Известия НАН Армении. Математика, 40, № 2, 2005, 61-70

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА–ЛИУВИЛЛЯ

Т. В. Маркарян и В. Н. Маркарян

Институт математики НАН Армении

Резюме. В работе исследуются некоторые алгебраические свойства обобщенных пространств Соболева $H(\mathfrak{R})$, порожденных многогранником $\mathfrak{R}$. В частности, найдено необходимое и достаточное условие для того, чтобы произведение слабо сходящихся к нулю последовательностей из пространства $H(\mathfrak{R})$ сильно сходилось к нулю.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ n-мерное евклидово пространство, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_+ \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, n\}$ и $\mathbb{R}^n_0 \equiv \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1, \ldots, \xi_n \neq 0\}$. Для точек $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\nu \in R^n_+$ обозначим

$$||\xi|| = (\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2)^{1/2}, \quad |\xi|^\nu = |\xi_1|^{\nu_1} \cdots |\xi_n|^{\nu_n}, \quad (\xi, \nu) = \sum_{j=1}^n \xi_j \nu_j$$

и

$$\prod(\nu) = \Big\{\mu \in \mathbb{R}^n_+ : \mu \neq \nu,\ \mu \neq \{0\} = (0, \ldots, 0),$$

$$\text{для всякого } j\ (1 \leq j \leq n) \text{ либо } \mu_j = \nu_j, \text{ либо } \mu_j = 0\Big\}.$$

Определение 1. (см. [1], Определение 10.1.1). Неотрицательная функция h называется *медленно растущей весовой функцией*, если

$$h(\xi + \eta) \leq ch(\xi)(1 + ||\eta||)^N, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

для некоторых чисел $c > 0$ и $N \in R^1$.

Известно (см. [1], стр. 10), что если h – медленно растующая весовая функция, то такими же являются функции

$$M_h(\xi) \equiv \sup_{\eta \in R^n} \frac{h(\xi + \eta)}{h(\eta)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{M_h(\xi)}.$$

Определение 2. (см. [2], [3]). *Характеристическим многогранником* конечного набора A точек из $\mathbb{R}^n_+$ называется минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(A)$, содержащий множество $A \cup \{0\}$.

В дальнейшем будем предполагать, что $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^n_+$ есть характеристический многогранник некоторого конечного набора точек из $\mathbb{R}^n_+$.

Определение 3. (см. [2], [3]) Многогранник $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^n_+$ называется *полным*, если нуль является вершиной $\mathfrak{R}$, и каждая ось координат содержит вершину, отличную от нуля.

Пусть $\mathfrak{R}$ – полный многогранник, тогда через $\mathfrak{R}^0$ обозначим множество всех его вершин и положим

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) \equiv \sum_{\nu \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\nu.$$

Очевидно, $\mathfrak{R}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества $\mathfrak{R}^0$ и $h_{\mathfrak{R}}(\xi) \to \infty$ при $\|\xi\| \to \infty$ (для полного многогранника $\mathfrak{R}$).

С любым полным многогранником $\mathfrak{R}$ с вершинами в $\mathbb{R}^n_+$ связываем множество пар $M \equiv \{(\lambda^j, d_j)\}_1^r$, где $\lambda^j \in \mathbb{R}^n$ и $d_j > 0$ $(j = 1, \ldots, r < +\infty)$ такое, что $\nu \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда $\nu \in R^n_+$ и $(\lambda^j, \nu) \le d_j$ $(j = 1, \ldots, r)$. Предположим, что множество M состоит из минимального числа таких пар. Для этого достаточно взять в качестве $\{\lambda^j\}$ множество внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathfrak{R}$.

Определение 4. (см. [3]). Полный многогранник $\mathfrak{R}$ называется *правильным*, если $\lambda^j \in \mathbb{R}^n_+$ и $d_j > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими предложениями (см. [2], гл. 4, §2 и [3], [4]).

Предложение 1. *Если многогранник $\mathfrak{R}$ полный, то*

1) существуют положительные числа ε и c такие, что

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi) \ge c\|\xi\|^\varepsilon, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

2) существует постоянная c, такая, что при любом $\nu \in \mathfrak{R}$

$$|\xi|^\nu \le c h_{\mathfrak{R}}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{2}$$

3) для любого $\nu \in \Re \setminus \partial\Re$

$$|\xi|^\nu / h_\Re(\xi) \to 0 \quad \text{при} \quad \|\xi\| \to \infty, \tag{3}$$

где $\partial\Re = \{\nu \in \Re : max_{1\leq j\leq r}\{d_j - (\lambda^j, \nu)\} = 0$.

Предложение 2. *Полный многогранник $\Re$ является правильным тогда и только тогда, когда $\prod(\nu) \subset \Re$ для любого $\nu \in \Re^0$.*

Лемма 1. *Пусть $\Re$ - полный многогранник. Тогда неравенство*

$$h_\Re(\xi + \eta) \leq c h_\Re(\xi) h_\Re(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

(с некоторой постоянной $c > 0$) имеет место тогда и только тогда, когда многогранник $\Re$ - правильный.

Доказательство : Достаточность. Согласно неравенству треугольника, предложению 2 и пункту 2) предложения 1 имеем

$$h_\Re(\xi + \eta) = \sum_{\nu \in \Re^0} |\xi + \eta|^\nu \leq c_1 \left[\sum_{\nu \in \Re^0} |\xi|^\nu + \sum_{\nu \in \Re^0} |\eta|^\nu + \sum_{\nu \in \Re^0} \sum_{\nu' \in \prod(\nu)} |\xi|^{\nu'} |\eta|^{\nu - \nu'} \right] \leq$$

$$\leq c_2 \big[h_\Re(\xi) + h_\Re(\eta) + h_\Re(\xi) h_\Re(\eta) \big].$$

для некоторых положительных постоянных c_1, c_2. Кроме того, из $0 \in \Re^0$ следует, что $h_\Re(\tau) \geq 1$ для всех $\tau \in \mathbb{R}^n$, откуда следует (4).

Необходимость. В силу предложения 2, достаточно показать, что из (4) следует, что $\prod(\nu) \subset \Re$ для любых $\nu \in \Re^0$. Предположим, что (4) справедливо, но существует точка $\nu^0 \in \Re^0$ такая, что $\prod(\nu^0) \not\subset \Re$, т.е. существует точка $\mu \in \prod(\nu^0) \setminus \Re$. Пусть ради определенности $\mu = (\nu_1^0, \dots, \nu_k^0, 0, \dots, 0)$ $(1 \leq k < n)$, $\nu_1^0 \cdots \nu_k^0 \neq 0$. Так как многогранник $\Re$ является выпуклым и замкнутым, то $\mu \notin \Re$. Следовательно, существует вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$(\lambda, \mu) > d(\lambda) \equiv \sup \big\{ (\lambda, \alpha) : \alpha \in \Re,\ \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n = 0 \big\} \geq 0. \tag{5}$$

Пусть $t > 0$, $\xi(t) = (t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_k}, 0, \dots, 0)$ и $\eta(t) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$. Тогда с некоторой постоянной $c_3 > 0$ при $t > 0$

$$h_\Re(\xi(t) + \eta(t)) \geq 1 + |\xi(t) + \eta(t)|^{\nu^0} = 1 + t^{(\lambda, \mu)},$$

$$h_\Re(\xi(t)) = \sum_{\alpha \in \Re^0} |\xi(t)|^\alpha \leq 1 + c_3 t^{d(\lambda)} \quad \text{и} \quad h_\Re(\eta(t)) \leq c_3.$$

Эти оценки и (5) противоречат оценке (4). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{R}$ – полный многогранник. Тогда следующие условия эквивалентны :*

1) $h_{\mathfrak{R}}(\xi+\eta)/h_{\mathfrak{R}}(\xi)h_{\mathfrak{R}}(\eta) \to 0$ *при* $\|\xi\| \to \infty$ and $\|\eta\| \to \infty$, (6)

2) $\mathfrak{R}$ *– правильный и для любого* $\nu \in \mathfrak{R}^0$ *такого, что* $\prod(\nu) \neq \emptyset$ *либо* $\nu - \nu' \in \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}$, *либо* $\nu' \in \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}$ *для всех* $\nu' \in \prod(\nu)$,

3) *с некоторыми числами* $\delta \in [0,1)$ *и постоянной* $c > 0$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi+\eta) \leq c\left[h_{\mathfrak{R}}(\xi)h^{\delta}_{\mathfrak{R}}(\eta) + h^{\delta}_{\mathfrak{R}}(\xi)h_{\mathfrak{R}}(\eta)\right], \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

Доказательство : 1) $\Longrightarrow$ 2). Из соотношения (6) следует (4), так как функция $h_{\mathfrak{R}}$ локально ограничена (по определению) и $h_{\mathfrak{R}}(\xi) \geq 1$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, многогранник $\mathfrak{R}$ является правильным по лемме 1. Теперь предположим, что (6) справедливо и существуют $\nu \in \mathfrak{R}^0$ и $\mu \in \prod(\nu)$ такие, что $\nu - \mu \notin \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}$ и $\mu \notin \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}$. Тогда $\nu - \mu \in \partial\mathfrak{R}$ и $\mu \in \partial\mathfrak{R}$ согласно предложению 2, так как мы доказали, что $\mathfrak{R}$- правильный многогранник. Ради определенности предположим, что $\mu = (\nu_1, \ldots, \nu_k, 0, \ldots, 0)$, $\nu - \mu = (0, \ldots, 0, \nu_{m+1}, \ldots, \nu_n)$, $\nu_1 \ldots \nu_k \neq 0$ и $\nu_{m+1} \ldots \nu_n \neq 0$ при $n > m \geq k$. Так как $\mathfrak{R}$ – выпуклый и $\nu - \mu, \mu \in \partial\mathfrak{R}$, то существуют векторы $\lambda' = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)$ и $\lambda'' = (0, \ldots, 0, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$ такие, что

$$(\lambda', \mu) = \sup\left\{(\lambda', \alpha); \alpha \in \mathfrak{R} : \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_n = 0\right\} \equiv d(\lambda'),$$

$$(\lambda'', \nu - \mu) = \sup\left\{(\lambda'', \alpha) : \alpha \in \mathfrak{R},\ \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 0\right\} \equiv d(\lambda'').$$

При этом, $d(\lambda') = \sup\limits_{\alpha \in \mathfrak{R}}\{(\lambda', \alpha)\}$ поскольку $\mathfrak{R}$ является правильным многогранником.

Пусть $t > 0$, $\xi(t) = (t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_k}, 1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ и $\eta(t) = (0, \ldots, 0, t^{\lambda_{m+1}}, \ldots, t^{\lambda_n})$. Тогда для всех $t > 0$ имеем

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi(t) + \eta(t)) \geq 1 + |\xi(t) + \eta(t)|^{\nu} = 1 + t^{(\lambda', \mu)}.1.t^{(\lambda'', \nu-\mu)},$$

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi(t)) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0} |\xi(t)|^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0} t^{(\lambda', \alpha)} \leq c_1(1 + t^{d(\lambda')}),$$

$$h_{\mathfrak{R}}(\eta(t)) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0} |\eta(t)|^{\alpha} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0; \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = 0} |\eta(t)|^{\alpha} \leq c_1(1 + t^{d(\lambda'')}).$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$. Эти неравенства противоречат (6). Следовательно, если (6) имеет место, то для любого $\nu \in \mathfrak{R}^0$ такого, что $\prod(\nu) \neq \emptyset$ либо $\nu - \nu' \in \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}$, либо $\nu' \in \mathfrak{R} \setminus \partial\mathfrak{R}$ для всех $\nu' \in \prod(\nu)$. Таким образом, 1) $\Longrightarrow$ 2).

2) $\Longrightarrow$ 3). Возможны следующие случаи :

a) $\prod(\nu) = \emptyset$ для любого $\nu \in \mathfrak{R}^0$, б) существует точка $\mu \in \mathfrak{R}^0$ такая, что $\prod(\mu) \neq \emptyset$.

Если а) справедливо, то из полноты $\mathfrak{R}$ следует, что существуют такие $l^j = (0, \dots, 0, l_j, 0, \dots, 0)$ $(l_j > 0,\ j = 1, \dots, n)$, что

$$\mathfrak{R} = \left\{ \alpha \in R_+^n : \sum_{j=1}^n \alpha_j / l_j \leq 1 \right\}, \quad \mathfrak{R}^0 = \left(\bigcup_{j=1}^n \{l^j\} \right) \cup \{0\}.$$

Откуда

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) = 1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j + \eta_j|^{l_j} \leq c_2 \left(1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^{l_j} + \sum_{j=1}^n |\eta_j|^{l_j} \right), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

с некоторой постоянной $c_2 > 0$, и имеет место оценка (7) пункта 3) при $\delta = 0$.

Рассмотрим случай б). Обозначим

$$B = \left\{ [\alpha; \alpha'] : \alpha \in \mathfrak{R}^0,\ \prod(\alpha) \neq \emptyset,\ \alpha' \in \prod(\alpha) \cap (\mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}) \right\},$$

$$D = \left\{ [\alpha; \alpha'] : \alpha \in \mathfrak{R}^0,\ \prod(\alpha) \neq \emptyset,\ \alpha' \in \prod(\alpha) \cap \partial \mathfrak{R} \right\}.$$

и вспомним, что в 2) предполагаеся, что $\mathfrak{R}$ правильный многогранник. Поэтому, согласно предложению 2

$$B \cup D = \left\{ [\alpha; \alpha'] : \alpha \in \mathfrak{R}^0,\ \prod(\alpha) \neq \emptyset,\ \alpha' \in \prod(\alpha) \right\}.$$

Используя неравенство треугольника, мы получаем с некоторой постоянной $c_3 > 0$, что

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0} |\xi + \eta|^\alpha \leq c_3 \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0} |\xi|^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathfrak{R}^0} |\eta|^\alpha + \sum_{[\alpha;\alpha'] \in B \cup D} |\xi|^{\alpha'} |\eta|^{\alpha - \alpha'} \right) \leq$$

$$\leq c_3 \left(h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathfrak{R}}(\eta) + \sum_{[\alpha;\alpha'] \in B} |\xi|^{\alpha'} |\eta|^{\alpha - \alpha'} + \sum_{[\alpha;\alpha'] \in D} |\xi|^{\alpha'} |\eta|^{\alpha - \alpha'} \right), \quad \xi; \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

В силу правильности $\mathfrak{R}$, для любой точки $\mu \in \mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}$ существует число $\rho(\mu) > 1$ такое, что $\rho(\mu)\mu \in \partial \mathfrak{R} \subset \mathfrak{R}$. Далее, согласно 2) для любой пары $[\alpha; \alpha'] \in D$, $\alpha - \alpha' \in \mathfrak{R} \setminus \partial \mathfrak{R}$. Поэтому, из (8) и пункта 2) предложения 1 следует, что

$$h_{\mathfrak{R}}(\xi + \eta) \leq c_3 \left[h_{\mathfrak{R}}(\xi) + h_{\mathfrak{R}}(\eta) + \sum_{[\alpha;\alpha'] \in B} \left(|\xi|^{\rho(\alpha')\alpha'} \right)^{1/\rho(\alpha')} |\eta|^{\alpha - \alpha'} + \right.$$

$$+\sum_{[\alpha;\alpha']\in D}|\xi|^{\alpha'}\left(|\eta|^{\rho(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha')}\right)^{1/\rho(\alpha-\alpha')}\Bigg]\leq$$

$$\leq c_4\Bigg[h_{\mathfrak{R}}(\xi)+h_{\mathfrak{R}}(\eta)+\sum_{[\alpha;\alpha']\in B}\left(|\xi|^{\rho(\alpha')\alpha'}+1\right)^{1/\rho(\alpha')}|\eta|^{\alpha-\alpha'}+$$

$$+\sum_{[\alpha;\alpha']\in D}|\xi|^{\alpha'}\left(|\eta|^{\rho(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha')}+1\right)^{1/\rho(\alpha-\alpha')}\Bigg]\leq$$

$$\leq c_4\Bigg\{h_{\mathfrak{R}}(\xi)+h_{\mathfrak{R}}(\eta)+h_{\mathfrak{R}}(\eta)\Bigg[\sum_{[\alpha;\alpha']\in B}\left(|\xi|^{\rho(\alpha')\alpha'}+1\right)\Bigg]^{\delta_1}+$$

$$+h_{\mathfrak{R}}(\xi)\Bigg[\sum_{[\alpha;\alpha']\in D}\left(|\eta|^{\rho(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha')}+1\right)\Bigg]^{\delta_2}\Bigg\}\leq$$

$$\leq c_6\left[h_{\mathfrak{R}}(\xi)+h_{\mathfrak{R}}(\eta)+h_{\mathfrak{R}}(\eta)h_{\mathfrak{R}}(\xi)^{\delta_1}+h_{\mathfrak{R}}(\eta)h_{\mathfrak{R}}(\eta)^{\delta_2}\right], \tag{9}$$

где $c_4, c_5, c_6 > 0$ –некоторые постоянные и

$$\delta_1\equiv\max_{[\alpha;\alpha']\in B}\{1/\rho(\alpha')\}\in(0,1),\quad \delta_2\equiv\max_{[\alpha;\alpha']\in D}\{1/\rho(\alpha-\alpha')\}\in(0,1)$$

так как множества B и D конечные. Итак, в случае б) из неравенства (9) следует оценка (7) при $\delta=\max\{\delta_1;\delta_2\}\in(0,1)$.

3) $\Longrightarrow$ 1). По условию леммы и определению 1 $h_{\mathfrak{R}}(\tau)\to\infty$ при $\|\tau\|\to\infty$. Поэтому, в силу оценки (7) и $\delta<1$

$$\frac{h_{\mathfrak{R}}(\xi+\eta)}{h_{\mathfrak{R}}(\xi)h_{\mathfrak{R}}(\eta)}\leq c\left(\frac{1}{h_{\mathfrak{R}}(\xi)^{1-\delta}}+\frac{1}{h_{\mathfrak{R}}(\eta)^{1-\delta}}\right)\to 0\quad \text{при}\quad \|\xi\|\to\infty\quad \text{и}\quad \|\eta\|\to\infty,$$

т.е. 1) имеет место. Доказательство завершено.

Пусть h - медленно растущая весовая функция и $s\in\mathbb{R}^1$, $1\leq p<\infty$, введем следующие пространства Соболева и Хёрмандера

$$H_h^s(E^n)=\left\{U\in S':\|U\|_{H_h^s}\equiv\|F^{-1}(h^sF(U))\|_{L_2(E^n)}<\infty\right\},$$

$$B_{h,p}^s(E^n)=\left\{U\in S':\|U\|_{B_{h,p}^s}\equiv\|h^sF(U)\|_{L_p(E^n)}<\infty\right\},$$

где S' - пространство медленно растущих распределений, F - преобразование Фурье, а E^n – n-мерное евклидово пространство. В силу равенства Парсеваля

$$B_{h,2}^s(E^n)=H_h^s(E^n),\quad s\in\mathbb{R}^1.$$

Для топологических пространств G_1 и G_2 запись $U_j\xrightarrow{G_k}U$ будет означать сходимость последовательности $\{U_j\}_1^\infty$ к U в топологии G_k $(k=1,2)$, а запись $G_1\subset G_2$ будет означать вложение в смысле топологии.

Теорема 1. *Пусть h – медленно растущая весовая функция, удовлетворяющая условию (7) и такая, что $h^{-s_0} \in L_2(\mathbb{R}^n)$ для некоторого числа $s_0 > 0$. Тогда*

1) $H_h^s(E^n)$ *– кольцо при $s \geq s_0/(1-\delta)$,*
2) $\lim\limits_{j\to\infty} \|U_jV_j\|_{H_h^s} = 0$ *для любых последовательностей $\{U_j\}_1^\infty, \{V_j\}_1^\infty \subset H_h^s(E^n)$ $(s > s_0/(1-\delta))$ таких, что $U_j \xrightarrow{S'} 0$, $V_j \xrightarrow{S'} 0$ при $j \to \infty$ и*

$$\|U_j\|_{H_h^s} \leq const < \infty, \quad \|V_j\|_{H_h^s} \leq const < \infty, \quad supp(U_jV_j) \subset K, \quad j = 1, 2, \ldots$$

для любого компакта K.

Доказательство : Пункт 1) доказан в [5]. Для доказательства пункта 2), заметим, что точка нуль является единственной в Банаховом пространстве (в силу соотношений $U_j \to^{S'} 0$ и $V_j \to^{S'} 0$) предельной точкой множества $\{U_jV_j\}_1^\infty$, и достаточно показать, что множество $\{U_jV_j\}_1^\infty$ есть предкомпакт в пространстве $H_h^s(E^n)$. Заметим, что очевидно

$$\|h^{s-s_0}F(U)\|_{L_1} \leq \|h^sF(U)\|_{L_2}\|h^{-s_0}\|_{L_2}$$

для любого $U \in H_h^s(E^n)$. Следовательно, в силу равенства Парсеваля $H_h^s(E^n) \subset B_{h,1}^{s-s_0}(E^n)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$ такая функция, что $\varphi = 1$ на K. Тогда множества $\{\varphi U_j\}_1^\infty$ и $\{\varphi V_j\}_1^\infty$ предкомпактны в $B_{h,1}^{s\delta}(E^n)$ при условии $s - s_0 > s\delta$ и согласно теореме 10.1.10 работы [1]. С другой стороны, $U_j \xrightarrow{S'} 0$, $V_j \xrightarrow{S'} 0$ и топология $B_{h,1}^{s\delta}(E^n)$ сильнее топологии S' (см. теорему 10.1.7 работы [1]). Отсюда получаем, что $\varphi U_j \to 0$ и $\varphi V_j \to 0$ (при $j \to \infty$) в топологии $B_{h,1}^{s\delta}(E^n)$. При этом, для любой медленно растущей весовой функции h, любого числа s и функции $\varphi \in C_0^\infty(E^n)$

$$\|h^sF(\varphi U)\|_{L_2} \leq c_3\|U\|_{H_h^s}, \quad U \in H_h^s(E^n),$$

где $c_0 = c_0(h, s, \varphi) > 0$ – некоторая постоянная. Следовательно, используя равенство Парсеваля, неравенство (7) и неравенство Юнга, получаем, что с некоторыми постоянными $c_1, c_2 > 0$ имеем

$$\|U_jV_j\|_{H_h^s} = \|h^sF(\varphi U_j\varphi V_j)\|_{L_2} = \|h^s(F(\varphi U_j) * F(\varphi V_j))\|_{L_2} \leq$$

$$\leq c_1\left[\|h^sF(\varphi U_j)\|_{L_2}\left\|h^{s\delta}F(\varphi V_j)\right\|_{L_1} + \left\|h^{s\delta}F(\varphi V_j)\right\|_{L_1}\|h^sF(\varphi V_j)\|_{L_2}\right] \leq$$

$$\leq c_2\left[\|U_j\|_{H_h^s}\|\varphi V_j\|_{B_{h,1}^{s\delta}} + \|\varphi U_j\|_{B_{h,1}^{s\delta}}\|V_j\|_{H_h^s}\right] \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Теорема 2. *Для любой медленно растущей весовой функции h и $s_0 > 0$*

a) *если $H_h^{s_0}(E^n)$ – кольцо, то для любого $s > s_0$ $H_h^s(E^n)$ также есть кольцо.*

б) если выполняется пункт 2) теоремы 1, то

$$h(\xi+\eta)/h(\xi)h(\eta) \to 0 \quad \text{при} \quad \|\xi\| \to \infty \quad \text{и} \quad \|\eta\| \to \infty.$$

Прежде, чем начать доказательство, заметим, что согласно результатам работы [7], если пространство $H_h^l(E^n)$ является кольцом при некотором $l > 0$, то оценка (4) справедлива для функции h.

Доказательство : Пусть $s > s_0$. Тогда $F^{-1}(h^{s-s_0}F(f)) \in H_h^{s_0}(E^n)$ для любой функции $f \in H_h^s(E^n)$. Следовательно, в силу равенства Парсеваля, формулы (4) и условия а) теоремы для любых $U, V \in H_h^s(E^n)$

$$\|UV\|_{H_h^s} = \|h^s(F(U) * F(V))\|_{L_2} \le c_1 \left\| h^{s_0}(h^{s-s_0}|F(U)| * h^{s-s_0}|F(V)|) \right\|_{L_2} \le$$

$$\le c_2 \|h^{s_0}(h^{s-s_0}F(U))\|_{L_2} \|h^{s_0}(h^{s-s_0}F(V))\|_{L_2} = c_2 \|h^s F(U)\|_{L_2} \|h^s F(V)\|_{L_2},$$

где $c_1, c_2 > 0$ – некоторые постоянные, т.е. $H_h^s(E^n)$ является кольцом и а) доказано.

Докажем пункт б). Пусть, наоборот, при условиях теоремы пункт б) не выполняется. Это означает, что существуют последовательности $\{\xi^{(j)}\}_1^\infty$ и $\{\eta^{(j)}\}_1^\infty$ $\|\xi^{(j)}\| \to \infty$ и $\|\eta^{(j)}\| \to \infty$ при $j \to \infty$, для которых выполняется

$$h\left(\xi^{(j)} + \eta^{(j)}\right) \ge c_3 h\left(\xi^{(j)}\right) h\left(\eta^{(j)}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots) \tag{10}$$

с некоторой постоянной $c_3 > 0$. Пусть $\varphi, \psi \in C_0^\infty(E^n)$ – ненулевые функции, обозначим через

$$U_j(x) = \frac{\varphi(x) e^{i(x, \xi^{(j)})}}{h^s\left(\xi^{(j)}\right)}, \quad V_j(x) = \frac{\psi(x) e^{i(x, \eta^{(j)})}}{h^s\left(\eta^{(j)}\right)} \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Заметим, что по определению M_h (данному после определения 1)

$$\|U_j\|_{H_h^s} = \left\| \frac{h^s(\xi) F(\varphi)(\xi - \xi^{(j)})}{h^s(\xi^{(j)})} \right\|_{L_2} \le$$

$$\le \left\| \frac{h^s(\xi^{(j)}) M_h^s(\xi - \xi^{(j)})}{h^s(\xi^{(j)})} F(\varphi)(\xi - \xi^{(j)}) \right\|_{L_2} = \|M_h^s F(\varphi)\|_{L_2} < \infty$$

для любого $j = 1, 2, \ldots$, и, аналогичным образом,

$$\|V_j\|_{H_h^s} \le \|M_h^s F(\psi)\|_{L_2} < \infty \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Для быстро убывающих функций $f \in S$, по теореме Винера–Пели, так как $F(f\varphi) \in S$ и $\|\xi^{(j)}\| \to \infty$ при $j \to \infty$, имеет место

$$\lim_{j\to\infty} \int U_j f\,dx = \lim_{j\to\infty} \frac{F(f\varphi)(\xi^{(j)})}{h^s(\xi^{(j)})} = 0.$$

Это означает, что $U_j \xrightarrow{S'} 0$. Аналогично, $V_j \xrightarrow{S'} 0$. Так как $\operatorname{supp}(U_jV_j) \subset \operatorname{supp}\varphi \cap \operatorname{supp}\psi$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то последовательности $\{U_j\}_1^\infty$ и $\{V_j\}_1^\infty$ удовлетворяют условиям 2) теоремы 1. Следовательно, по теореме 1

$$\|U_jV_j\|_{H_h^s} \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty. \tag{11}$$

С другой стороны в силу оценки (10) и определения M_h имеем

$$\|U_jV_j\|_{H_h^s} = \|h^s F(U_jV_j)\|_{L_2} = \left\| \frac{h^s(\xi)}{h^s(\xi^{(j)})h^s(\eta^{(j)})} F(\varphi\psi)(\xi - \xi^{(j)} - \eta^{(j)}) \right\|_{L_2} \geq$$

$$\geq \left\| \frac{h^s(\xi^{(j)} + \eta^{(j)})}{h^s(\xi^{(j)})h^s(\eta^{(j)})} M_h^{-s}(\xi - \xi^{(j)} - \eta^{(j)}) F(\varphi\psi)(\xi - \xi^{(j)} - \eta^{(j)}) \right\|_{L_2} \geq$$

$$\geq c_3 \left\| M_h^{-s} F(\varphi\psi) \right\|_{L_2} > 0$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$ Полученное противоречие доказывает справедливость пункта б).

Теорема 3. *Пусть $\Re$ – полный многогранник и*

$$h(\xi) \equiv h_{\Re}(\xi) = \sum_{\alpha \in \Re^0} |\xi|^\alpha.$$

Тогда для достаточно большого s пространство H_h^s удовлетворяет условию 2) теоремы 1 тогда и только тогда, когда многогранник $\Re$ является правильным и для любого $\alpha \in \Re^0$ такого, что $\prod(\alpha) \neq \emptyset$ либо $\alpha - \alpha' \in \Re \setminus \partial\Re$, либо $\alpha' \in \Re \setminus \partial\Re$ для всех $\alpha' \in \prod(\alpha)$.

Доказательство ; непосредственно следует из теорем 1 и 2 и леммы 2.

Пример. Пусть A – набор точек $\{(4,0), (4,2), (2,4), (0,4)\}$, а $\Re$ – характеристический многогранник A. Легко заметить, что $\Re$ – правильный и для любого $\alpha \in \Re^0$ такого, что $\prod(\alpha) \neq \emptyset$ (эти точки – (4,2) и (2,4)) либо $\alpha - \alpha' \in \Re \setminus \partial\Re$, либо $\alpha' \in \Re \setminus \partial\Re$ для всех $\alpha' \in \prod(\alpha)$ ($(0,2); (2,0) \in \Re \setminus \partial\Re$). Простые вычисления показывают, что функция

$$h(\xi) = \xi_1^4 + \xi_1^4\xi_2^2 + \xi_1^2\xi_2^4 + \xi_2^4 + 1$$

удовлетворяет неравенству (7) при $\delta = 1/2$ и $h^s \in L_2$ при $s > 1/3$. Следовательно, в силу теорем 1 и 3 для любого $s > 2/3$ пространство H_h^s – кольцо и произведение окрестностностей нуля в H_h^s предкомпактно в H_h^s.

Abstract. Some algebraic properties of the Sobolev generalized space $H(\Re)$ generated by a polyhedron $\Re$ are investigated. In particular, necessary and sufficient conditions are found, under which the products of weakly converging to zero sequences from $H(\Re)$ strongly converge to zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Хёрмандер, Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, Мир, Москва, 1986.
2. S. Gindikin, L. Volevich, The Method of Newton's Polyhedron in the Theory of Partial Differential Equations, Kluwer Acad Publ., Dordrecht, 1992.
3. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности одного класса многочленов", Труды МИАН СССР, том 91, стр. 59 – 81, 1967.
4. В. Н. Маркарян, Г. О. Акопян, "О решениях гипоэллиптических уравнений класса Жерве" Изв. НАН Армении. Математика : том 33, № 1, стр. 1 – 13, 1998.
5. N. Komano-Go, Pseudo Differential Operators, Mat. Press, Cambridge, MA, 1981.
6. G. Garello, L. Rodino, Nonlinear Microlocal Analysis, World Scientific, Singapore, 1999.
7. G. Garello, "Generalized Sobolev algebras and regularity for solutions", Com. Appl. Analysis, vol. 3, № 4, pp. 563 – 574, 1999.

Поступила 13 сентября 2004