] (Глава IV). Ряд исследователей, в частности Флетт [4], значительно расширили понятие g -функции в единичном круге с помощью дробной производной и применили это в теоремах о мультипликаторах. Литтлвуд [5] (стр. 43, Проблема 28) предположил справедливость L^p -неравенств для g -функции в случае двух комплексных

переменных и выразил желание обойтись без "плоских" комплексных методов. В работе автора [6], с помощью дробных производных Римана-Лиувилля D^α , были определены некоторые g -функции типа Литтлвуда-Пэли и установлены связанные с ними L^p -неравенства для n -гармонических функций в полнукруге. Этим был дан положительный ответ на вопрос Литтлвуда [5]. Вместе с тем, в работе [6] для некоторых L^p -неравенств с производными D^α приходилось довольствоваться малыми или целыми α . Это снижало применимость полученных L^p -неравенств работы [6].

Чтобы эффективно применить L^p -неравенства в теории весовых функциональных пространств, в настоящей работе построено новое семейство g -функций типа Литтлвуда-Пэли с помощью дробных производных Адамара $\mathcal{F}^\alpha$, а также Римана-Лиувилля D^α . Соответствующие L^p -неравенства с произвольными значениями мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ доказаны для n -гармонических функций в полнукруге с $p > 1$, а также для голоморфных функций с $p > 0$. Даны также некоторые приложения установленных L^p -неравенств.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Пусть

$$\Gamma^n = (0, 1)^n, \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \quad r \in \Gamma^n, \quad dr = dr_1 \cdots dr_n, \quad r\zeta = (r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n).$$

Через $\mathbb{Z}_+^n$ обозначим множество всех мультииндексов $m = (m_1, \dots, m_n)$ с неотрицательными целыми координатами $m_j \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, считая, что $q \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, положим

$$(1-r)^\alpha = \prod_{j=1}^n (1-r_j)^{\alpha_j}, \quad r^\alpha = \prod_{j=1}^n r_j^{\alpha_j}, \quad \Gamma(\alpha) = \prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^m = \left(\frac{\partial}{\partial r_1}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial r_n}\right)^{m_n}, \quad \alpha q + 1 = (\alpha_1 q + 1, \dots, \alpha_n q + 1).$$

Для функции $f(z) = f(r\omega)$ ($r \in \Gamma^n$, $\omega \in T^n$), заданной в U^n , через $\mathcal{F}^\alpha \equiv \mathcal{F}_r^\alpha$ обозначим оператор Адамара дробного интегродифференцирования относительно переменной $r \in \Gamma^n$:

$$\mathcal{F}^\alpha f(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\Gamma^n} \prod_{j=1}^n \left(\log \frac{1}{\eta_j}\right)^{\alpha_j-1} f(\eta z) d\eta,$$

$$\mathcal{F}^m f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r} \cdot r\right)^m f(z), \quad \mathcal{F}^\alpha f(z) = \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} \mathcal{F}^m f(z),$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$ и $1 \leq j \leq n$. Заметим, что свойства и некоторые эквивалентные определения одномерного оператора $\mathcal{F}^\alpha$ можно найти, например, в [7] и [4].

Если функция $u(z)$ n -гармонична (голоморфна), то таковой является также и функция $\mathcal{F}^\alpha u(z)$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$). Ясно, что для любого $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$,

$$\mathcal{F}^\alpha f = \mathcal{F}_{\tau_1}^{\alpha_1} \mathcal{F}_{\tau_2}^{\alpha_2} \dots \mathcal{F}_{\tau_n}^{\alpha_n} f, \quad (2)$$

где $\mathcal{F}_{\tau_j}^{\alpha_j}$ обозначает тот же оператор, действующий лишь по переменной τ_j .

В дальнейшем всюду, через $C(\alpha, \beta, \dots)$, c_α и т.п. будем обозначать положительные постоянные, зависящие от параметров α, β и т.д.. Для любого p ($1 \leq p \leq \infty$) через p' обозначим сопряженный индекс, т.е. $p' = p/(p-1)$, и все неравенства $A \leq B$ в формулировках теорем означают, что если B конечно, то и A конечно, и $A \leq B$.

Для заданной в U^n функции $f(z)$ и для значений параметров $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$) и $0 < q \leq \infty$, определим g -функцию типа Литтлвуда-Пэли следующим образом (сравни с [4], [6]) :

$$\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)(w) = \left(\int_{I^n} (1-\tau)^{\alpha q - 1} |\mathcal{F}^\alpha f(\tau w)|^q d\tau \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

$$\mathcal{G}_{\infty,\alpha}(f)(w) = \operatorname{ess\,sup}_{\tau \in I^n} (1-\tau)^\alpha |\mathcal{F}^\alpha f(\tau w)|, \quad q = \infty.$$

При $q = 2$ и $\alpha = (1, 1, \dots, 1)$ функция $\mathcal{G}_{q,\alpha}(f)$ соответствует классической g -функции (1). Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p < \infty$ и $2 \leq q < \infty$ - произвольные числа и $u(z)$ - интеграл Пуассона некоторой функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда

$$\|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}. \quad (3)$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ голоморфна в U^n , то для любого $p > 0$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{H^p}, \quad (4)$$

где H^p - голоморфный класс Харди в поликруге.

Теорема 2. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p < \infty$ и $0 < q \leq 2$ - произвольные числа и $u(z)$ - n -гармоническая функция в U^n такая, что $\mathcal{G}_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функции $f \in L^p(T^n)$, причём имеет место неравенство

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|\mathcal{G}_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Приведем также некоторые аналоги Теорем 1 и 2, используя дробное интегрирование Римана-Лиувилля:

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} f(\eta z) d\eta, \quad D^\alpha f(z) = D^{-(m-\alpha)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^m f(z),$$

$$D^{-\alpha} f(z) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(z), \quad D^\alpha f(z) = D^\alpha \{r^\alpha f(z)\}, \quad z = r\omega \in U^n,$$

где $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$, $1 \leq j \leq n$. Соответствующая g -функция типа Литтлвуда-Пэли будет иметь вид

$$g_{q,\alpha}(f)(\omega) = \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q-1} |D^\alpha f(r\omega)|^q dr \right)^{1/q}, \quad 0 < q < \infty,$$

$$g_{\infty,\alpha}(f)(\omega) = \operatorname{ess\,sup}_{r \in I^n} (1-r)^\alpha |D^\alpha f(r\omega)|, \quad q = \infty.$$

Теорема 3. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p < \infty$ и $2 \leq q < \infty$ - произвольные числа и $u(z)$ - интеграл Пуассона функции $f \in L^p(T^n)$. Тогда

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|f\|_{L^p}.$$

Если, к тому же, функция $u(z)$ - голоморфна в U^n , то для любого $p > 0$ справедливо неравенство

$$\|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|u\|_{H^p}.$$

Теорема 4. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p < \infty$ и $0 < q \leq 2$ - произвольные числа и $u(z)$ - n -гармоническая функция в U^n такая, что $g_{q,\alpha}(u) \in L^p(T^n)$. Тогда $u(z)$ является интегралом Пуассона своей граничной функцией $f \in L^p(T^n)$, причём имеет место неравенство

$$\|f\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \|g_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Отметим, что для функций, голоморфных в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$, аналоги приведённых выше Теорем 1 - 4 содержатся в [8]. Несмотря на очевидное сходство Теорем 1-2 и 3-4, имеются существенные различия в их доказательствах (для оператора Адамара имеет место полугрупповая формула $\mathcal{F}^{\alpha+\beta} = \mathcal{F}^\alpha \mathcal{F}^\beta$, которая не имеет места для оператора Римана-Лиувилля D^α).

В качестве приложения к Теоремам 1 - 4, приведём следующие теоремы вложения. Обозначим интегральные средние через

$$M_p(f; r) = \|f(r \cdot)\|_{L^p(T^n, d\mu_n)}, \quad r = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma^n,$$

где $d\mu_n$ - мера Лебега на T^n , а $\mathcal{J}^\alpha$ обозначает любой из операторов $\mathcal{F}^\alpha$ и $\mathcal{D}^\alpha$.

Теорема 5. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p \leq q \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ и $p \leq p_0 \leq \infty$ — произвольные числа. Тогда

$$\left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(\mathcal{J}^\alpha u; r) dr \right)^{1/q} \leq C \|u\|_{h^p}, \quad (5)$$

$$\left(\int_{I^n} (1-r)^{(\alpha + 1/p - 1/p_0)q - 1} M_{p_0}^q(\mathcal{J}^\alpha u; r) dr \right)^{1/q} \leq C \|u\|_{h^p}. \quad (6)$$

Если $u \in H^p$ — голоморфная функция, то неравенства (5) и (6) справедливы для всех $p > 0$.

Теорема 6. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p < \infty$, $0 < q \leq 2$ и $q \leq p$ — произвольные числа. Тогда

$$\|\mathcal{J}^{-\alpha} u\|_{h^p} \leq C \left(\int_{I^n} (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(u; r) dr \right)^{1/q}.$$

§3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Напомним, что ядро Пуассона в полукруге U^n задаётся формулой

$$P(z, \zeta) = \prod_{j=1}^n P(z_j, \zeta_j) = \prod_{j=1}^n \frac{1 - |z_j|^2}{|\zeta_j - z_j|^2}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.$$

Лемма 1. Если $\alpha_j \geq 0$ ($1 \leq j \leq n$), то

$$|\mathcal{F}^\alpha P(z, \zeta)| \leq C(\alpha, n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{|\zeta_j - z_j|^{\alpha_j + 1}}, \quad z \in U^n, \quad \zeta \in T^n.$$

Доказательство получается прямой оценкой.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ — n -гармоническая функция в U^n и $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$) — произвольные числа. Тогда

$$|\mathcal{F}^\alpha f(z)| \leq C(p, q, \alpha, n) \|G_{q, \alpha}(f)\|_{L^p} \prod_{j=1}^n \frac{1}{(1 - |z_j|)^{\alpha_j + 1/p}}, \quad z \in U^n.$$

Доказательство опускаем, поскольку оно довольно стандартно и сводится к неравенству Гельдера и n -субгармоническому поведению функции $|\mathcal{F}^\alpha f|^p$ ($p > 0$).

Лемма 3. Пусть $f(z)$ — n -гармоническая функция в U^n и $1 \leq q < \infty$, $\alpha_j, \beta_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$) — произвольные числа. Тогда

$$\mathcal{G}_{q,\beta}(f)(w) \leq C(\alpha, \beta, q, n) \mathcal{G}_{q,\beta+\alpha}(f)(w), \quad w \in T^n.$$

Доказательство получается n -кратным повторением одномерного варианта этого же неравенства (см. [4]). Отметим, что в таком виде Лемма 3 перестаёт быть верной в случае замены функции $\mathcal{G}_{q,\beta}$ на $g_{q,\beta}$.

Для любого фиксированного δ ($0 < \delta < 1$) и $\zeta = e^{i\theta} \in T^1$ рассмотрим стандартную область $\Gamma_\delta(\zeta) \equiv \Gamma_\delta(\vartheta)$ в единичном круге U^1 , ограниченную двумя касательными к окружности $|z| = \delta$, проведёнными из точки $\zeta = e^{i\theta}$, и наибольшей дугой окружности $|z| = \delta$. При фиксированных δ_j , $0 < \delta_j < 1$ ($1 \leq j \leq n$) и $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in T^n$ определим $\Gamma_\delta(\zeta) = \Gamma_{\delta_1}(\zeta_1) \times \dots \times \Gamma_{\delta_n}(\zeta_n)$.

Лемма 4. Пусть $\alpha_j > 0$, $\delta_j > 0$, $1 \leq j \leq n$ и $f(z)$ — n -гармоническая функция в U^n . Тогда для её некасательной максимальной функции

$$f_\delta^*(\zeta) = \sup\{|f(z)|; z \in \Gamma_\delta(\zeta)\}, \quad \zeta \in T^n$$

справедлива оценка

$$|\mathcal{F}^\alpha f(\tau w)| \leq C(\alpha, \delta, n) \frac{f_\delta^*(w)}{(1-\tau)^\alpha}, \quad z = \tau w \in U^n.$$

Доказательство. Обозначим через $B = B_r$ полукруг с центром в точке $z = \tau w \in U^n$, с радиусом $(\delta_1(1-\tau_1)/2, \dots, \delta_n(1-\tau_n)/2)$. Тогда имеем $B \subset \Gamma_\delta(w)$. Дифференцируя представление Пуассона функции f в B посредством оператора $\mathcal{F}^\alpha$ и используя известные оценки ядра Пуассона, получаем требуемое неравенство.

§4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Для n -гармонической функции $u(z)$ в U^n введём следующий вариант интеграла площадей Лузинна :

$$S_\delta(u)(\zeta) = \left(\int_{\Gamma_\delta(\zeta)} |\mathcal{F}^1 u(z)|^2 d\tau_{2n}(z) \right)^{1/2}, \quad \zeta \in T^n,$$

где τ_{2n} — мера Лебега на полукруге U^n . Следующая лемма, доказанная Марцинкевичем и Зигмундом ([2], стр. 315) в единичном круге для $k = 1$ и классической g -функции (1).

Лемма 5. Пусть $u(z)$ — n -гармоническая функция в U^n , $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ($k_j \geq 1$) и $0 < \delta_j < 1$ ($1 \leq j \leq n$). Тогда

$$S_{2,k}(u)(\zeta) \leq C(n, k, \delta) S_\delta(u)(\zeta), \quad \zeta \in T^n.$$

Доказательство. Вначале, докажем лемму для случая $n = 1$, т.е. для единичного круга U^1 . Для этого, заметим, что если $z = re^{i\theta} \in U^1$ фиксировано, то из интегральной формулы Пуассона в круге

$$B = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - z| < \delta(1 - r)/2\} \subset \Gamma_\delta(e^{i\theta}) \equiv \Gamma_\delta(\theta)$$

следует, что

$$|\mathcal{F}^k u(re^{i\theta})|^2 \leq \frac{C(k)}{|B|(1-r)^{2(k-1)}} \iint_B |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho \, d\rho \, dt,$$

где $|B|$ — площадь круга B . Ясно, что

$$C'_\delta(1-r) < 1 - \rho < C''_\delta(1-r), \quad \rho e^{it} \in B.$$

Следовательно

$$(1-r)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k, \delta) \iint_E |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho \, d\rho \, dt}{1-\rho}, \quad (7)$$

Теперь если $0 \leq r \leq \delta/(2 + \delta)$, то расширим область интегрирования в (7) до круга

$$E \equiv E(r, \delta) = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < r_2 \equiv r + \delta(1 - r)/2\}.$$

Легко видеть, что $E(r, \delta) \subset \Gamma_\delta(\theta)$, и поэтому

$$(1-r)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(re^{i\theta})|^2 \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} \chi_{(0, r_2)}(\rho) |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho \, d\rho \, dt}{1-\rho},$$

где через $\chi_{(0, r_2)}$ обозначена характеристическая функция интервала $(0, r_2)$. Интегрирование по r и оценка внутреннего интеграла приводят к

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(re^{i\theta})|^2 dr \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} \left(\int_0^1 \chi_{(0, r_2)}(\rho) dr \right) \times \\ \times |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho \, d\rho \, dt}{1-\rho} \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\theta)} |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho \, d\rho \, dt.$$

Если $\delta/(2+\delta) < r < 1$, то расширим область интегрирования в (7) до кольцевого сектора, стороны которого касаются круга B , т.е.

$$(1-r)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 \leq C(k, \delta) \int_{r_1}^{r_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}, \quad (8)$$

где

$$r_{1,2} = r \mp \frac{\delta(1-r)}{2}, \quad \vartheta_{1,2} = \vartheta \mp \arcsin \frac{\delta(1-r)}{2r}.$$

Тогда, интегрируя (8) по r , получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (1-r)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 dr \leq \\ & \leq C(k, \delta) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^1 \chi_{(r_1, r_2)}(\rho) \chi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}(t) dr \right) |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \frac{\rho d\rho dt}{1-\rho}. \end{aligned} \quad (9)$$

Остаётся должным образом оценить внутренний интеграл. Имеем

$$\chi_{(r_1, r_2)}(\rho) \chi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } r_1 < \rho < r_2, \vartheta_1 < t < \vartheta_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Условие $r_1 < \rho < r_2$ равносильно условию $\rho_1 < r < \rho_2$, где $\rho_{1,2} = (\rho \mp \delta/2)/(1 \mp \delta/2)$. Кроме того, $\vartheta_1 < t < \vartheta_2$ равносильно условию

$$r < r_0 \equiv \frac{1}{1 + (2/\delta) \sin |t - \vartheta|}.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \chi_{(r_1, r_2)}(\rho) \chi_{(\vartheta_1, \vartheta_2)}(t) dr = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \chi_{(0, r_0)}(r) dr \leq \begin{cases} \rho_2 - \rho_1 & \text{если } \rho_1 < r_0 < 1, \\ 0 & \text{если } 0 < r_0 \leq \rho_1. \end{cases}$$

Определим множество $G_\delta = \{\xi = \rho e^{it} \in U^1 : \rho_1 < r_0\}$ и посчитаем $\rho_2 - \rho_1 = C_\delta(1 - \rho)$. После подстановки в (9), получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(re^{i\vartheta})|^2 dr \leq C(k, \delta) \iint_{G_\delta} |\mathcal{F}^1 u(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt. \quad (10)$$

Осталось доказать вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\vartheta)$. Пусть $\xi = \rho e^{it} \in G_\delta$ и $\delta \leq \rho < 1$. Тогда множество $\Gamma_\delta(\vartheta) \setminus \{|\xi| < \delta\}$ характеризуется следующими тремя условиями:

$$\delta \leq \rho < 1, \quad |t| = |\arg \xi| < \arccos \delta, \quad |\arg(1 - \xi)| < \arcsin \delta. \quad (11)$$

В то же время, множество G_δ определяется условием $\rho_1 < r_0$ или

$$\sin |t| < \frac{\delta}{2} \frac{1-\rho}{\rho - \delta/2}.$$

Последние два условия в (11) следуют из оценок

$$\sin |t| < \frac{\delta}{2} \frac{1-\rho}{\rho-\delta/2} \leq 1-\delta < \sqrt{1-\delta^2},$$

$$\sin |t| < \frac{\delta}{2} \frac{1-\rho}{\rho-\delta/2} \leq \frac{\delta}{\rho} \sqrt{1-2\rho \cos t + \rho^2}.$$

Вложение $G_\delta \subset \Gamma_\delta(\vartheta)$ доказано. Таким образом, из (10) получаем требуемое неравенство для $n = 1$:

$$\int_0^1 (1-\tau)^{2k-1} |\mathcal{F}^k u(\tau e^{i\vartheta})|^2 d\tau \leq C(k, \delta) \iint_{\Gamma_\delta(\vartheta)} |\mathcal{F}^1 u(\xi)|^2 dm_2(\xi). \quad (12)$$

Общий случай $n > 1$ получается n -кратным применением (12) с использованием разложения (2). Лемма 5 доказана.

Доказательство Теоремы 1. Сначала докажем теорему для $\alpha_j \geq 1$. По Лемме 1,

$$|\mathcal{F}^\alpha u(z)| \leq \int_{T^n} |\mathcal{F}^\alpha P(z, \zeta)| |f(\zeta)| dm_n(\zeta) \leq \frac{C(\alpha, n)}{(1-|z|)^\alpha} \int_{T^n} P(z, \zeta) |f(\zeta)| dm_n(\zeta).$$

Отсюда получаем поточечную оценку через некасательную максимальную функцию u_j^* :

$$\mathcal{G}_{\infty, \alpha}(u)(w) \leq C(\alpha, n) \sup_{r \in I^n} \int_{T^n} P(rw, \zeta) |f(\zeta)| dm_n(\zeta) \leq C(\alpha, n) u_j^*(w), \quad w \in T^n.$$

где $0 < \delta_j < 1$ ($1 \leq j \leq n$) – некоторые числа. Теперь будем считать, что функция $u(z)$ принадлежит голоморфному классу Харди H^p ($0 < p < \infty$), либо n -гармоническому классу h^p ($1 < p < \infty$) и используя максимальную теорему Зигмунда [9]

$$\|u_j^*\|_{L^p} \leq C \|u\|_{H^p} \quad (13)$$

получим

$$\|\mathcal{G}_{\infty, \alpha}(u)\|_{L^p} \leq C \|u\|_{H^p}. \quad (14)$$

С другой стороны, последовательно применяя Лемму 5, теорему Ганди-Стейна [10] об эквивалентности L^p -норм функций $S_\delta(u)$ и u_j^* , а затем вновь неравенство (13), получаем оценку

$$\|\mathcal{G}_{2, \alpha}(u)\|_{L^p} \leq C \|S_\delta(u)\|_{L^p} \leq C \|u_j^*\|_{L^p} \leq C \|u\|_{H^p}. \quad (15)$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса-Торина для квазинормированных пространств со смешанной нормой (см. [11], стр. 316 и [12]), неравенства (14) и (15) влекут (3) и (4) для всех q ($2 \leq q \leq \infty$) и $\alpha_j \geq 1$.

В общем случае $m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$, $m_j \in \mathbb{Z}_+$ ($1 \leq j \leq n$) представим производную $\mathcal{F}^\alpha$ в виде $\mathcal{F}^\alpha u = \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} \mathcal{F}^m u$. Ввиду Леммы 3, это позволяет свести оценку к выше рассмотренному случаю целых $\alpha_j \geq 1$. Интегрирование неравенства $|\mathcal{F}^\alpha u| \leq \mathcal{F}^{-(m-\alpha)} |\mathcal{F}^m u|$ с q -ой степенью и мерой $(1-r)^{\alpha q - 1} dr$ на $(0, 1)$, а затем на окружности T^1 с p -ой степенью, приводит к (3) – (4).

Доказательство Теоремы 2. Ввиду Леммы 3, достаточно доказать теорему лишь для $0 < \alpha_j < 1$. Вначале положим $1 < q \leq 2$. Для произвольного фиксированного $r \in I^n$ рассмотрим линейный функционал на $L^{p'}(T^n)$, порождённый функцией $u(z)$:

$$F_u(v) = \int_{T^n} u(rw) v(w) dm_n(w), \quad v(w) \in L^{p'}(T^n).$$

Пусть $v(rw)$ – интеграл Пуассона функции $v(w)$, и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – малый положительный мультииндекс такой, что $0 < \alpha_j + \gamma_j < 1$. Тогда используя тождества $\mathcal{F}_r^\alpha u(\eta rw) = \mathcal{F}_\eta^\alpha u(\eta rw)$ и $\mathcal{F}_r^{-\alpha-\gamma} \mathcal{F}_r^{\alpha+\gamma} u = u$, будем иметь

$$\begin{aligned} F_u(v) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + \gamma)} \int_{I^n} \prod_{j=1}^n \left(\log \frac{1}{\eta_j} \right)^{\alpha_j + \gamma_j - 1} \left[\int_{T^n} v(w) \mathcal{F}_\eta^\alpha \mathcal{F}_r^\gamma u(\eta rw) dm_n(w) \right] d\eta = \\ &= C \int_{I^n} \prod_{j=1}^n \left(\log \frac{1}{\eta_j} \right)^{\alpha_j + \gamma_j - 1} \left[\int_{T^n} \mathcal{F}_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta} \zeta) \mathcal{F}_r^\gamma v(\sqrt{\eta} r \zeta) dm_n(\zeta) \right] d\eta = \\ &= C \int_{T^n} \left[\int_{I^n} \prod_{j=1}^n \left(\log \frac{1}{\eta_j} \right)^{\alpha_j + \gamma_j - 1} \mathcal{F}_\eta^\alpha u(\sqrt{\eta} \zeta) \mathcal{F}_r^\gamma v(\sqrt{\eta} r \zeta) d\eta \right] dm_n(\zeta). \end{aligned}$$

Далее, обозначая

$$h_{q', \gamma}(r \zeta) = \left(\int_{I^n} (1 - \eta)^{\gamma q' - 1} |\mathcal{F}_r^\gamma v(\sqrt{\eta} r \zeta)|^{q'} d\eta \right)^{1/q'},$$

и дважды применяя неравенство Гёльдера, а затем Теорему 1, получаем

$$\begin{aligned} |F_u(v)| &\leq C \int_{T^n} \mathcal{G}_{q, \alpha}(u)(\zeta) h_{q', \gamma}(r \zeta) dm_n(\zeta) \leq \\ &\leq C \|\mathcal{G}_{q, \alpha}(u)\|_{L^q} \|h_{q', \gamma}(r \zeta)\|_{L^{q'}(T^n)} \leq C(p, q, \alpha, \gamma, n) \|\mathcal{G}_{q, \alpha}(u)\|_{L^q} \|v\|_{L^{p'}(T^n)}. \end{aligned}$$

В силу двойственности $(L^p)^\circ = L^q$ будем иметь

$$\|u(\tau w)\|_{L^p(T^n)} = \sup\{|F_u(v)|; \|v\|_{L^q} = 1\} \leq C \|G_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}.$$

Теперь положим $0 < q < 1$ (при $q = 1$ утверждение очевидно). По Лемме 4

$$\begin{aligned} |u(\tau w)| &\leq \frac{1}{\prod_{j=1}^n \Gamma(\alpha_j)} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha-1} |\mathcal{F}^\alpha u(\eta \tau w)| d\eta \leq \\ &\leq C(\alpha, \delta, n) (u_\delta^*(w))^{1-q} \int_{I^n} (1-\eta)^{\alpha q-1} |\mathcal{F}^\alpha u(\eta \tau w)|^q d\eta, \end{aligned}$$

где $u_\delta^*(w)$ — некасательная максимальная функция. Далее, применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\|u(\tau w)\|_{L^p(T^n)}^p \leq C \|u_\delta^*\|_{L^p}^{p(1-q)} \|G_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q.$$

Следовательно, в силу неравенства (13)

$$\|f\|_{L^p} = \|u(\tau w)\|_{L^p(T^n)} \leq C \|u_\delta^*\|_{L^p}^{1-q} \|G_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q \leq C \|f\|_{L^p}^{1-q} \|G_{q,\alpha}(u)\|_{L^p}^q.$$

Доказательство Теоремы 2 завершено.

Следствие. Пусть $\alpha_j > 0$ ($1 \leq j \leq n$), $1 < p < \infty$ и $0 < q \leq 2$ — произвольные числа и $u(z)$ — n -гармоническая функция в U^n . Тогда

$$\|\mathcal{F}^{-\alpha} u\|_{L^p} \leq C(p, q, \alpha, n) \left\| \|(1-\tau)^\alpha u\|_{L^q(d\tau/(1-\tau))} \right\|_{L^p(T^n)}. \quad (16)$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству Теоремы 2 с той лишь разницей, что вместо функционала F_u следует рассмотреть функционал

$$\Phi_u(v) = \int_{T^n} \mathcal{F}^{-\alpha} |u(\tau w)| v(w) dm_\alpha(w), \quad v(w) \in L^q(T^n).$$

Теперь вкратце приведём доказательства Теорем 3 — 6.

Доказательство Теоремы 3. Пусть n -гармоничная (или голоморфная) функция $u(z)$ принадлежит классу h^p (или H^p). Для заданных чисел $\alpha_j > 0$, $m \in \mathbb{Z}_+^n$ ($m_j - 1 < \alpha_j \leq m_j$, $1 \leq j \leq n$), и для каждого $j \in [1, n]$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{r_j}^{\alpha_j} u &= D_{r_j}^{\alpha_j} \{r_j^{\alpha_j} u\} = D_{r_j}^{-(m_j-\alpha_j)} \left(\frac{\partial}{\partial r_j} \right)^{m_j} \{r_j^{\alpha_j} u\} = \\ &= r_j^{m_j-\alpha_j} \mathcal{D}_{r_j}^{-(m_j-\alpha_j)} \left\{ r_j^{\alpha_j} \frac{\partial^{m_j} u}{\partial r_j^{m_j}} + \text{L.O.T. (слагаемые низшего порядка)} \right\}. \end{aligned}$$

Старший член этой суммы можно записать в виде

$$r_j^{m_j} D_{r_j}^{-(m_j - \alpha_j)} D_{r_j}^{m_j} u = r_j^{\alpha_j} D_{r_j}^{\alpha_j} u.$$

Поэтому приходим к оценке, доказанной в [6]:

$$\left\| \left\| (1-r)^{\alpha} r^{\alpha} D^{\alpha} u \right\|_{L^p(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \leq C \|u\|_{h^p}.$$

Доказательство Теоремы 4. Достаточно вспомнить определение дробных интегралов и применить неравенство (16):

$$\|D^{-\alpha} u\|_{h^p} \leq C \|J^{-\alpha} u\|_{h^p} \leq C \left\| \left\| (1-r)^{\alpha} u \right\|_{L^p(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)}.$$

Доказательство Теоремы 5. Согласно интегральному неравенству Минковского и Теоремам 1 и 3 имеем

$$\left\| (1-r)^{\alpha} M_p(J^{\alpha} u; r) \right\|_{L^p(dr/(1-r))} \leq \left\| \left\| (1-r)^{\alpha} J^{\alpha} u \right\|_{L^p(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \leq C \|u\|_{h^p}.$$

Теперь неравенство (6) следует из (5) с применением вложения (см. [13])

$$\left\| (1-r)^{\alpha+1/p-1/p_0} M_{p_0}(f; r) \right\|_{L^p(dr/(1-r))} \leq C \left\| (1-r)^{\alpha} M_p(f; r) \right\|_{L^p(dr/(1-r))}.$$

Доказательство Теоремы 6. В силу неравенства Минковского и Теорем 2 и 4, получаем

$$\|J^{-\alpha} u\|_{h^p} \leq C \left\| \left\| (1-r)^{\alpha} u \right\|_{L^p(dr/(1-r))} \right\|_{L^p(T^n)} \leq C \left\| (1-r)^{\alpha} M_p(u; r) \right\|_{L^p(dr/(1-r))}.$$

Abstract. A new family of Littlewood-Paley type g -functions is defined and the related L^p -inequalities are proved for n -harmonic and holomorphic functions on the unit polydisc of $\mathbb{C}^n$. The paper generalizes and improves the results of author's recent work, that gave a positive answer to Littlewood's question on extension of L^p -inequalities to the case of several complex variables.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. E. Littlewood, R. E. A. C. Paley, "Theorems on Fourier series and power series (I)", J. London Math. Soc., vol. 6, pp. 230 - 233, 1931; (II), Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 42, pp. 52 - 89, 1936.
2. А. Зигмунд, Тригонометрические Ряды, том 2, Мир, Москва, 1965.

3. И. М. Стейн, Сиггулярные Интегралы и Дифференциальные свойства Функций, Мир, Москва, 1973.
4. T. M. Flett, "Mean values of power series", Pacific J. Math., vol. 25, pp. 463 - 494, 1968.
5. J. E. Littlewood, Some Problems in Real and Complex Analysis, Raytheon Education, Massachusetts, 1968.
6. К. Л. Аветисян, "Неравенства типа Литтлвуда-Пэли для n -гармонических функций в полукруге", Мат. Заметки, том 75, № 4, стр. 483 - 492, 2004.
7. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, Интегралы и Производные Дробного Порядка и Некоторые Их Применения, Наука и Техника, Минск, 1987.
8. J. M. Ortega, J. Fabrega, "Holomorphic Triebel-Lizorkin spaces", J. Funct. Anal., vol. 151, pp. 177 - 212, 1997.
9. A. Zygmund, "On the boundary values of functions of several complex variables (I)", Fund. Math., vol. 36, pp. 207 - 235, 1949.
10. R. Gundy, E. M. Stein, " H^p theory for the poly-disc", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 76, No. 3, pp. 1026 - 1029, 1979.
11. A. Benedek, R. Pansone, "The spaces L^p with mixed norm", Duke Math. J., vol. 28, pp. 301 - 324, 1961.
12. T. Holmstedt, "Interpolation of quasi-normed spaces", Math. Scand., vol. 26, pp. 177 - 199, 1970.
13. К. Л. Аветисян, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n -harmonic mixed norm spaces on the polydisc", J. Math. Anal. Appl., vol. 291, no. 2, pp. 727 - 740, 2004.

Поступила 29 мая 2005