Известия НАН Армении. Математика, 40, № 2, 2005, 29-46

КВАЗИБАЗИСЫ В $L^p(\mathbb{R})$ И ФРЕЙМЫ

С. С. Казарян

Институт математики НАН Армении

Резюме. Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть квазибазис для некоторого $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда для любого неотрицательного целого числа N существует ограниченная измеримая функция m такая, что $\{m\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является квазибазисом для каждого $L^r(\mathbb{R})$, $1 \leq r \leq p$. Если $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ есть фрейм в $L^2(\mathbb{R})$, то для любого неотрицательного, целого числа N существует ограниченная, измеримая функция m такая, что $\{m\phi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является квазибазисом для каждого $L^r(\mathbb{R})$, $1 \leq r \leq 2$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В последующем применяются следующие обозначения и терминология.

Для данного Банахова пространства B обозначим через B^* сопряженное к нему пространство. Система элементов $X = \{x_n : n = 1, 2, \dots\} \subset B$ полна в B, если замыкание множества всех конечных линейных комбинаций элементов из X совпадает с B. Система $X = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ является базисом Шаудера для B, если для каждого элемента $x \in B$ существует единственный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n$, который сходится к x по норме пространства B. Существование базиса Шаудера эквивалентно следующему утверждению [1] : X полная в B и существует сопряженная система

$$X^* = \{x_n^* : n = 1, 2, \dots\} \subset B^*$$

такая, что

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

и для всех $x \in B$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ сходится к x по норме B.

Система $X = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ называется квазибазисом пространства B, если существует система $\{y_n^* : n = 1, 2, \dots\} \subset B^*$ такая, что для всех $x \in B$ ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(x)x_n$ сходится к x по норме B. Это обобщение базиса Шаудера было введено Гелбаумом [5] (см. также [8], стр. 278, 766). Система $\{y_n^* : n = 1, 2, \dots\} \subset B^*$ называется *допустимой*.

Скажем, что система $X = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ есть безусловный квазибазис пространства B, если $X = \{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ есть квазибазис для B и при произвольном $x \in B$ сумма $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^*(x)x_n$ безусловно сходится к x по норме пространства B. Для каждого $a \in (0, 1)$ пусть I_a – вещественная функция с периодом 1, определенная для $t \in [0, 1]$ условием

$$I_a(t) = \begin{cases} \dfrac{a-1}{a} & \text{если} \quad t \in [0, a], \\ 1 & \text{если} \quad t \in [a, 1]. \end{cases}$$

Мы используем следующее обозначение для носителя измеримой функции g, определенной на вещественной прямой,

$$\operatorname{supp} g = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}.$$

Напомним определение функций Хаара : $h_1(t) = 1$ для всех $t \in [0, 1]$ и

$$h_k^{(j)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} & \text{если} \quad \dfrac{2j-2}{2^{k+1}} < t < \dfrac{2j-1}{2^{k+1}}, \\ -2^{\frac{k}{2}} & \text{если} \quad \dfrac{2j-1}{2^{k+1}} < t < \dfrac{2j}{2^{k+1}}, \\ 0 & \text{в остальных точках,} \end{cases}$$

для $k = 0, 1, 2, \dots,$ $j = 1, 2, \dots 2^k$ и пусть $h_n = h_k^{(j)}$ для $n = 2^k + j$. Положим $h_n(t) = 0$ для $t \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Обозначим расширенную систему Хаара через

$$H^\nu = \{h_n(t-\nu)\}_{n=1}^{\infty}, \quad \nu \in Z.$$

Пусть $\mu_0, \mu_1, \mu_{-1}, \mu_2, \mu_{-2}, \dots$ – последовательность целых чисел, избранных следующим образом

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 1, \quad \mu_{-1} = 3, \quad \dots \quad ,$$
$$\mu_k = \mu_{1-k} + 2(k-1) + 1, \quad \mu_{-k} = \mu_k + 2k, \quad k > 1,$$

Потом возьмем другую последовательность целых чисел $\{n_j\}_{j=0}^{\infty}$ со следующими свойствами :

$$n_j = \begin{cases} k - (j - \mu_k) & \text{если} \quad \mu_k < j < \mu_{-k}, \\ -k + j - \mu_{-k} & \text{если} \quad \mu_{-k} < j < \mu_{k+1}, \end{cases} \qquad k \geq 1,$$

и

$$n_{\mu_k} = \begin{cases} k & \text{если} \quad k \geq 0, \\ -k & \text{если} \quad k < 0. \end{cases}$$

Теперь пронумеруем функции из системы $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} H^\nu$ следующим образом $\psi_1(t) = h_1(t)$, $\psi_2(t) = h_1(t-1)$ и в качестве $\psi_j(t)$ $(j \geq 2)$ выберем первую функцию из системы H_{n_j}, если ни одна из функций системы H_{n_j} не выбиралась на предыдущих шагах, иначе в качестве $\psi_j(t)$ $(j \geq 2)$ мы возьмем функцию с минимальным индексом из H_{n_j}, которая не была выбрана. Легко видеть, что система $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ - полная ортонормированная система в $L^2(\mathbb{R})$, кроме того она - базис Шаудера в пространстве $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ и безусловный базис в $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$.

Следующий результат доказан в статье [6].

Теорема А. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ - квазибазис для некоторого пространства $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, где измеримое множество E имеет конечную, положительную меру. Тогда для каждого целого $N \geq 0$ существует ограниченная, измеримая функция m такая, что $\{m\varphi_n : n > N\}$ является квазибазисом для каждого $L^r(E)$, $1 \leq r \leq p$.*

Возможность получить квазибазисы в весовых пространствах L^p, $1 \leq p < \infty$, была отмечена в [7]. В данной статье мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ - квазибазис для некоторого $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда для любого целого числа $N \geq 0$ существует ограниченная, измеримая функция m такая, что $\{m\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является квазибазисом для каждого $L^r(\mathbb{R})$, $1 \leq r \leq p$.*

Эту теорему можно применить к фреймам в $L^2(\mathbb{R})$. Теория фреймов была введена Р. Дафиным и А. Шефером [4]. Повышенный интерес к теории фреймов появился после введения кратномасштабного анализа фреймов (КМАФ) в $L^2(\mathbb{R})$, сформулированного Е. Бенедето и Ш. Ли [2]. КМАФ является естественным расширением кратномасштабного анализа всплесков.

Определение 1. Последовательность элементов $\{\phi_n : n = 1, 2, \ldots\}$ в сепарабельном Гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$ называется фреймом для $\mathbb{H}$, если существуют постоянные $A, B > 0$ такие, что

$$A\|h\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle h, \phi_n\rangle|^2 \leq B\|h\|^2, \qquad \forall h \in \mathbb{H}.$$

Ясно, что фрейм есть полная система элементов $\mathbb{H}$, так как из соотношения $\langle h, \phi_n\rangle = 0$, $n \in \mathbb{N}$ следует что $h = 0$. Отметим, что произвольный фрейм является безусловным квазибазисом в $\mathbb{H}$.

Если система $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ есть фрейм для $\mathbb{H}$, тогда соответствие

$$S : \{c_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n$$

является линейным, ограниченным оператором из $l^2(\mathbb{N})$ в $\mathbb{H}$. Действительно,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} c_n \phi_n - \sum_{n=1}^{N} c_n \phi_n \right\| = \left\| \sum_{n=N+1}^{m} c_n \phi_n \right\| = \sup_{\|g\|=1} \left| \langle \sum_{n=N+1}^{m} c_n \phi_n, g \rangle \right| \leq$$

$$\leq \sup_{\|g\|=1} \sum_{n=N+1}^{m} |\langle c_n \phi_n, g \rangle| \leq \left(\sum_{n=N+1}^{m} |c_n|^2 \right)^{1/2} \sup_{\|g\|=1} \left(\sum_{n=N+1}^{m} |\langle \phi_n, g \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sqrt{B} \left(\sum_{n=N+1}^{m} |c_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Сопряженный оператор устанавливается следующим образом

$$S^* : \mathbb{H} \longrightarrow l^2(\mathbb{N}), \quad S^* h = \{\langle h, \phi_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}.$$

Следующий оператор называется *фрейм оператором*

$$L : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad Lh = SS^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, \phi_n \rangle \phi_n.$$

Можно показать, что оператор L является обратимым (см. [3, 10]) и что $\{L^{-1}\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ является фреймом для $\mathbb{H}$. Кроме того, при любом $h \in \mathbb{H}$

$$h = LL^{-1}h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle L^{-1}h, \phi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, L^{-1}\phi_n \rangle \phi_n.$$

Откуда легко получаем следующий результат

Утверждение 1. Пусть $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ – фрейм для сепарабельного Гильбертова пространства $\mathbb{H}$. Тогда $\{\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ с допустимой системой $\{L^{-1}\phi_n : n = 1, 2, \dots\}$ являются безусловными базисами для $\mathbb{H}$.

Следовательно, из теоремы 1 получаем

Теорема 2. *Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – фрейм в $L^2(\mathbb{R})$. Тогда для любого натурального числа N существует ограниченная, измеримая функция m такая, что $\{m\phi_n\}_{n=N}^{\infty}$ является квазибазисом для каждого $L^r(\mathbb{R})$, $1 \leq r \leq 2$.*

§ 2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

В нашем доказательстве необходима следующая лемма, которая является модификацией леммы, доказанной в статье [6], (см. также [9]).

Лемма 1. *Пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – квазибазис для некоторого пространства $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$, и пусть $f \in L^p(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp} f \subset \Delta$, где $\Delta \subset \mathbb{R}$ – конечный интервал. Тогда для произвольных чисел $\varepsilon > 0$ и $\beta \ge 1$ и произвольного натурального числа N существует измеримое множество $E \subset \Delta$, $|E| < \varepsilon$ и Φ-полином $P = \sum_{k=N}^{M} a_k\varphi_k$ такие, что*

$$\|f - P\|_{L^p(G)} < \varepsilon, \quad \text{где} \quad G = \mathbb{R} \setminus E. \tag{1}$$

Далее, для каждого измеримого подмножества $D \subset G$ и произвольного $r (1 \le r \le p)$

$$\sup_{N \le s \le m} \left\| \sum_{k=n}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^p(D)} < \varepsilon + \|f\|_{L^p(D)}, \tag{2}$$

$$\sup_{N \le s \le m} \left\| \sum_{k=n}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} < \varepsilon + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])}. \tag{3}$$

Доказательство : Не теряя общности, можем предполагать что $\Delta = [0,1]$ и $0 < \varepsilon < 1$.

Пусть $\Phi^* = \{\varphi_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset L^q(\mathbb{R})$ $(1/p + 1/q = 1)$ – допустимая система квазибазиса Φ. Тогда оператор n-частных сумм представляется в виде

$$S_n(\psi) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k^*(\psi)\varphi_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(\psi)\varphi_k,$$

где $\psi \in L^p(\mathbb{R})$ и

$$a_k(\psi) = \int_R \psi(t)\varphi_k^*(t)dt.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} \|\psi - S_n(\psi)\|_p = 0, \quad \forall\psi \in L^p(\mathbb{R}),$$

то в силу теоремы Банаха-Штейнгауза существует постоянная $C_p > 0$ такая, что

$$\|S_n\| \le C_p, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Кроме того, существует натуральное число n и соответствующая степенная функция

$$g = \sum_{i=1}^{2^n} \gamma_i\chi_{\Delta_n^i}, \quad \text{где} \quad \Delta_n^i = \left(\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right), \quad i = 1,\dots,2^n,$$

такая, что

$$\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R})}<\frac{\varepsilon}{4}\quad \text{и}\quad \|g\|_{L^p(\Delta_n^i)}<\frac{\varepsilon^{2-1/p}}{16\beta C_p},\quad i=1,\ldots,2^n.$$

Положим $n_1=N$ и

$$B_1=\max\left\{1,\|\varphi_k\|_{L^p(\mathbb{R})}:1\le k\le n_1\right\},\quad \eta_1=\frac{\varepsilon}{2^{n+5}n_1B_1}.$$

В силу леммы Фейера (см. [11], стр. 85) существует натуральное число $s_1>n$ такое, что

$$|b_k^1|=\left|\int_{\Delta_n^1}g(t)\varphi_k^*(t)I_{\varepsilon/2}(2^{s_1}t)dt\right|<\eta_1,\quad \forall k\in[1,n_1].$$

Определим функцию g_1 на $[0,1]$ следующим образом

$$g_1(t)=\gamma_1\chi_{\Delta_n^1}(t)I_{\varepsilon/2}(2^{s_1}t).$$

Пусть n_2 – натуральное число больше, чем n_1 и такое, что

$$\left\|g_1-\sum_{k=1}^{n_2-1}a_k(g_1)\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}<\varepsilon 2^{-n-3}\quad \text{и}\quad P_1=\sum_{k=n_1}^{n_2-1}a_k(g_1)\varphi_k,$$

тогда

$$\|g_1-P_1\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\left\|g_1-\sum_{k=1}^{n_2-1}a_k(g_1)\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}+\left\|\sum_{k=1}^{n_1-1}a_k(g_1)\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$<\varepsilon 2^{-n-3}+\left\|\sum_{k=1}^{n_1-1}b_k^1\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le\varepsilon 2^{-n-3}+n_1\eta_1B_1<\varepsilon 2^{-n-2}.$$

Если положим $a=\varepsilon/2$, тогда получим, что

$$\int_{\Delta_n^1}|g_1|^pdt=((1-a)/a)^p|\gamma_1|^pa|\Delta_n^1|+|\gamma_1|^p(1-a)|\Delta_n^1|$$

$$=\left[(1-a)^p+a^{p-1}(1-a)\right]|\gamma_1|^p|\Delta_n^1|/a^{p-1}\le 2a^{1-p}\int_{\Delta_n^1}|g|^pdt.$$

Таким образом,

$$\sup_{n_1\le m<n_2}\left\|\sum_{k=n_1}^{m}a_k(g_1)\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\le 2C_p\|g_1\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

$$\le 2^{1+1/p}C_pa^{\frac{1-p}{p}}\left(\int_{\Delta_n^1}|g|^pdt\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{4\beta}.$$

Предположим, что полиномы, связанные с интервалами Δ_n^j, $1 \le j \le i$, уже определены. Пусть

$$B_i = \max\left\{1, \|\varphi_k\|_{L^p(\mathbb{R})} : \ 1 \le k \le n_i\right\}, \quad \eta_i = \frac{\varepsilon}{2^{n+3} n_i B_i}.$$

В силу леммы Фейера существует такое целое s_i : ($s_i > n_i$), что

$$|b_i^k| = \left|\int_{\Delta_n^i} g(t)\varphi_k^*(t) I_{\varepsilon/2}(2^{s_i}t)dt\right| < \eta_i, \quad \forall k \in [1, n_i].$$

Тем же путем, что и выше определим натуральное число n_{i+1} больше, чем n_i такое, что

$$\left\|g_i - \sum_{k=1}^{n_{i+1}-1} a_k(g_i)\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})} < 2^{-n-3}\varepsilon,$$

где

$$g_i(t) = g(t) I_{\varepsilon/2}(2^{s_i}t)\chi_{\Delta_n^i}(t).$$

Тогда для

$$P_i = \sum_{k=n_i}^{n_{i+1}-1} a_k(g_i)\varphi_k$$

имеем

$$\|g_i - P_i\|_{L^p(\mathbb{R})} < 2^{-n-3}\varepsilon + \eta_i n_i B_i < 2^{-n-2}\varepsilon$$

и

$$\sup_{n_i \le k < n_{i+1}} \left\|\sum_{k=n_i}^{m} a_k(g_i)\varphi_k\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \le 2C_p \|g_i\|_{L^p(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{4\beta}. \tag{4}$$

Положим

$$P = \sum_{i=1}^{2^n} P_i, \quad E = \left\{t \in [0,1] : \ \sum_{i=1}^{2^n} I_{\varepsilon/2}(2^{s_i}t)\chi_{\Delta_n^i}(t) \ne 1\right\} \quad \text{и} \quad E' = [0,1] \setminus E.$$

Тогда

$$\left|\left\{t \in \Delta_n^i : \ I_{\varepsilon/2}(2^{s_i}t) \ne 1\right\}\right| = \frac{\varepsilon}{2}|\Delta_n^i|$$

согласно определению $I_{\varepsilon/2}$, так что

$$|E| = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{\varepsilon}{2}|\Delta_n^i| < \varepsilon.$$

Поскольку $g(x) = \sum_{i=1}^{2^n} g_i(x)$, $x \in E^{'}$, то

$$\|f - P\|_{L^p(G)} = \|(f - g) + (g - P)\|_{L^p(G)} \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{2^n} \|g_i - P_i\|_{L^p(\mathbb{R})} < \varepsilon$$

Для доказательства условия (3), заметим, что для каждого измеримого подмножества $D \subset G = \mathbb{R} \setminus E$ имеем

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le j\le 2^n} \left\|\sum_{i=1}^{j} P_i\right\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} \le \max_{1\le j\le 2^n} \left\|\sum_{i=1}^{j}(P_i - g_i)\right\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} + \\
&+ \left\|\sum_{i=1}^{j} g_i - f\chi_{\cup_{i=1}^{j}\Delta_n^i}\right\|_{L^r(D\cap\Delta)} + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} < \\
&< \sum_{i=1}^{j} 2^{-i-2}\varepsilon + \left\|\sum_{i=1}^{j}(g_i - f)\chi_{\Delta_n^i}\right\|_{L^r(D\cap\Delta)} + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} < \\
&< \sum_{i=1}^{j} 2^{-i-2}\varepsilon + \left\|\sum_{i=1}^{j}(g_i - f)\chi_{\Delta_n^i}\right\|_{L^r(D)} + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} \le \\
&\le \frac{\varepsilon}{4} + \|g - f\|_{L^r(\mathbb{R})} + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} < \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} . \quad (5)
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\max_{1\le j\le 2^n} \left\|\sum_{i=1}^{j} P_i\right\|_{L^p(D)} \le \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_{L^p(D)}.$$

Отсюда и из (4) для $m \ge N$ и $n_j \le m < n_{j+1}$ получаем

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k\right\|_{L^p(D)} \le \left\|\sum_{i=1}^{j} P_i\right\|_{L^p(D)} + \left\|\sum_{k=n_j}^{m} a_k(g_j)\varphi_k\right\|_{L^p(D)} \\
&< \varepsilon + \|f\|_{L^p(D)} .
\end{aligned}$$

Из (5) следует

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{k=N}^{m} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} \le \left\|\sum_{i=1}^{j} P_i\right\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} + \left\|\sum_{k=n_j}^{m} a_k(g_j)\varphi_k\right\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} < \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} + \left\|\sum_{k=n_j}^{m} a_k(g_j)\varphi_k\right\|_{L^p(D)} (2\beta)^{1-r/p} < \\
&< \varepsilon + \|f\|_{L^r(D\cap[-\beta,\beta])} .
\end{aligned}$$

Доказательство Теоремы 1 : Предположим, что функции Хаара и их сдвиги нормированы в $L^p(\mathbb{R})$, т.е.

$$\|\psi_i\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Пусть $\eta_i = 2^{-(i+3)}$ для $i \in \mathbb{N}$. В последующем мы собираемся применить лемму 1 к системе Φ и функциям $f = \psi_i$, $i \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\Delta_i = \text{supp } \psi_i, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\Theta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \chi_{[n,n+1]\cup[-n-1,-n]}(t). \tag{8}$$

Весовая функция m получается как бесконечное произведение ограниченных, почти всюду положительных функций m_k :

$$m_k(t) = 1, \quad \text{если} \quad t \in ([-\beta_{k-1}, \beta_{k-1}] \setminus E_k) \cup (\mathbb{R} \setminus [-\beta_k, \beta_k]), \quad k \geq 2,$$

где $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ - возрастающая последовательность положительных чисел таких, что $\lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = \infty$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |E_k| < \infty$. Очевидно, что функция $\prod_{k=1}^{\infty} m_k$ будет положительной и ограниченной почти всюду функцией.

Выберем положительные числа $\delta_n < \eta_n$ такие, что

$$\|\psi_k\|_{L^p(E)} < \frac{\eta_n}{8}, \quad \forall k \ (1 \leq k \leq n, \quad |E| < \delta_n).$$

Применив лемму 1 мы найдем $E_1 \subset \Delta_1 = \text{supp } \psi_1$, $|E_1| < \delta_1$ и

$$P_{11} = \sum_{i=l_0(1)}^{l_1(1)-1} a_i \varphi_i, \quad l_0(1) = N,$$

такие, что

$$\|\psi_1 - P_{11}\|_{L^p(E_1')} < \frac{\eta_1}{8},$$

где $E_1' = \mathbb{R} \setminus E_1$. Тогда для произвольного измеримого подмножества $D \subseteq E_1'$

$$\sup_{l_0(1) \leq s < l_1(1)} \left\| \sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k \varphi_k \right\|_{L^p(D)} < \frac{\eta_1}{4} + \|\psi_1\|_{L^p(D)},$$

и для всех r $(1 \le r \le p)$

$$\sup_{l_0(1)\le s\le l_1(1)-1}\left\|\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_1'\cap[-\beta_1,\beta_1])} < \frac{\eta_1}{8} + \|\psi_1\|_{L^r(E_1'\cap[-\beta_1,\beta_1])}.$$

Пусть $G_1 = \mathbb{R}\setminus[-\beta_2,\beta_2]$. Возьмем $\beta_2 \in \mathbb{N}$, $\beta_2 \ge 2 > \beta_1 = 1$ так, что для всех r $(1 \le r \le p)$

$$\sup_{l_0(1)\le s\le l_1(1)-1}\left\|\Theta\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(G_1)} < \frac{\eta_2}{8}.$$

Определим

$$m_1(t) = d_1\chi_{E_1}(t) + \chi_{[-\beta_1,\beta_1]\setminus E_1(t)} + d_1'\Theta(t)\chi_{\Gamma_1}(t) + \Theta(t)\chi_{G_1}(t), \tag{9}$$

где $\Gamma_1 = [-\beta_2,\beta_2]\setminus[-\beta_1,\beta_1]$ и

$$d_1 = \frac{\eta_1}{8}\left(2 + \sup_{l_0(1)\le s<l_1(1)}\left\|\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_1)}\right)^{-1},$$

$$d_1' = \frac{\eta_1}{8}\left(1 + \sup_{1\le r\le p}\sup_{l_0(1)\le s<l_1(1)}\left\|\Theta\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\Gamma_1)}\right)^{-1}.$$

Легко получаем, что для всех r $(1 \le r \le p)$

$$\begin{aligned}
&\|\psi_1 - m_1P_{11}\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \|\psi_1 - m_1P_{11}\|_{L^r(E_1)} + |\psi_1 - m_1P_{11}\|_{L^r([-\beta_1,\beta_1]\setminus E_1)} +\\
&+ \|\psi_1 - m_1P_{11}\|_{L^r(\Gamma_1)} + \|\psi_1 - m_1P_{11}\|_{L^r(G_1)} \le \|\psi_1\|_{L^r(E_1)} + \|m_1P_{11}\|_{L^r(E_1)} +\\
&\quad + \|\psi_1 - P_{11}\|_{L^r([-\beta_1,\beta_1]\setminus E_1)} + \|m_1P_{11}\|_{L^r(\Gamma_1)} + \|m_1P_{11}\|_{L^r(G_1)} \le\\
&\le \frac{\eta_1}{8} + \frac{\eta_1}{8} + 2^{1/q}\frac{\eta_1}{8} + \frac{\eta_1}{8} + \frac{\eta_2}{8} < \eta_1
\end{aligned}$$

и для произвольного s $(l_0(1) \le s < l_1(1))$

$$\begin{aligned}
&\left\|m_1\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \left\|m_1\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_1)} + \left\|m_1\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_1'\cap[-\beta_1,\beta_1])} +\\
&+ \left\|m_1\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\Gamma_1)} + \left\|m_1\sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(G_1)} \le\\
&\le \frac{\eta_1}{8} + \frac{\eta_1}{4} + \|\psi_1\|_{L^r(E_1'\cap[-\beta_1,\beta_1])} + \frac{\eta_1}{8} + \frac{\eta_2}{8} < \eta_1 + \|\psi_1\|_{L^r(\Delta_1)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

На следующем шаге заметим, что supp $\psi_2 \subset [-\beta_2, \beta_2]$, и возьмем

$$\varepsilon_2 = \frac{\eta_2}{2^{5p}\beta_2}. \tag{11}$$

Далее, применяя лемму 1 к функциям

$$\chi_{[-\beta_2,\beta_2]}\left\{(m_1)^{-1}\psi_1 - P_{11}\right\} \quad \text{и} \quad (m_1)^{-1}\psi_2,$$

найдем $E_2 \subset [-\beta_2, \beta_2]$ и $|E_2| < \delta_2$ (где E_2 – объединение соответствующих "плохих" множеств) и также

$$P_{j2} = \sum_{i=l_{j-1}(2)}^{l_j(2)-1} a_i\varphi_i, \quad l_1(1) = l_0(2) < l_1(2) < l_2(2), \quad j = 1, 2,$$

таких, что

$$\left\|\chi_{[-\beta_2,\beta_2]}((m_1)^{-1}\psi_1 - P_{11}) - P_{12}\right\|_{L^p(E_2')} < \varepsilon_2,$$
$$\left\|(m_1)^{-1}\psi_2 - P_{22}\right\|_{L^p(E_2')} < \varepsilon_2,$$

где $E_2' = \mathbb{R} \setminus E_2$. Для произвольного измеримого подмножества $D \subseteq E_2'$

$$\begin{gathered}
\sup_{l_0(2)\le s<l_1(2)} \left\|\sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^p(D)} < \varepsilon_2 + \|\chi_{[-\beta_2,\beta_2]}((m_1)^{-1}\psi_1 - P_{11})\|_{L^p(D)}, \\
\sup_{l_1(2)\le s\le l_2(2)-1} \left\|\sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^p(D)} < \varepsilon_2 + \left\|(m_1)^{-1}\psi_2\right\|_{L^p(D)}
\end{gathered} \tag{12}$$

и для всех r $(1 \le r \le p)$

$$\begin{gathered}
\sup_{l_0(2)\le s\le l_1(2)-1} \left\|\sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(D\cap[-\beta_2,\beta_2])} < \frac{\eta_2}{4^p\beta_2} + \left\|(m_1)^{-1}\psi_1 - P_{11}\right\|_{L^r(D\cap[-\beta_2,\beta_2])}, \\
\sup_{l_1(2)\le s\le l_2(2)-1} \left\|\sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(D\cap[-\beta_2,\beta_2])} < \varepsilon_2 + \left\|(m_1)^{-1}\psi_2\right\|_{L^r(D\cap[-\beta_2,\beta_2])}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Возьмем произвольное $\beta_3 \in \mathbb{N}$, $\beta_3 \ge max[2, 2\beta_2]$ такое, что для каждого r $(1 \le r \le p)$

$$\sup_{l_1(2)<s\le l_2(2)-1} \left\|\sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(G_2)} + \sum_{j=1}^{2} \sup_{l_0(j)\le s\le l_1(j)-1} \left\|\Theta \sum_{k=l_0(j)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(G_2)} < \frac{\eta_3}{8},$$

где $G_2 = \mathbb{R} \setminus [-\beta_3, \beta_3]$. Определим

$$m_2(t) = d_2\chi_{E_2(t)} + \chi_{[-\beta_2,\beta_2]\setminus E_2}(t) + d_2'\chi_{\Gamma_2}(t) + \chi_{G_2}(t),$$

где $\Gamma_2 = [-\beta_3, \beta_3] \setminus [-\beta_2, \beta_2]$ и

$$d_2 = \frac{\eta_2}{8}\left(1 + \sum_{j=1}^{2} \sup_{l_0(j)\le s\le l_1(j)-1} \left\| \sum_{k=l_0(j)}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^p(E_2)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{l_1(2)\le s\le l_2(2)-1} \left\| \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^p(E_2)} \right)^{-1},$$

$$d_2' = \frac{\eta_2}{8}\left(1 + \sup_{1\le r\le p} \sum_{j=1}^{2} \sup_{l_{j-1}(2)\le s< l_j(2)} \left\| \sum_{k=l_{j-1}(2)}^{s} a_k\varphi_k(t) \right\|_{L^r(\Gamma_2)} \right)^{-1}.$$

Таким образом, получаем, что для каждого r $(1 \le r \le p)$

$$\begin{aligned}
&\|\psi_1 - m_1m_2(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \|\psi_1 - m_1m_2(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(E_2)} + \\
&+ \|\psi_1 - m_1m_2(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(E_2')} \\
&\le \|\psi_1\|_{L^r(E_2)} + \|m_2(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(E_2)} + \|\psi_1 - m_1m_2(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(E_2'\cap[-\beta_2,\beta_2])} + \\
&\qquad + \|\Theta m_2(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(G_2)} \\
&\le \frac{\eta_2}{8} + \frac{\eta_2}{8} + \|\psi_1 - m_1(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(E_2'\cap[-\beta_2,\beta_2])} + \|\Theta(P_{11} + P_{12})\|_{L^r(G_2)} \\
&\le \frac{\eta_2}{4} + \|m_1\|_{L^{\frac{p}{p-r}}([-\beta_2,\beta_2])} \left\|\chi_{[-\beta_2,\beta_2]}((m_1)^{-1}\psi_1 - P_{11}) - P_{12}\right\|_{L^p(E_2')} + \frac{\eta_2}{8} \\
&< \frac{\eta_2}{2} + 4\varepsilon_2 < \eta_2.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом, получаем

$$\|\psi_2 - m_1m_2P_{22}\|_{L^r(\mathbb{R})} < \eta_2 \quad (1 \le r \le p).$$

Откуда, для всех s $(l_1(2) \le s < l_2(2))$ и r $(1 \le r \le p)$

$$\left\| m_1m_2 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \left\| m_2 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^r(E_2)} +$$

$$+ \left\| m_1 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k \right\|_{L^r(E_2'\cap[-\beta_2,\beta_2])} +$$

$$+\left\|\Theta m_2 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\Gamma_2)} + \left\|\Theta \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(G_2)} \le$$

$$\le \frac{\eta_2}{8} + \sum_{n=0}^{\beta_2}\left\|m_1 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_2'\cap([n,n+1]\cup[-n-1,-n]))} + \frac{\eta_2}{8} + \frac{\eta_2}{8} <$$

$$< 3\frac{\eta_2}{8} + \sum_{n=0,n\ne 1}^{\beta_2}\left\|m_1 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_2'\cap([n,n+1]\cup[-n-1,-n]))} +$$

$$+\left\|m_1 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_2'\cap[-2,-1])} + \left\|m_1 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_2'\cap[1,2])} \le$$

$$\le 3\frac{\eta_2}{8} + \sum_{n=0,n\ne 1}^{\beta_2} 2^{-nr}\varepsilon_2 + 2^{-1}\varepsilon_2 + 2^{-1}\left(\varepsilon_2 + \|m_1^{-1}\psi_2\|_{L^r(E_2'\cap[1,2])}\right)$$

$$\le 3\frac{\eta_2}{8} + 4\varepsilon_2 + \|\psi_2\|_{L^r(\Delta_2)} < \eta_2 + \|\psi_2\|_{L^p(\Delta_2)}.$$

Из (10) немедленно получаем, что при произвольном $r \in [1,p]$

$$\sup_{l_0(1)\le s<l_1(1)}\left\|m_1 m_2 \sum_{k=l_0(1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \eta_1 + \|\psi_1\|_{L^r(\Delta_1)}.$$

Из условий (12), (13) и определений функций m_1, m_2 следует, что при произвольном r $(1 \le r \le p)$ и произвольном $s(l_0(2) \le s < l_1(2))$

$$\left\|m_1 m_2 \sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \left\|m_1 m_2 \sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_2)} +$$

$$+\left\|m_1 \sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r([-\beta_1,\beta_1]\cap E_1\cap E_2')} + \left\|\sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(([-\beta_1,\beta_1]\setminus E_1)\cap E_2')} +$$

$$+\left\|m_1 \sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\Gamma_1\cap E_2')} + \left\|\Theta m_2 \sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(\Gamma_2)} + \left\|\Theta \sum_{k=l_0(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(G_2)} \le$$

$$\le \frac{\eta_2}{8} + d_1\varepsilon_2 + \|\psi_1 - m_1 P_{11}\|_{L^r(E_1\cap E_2')} + \varepsilon_2 + \|\psi_1 - P_{11}\|_{L^r([-\beta_1,\beta_1]\setminus E_1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\beta_2}\left\|m_1 \sum_{k=l_1(2)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(E_2'\cap([n,n+1]\cup[-n-1,-n]))} + \frac{\eta_2}{8} + \frac{\eta_2}{8} <$$

$$< \frac{\eta_2}{2} + \eta_1 + \sum_{n=1}^{\beta_2} 2^{-n} \left(\varepsilon_2 + \|P_{11}\|_{L^r(E_2^c \cap ([n,n+1] \cup [-n-1,-n]))} \right) <$$

$$< \frac{\eta_2}{2} + \frac{\eta_1}{4} + \varepsilon_2 + \frac{\eta_1}{2} < \eta_1 + \eta_2.$$

Допустим, что мы уже построили полиномы $\{P_{jk}\}_{j=k,k=1}^{n}$

$$P_{jk} = \sum_{i=l_{j-1}(k)}^{l_j(k)-1} a_i \varphi_i ,$$

где
$N = l_0(1) < l_1(1) = l_0(2) < l_1(2) < l_2(2) = l_0(3) < \ldots < l_{n-1}(n-1) = l_0(n) < l_1(n) < \ldots < l_n(n)$ есть натуральные числа, $\beta_k \in \mathbb{R}$, $1 = \beta_1 < \beta_2 < \ldots < \beta_{n+1}$ и $\{m_i\}_{i=1}^{n}$, $0 < m_i(\cdot) \le 1$ – измеримые функции, определенные почти всюду в $\mathbb{R}$, такие, что

$$m_k(t) = d_k \chi_{E_k}(t) + \chi_{[-\beta_k,\beta_k] \setminus E_k}(t) + d'_k \chi_{\Gamma_k}(t) + \chi_{G_k}(t),$$

где

$$E_k \subset [-\beta_k, \beta_k], \quad |E_k| < \delta_k, \quad 1 \le k \le n,$$

$$\Gamma_k = [-\beta_{k+1}, \beta_{k+1}] \setminus [-\beta_k, \beta_k], \quad 1 \le k \le n,$$

$$G_k = \mathbb{R} \setminus [-\beta_{k+1}, \beta_{k+1}],$$

и $0 < d_k < 1$, $0 < d'_k < 1$ $(1 \le k \le n)$ – некоторые маленькие числа, выбранные так, что выполняется

$$\left\| \psi_k - \prod_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=k}^{q} P_{jk} \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \sum_{j=q}^{n} \eta_j, \quad \forall k, k \le q \le n, (14)$$

$$\sup_{l_{k-1}(q) \le s < l_k(q)} \left\| \prod_{i=1}^{n} m_i \sum_{i=l_{k-1}(q)}^{s} a_i \varphi_i \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \eta_q, \quad k < q \le n, (15)$$

$$\sup_{l_{k-1}(k) \le s < l_k(k)} \left\| \prod_{i=1}^{n} m_i \sum_{l_{k-1}(k)}^{s} a_i \varphi_i \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \eta_k + \|\psi_k\|_{L^p(\Delta_k)} (16)$$

для всех k $(1 \le k \le n)$. Допустим, что для произвольного r $(1 \le r \le p)$ $\beta_{n+1} \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+1} > \beta_n$ таковы, что выполняется

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sup_{l_{j-1}(k) \le s \le l_j(k)-1} \left\| \Theta \sum_{i=l_{j-1}(n)}^{s} a_i \varphi_i \right\|_{L^r(G_n)} < \frac{\eta_{n+1}}{8}.$$

Применяя лемму 1 к функциям

$$\left\{\chi_{[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}]}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1}\psi_k - \sum_{j=k}^{n} P_{jk}\right]\right\}_{k=1}^{n} \quad \text{и} \quad \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1}\psi_{n+1},$$

можно найти $E_{n+1} \subset [-\beta_{n+1},\beta_{n+1}]$, $|E_{n+1}| < \delta_{n+1}$ и

$$P_{k(n+1)} = \sum_{i=l_{k-1}(n+1)}^{l_k(n+1)-1} a_i\varphi_i, \quad 1 \le k \le n, \quad l_0(n+1) = l_n(n),$$

такие, что для произвольного $1 \le k \le n$

$$\left\|\chi_{[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}]}\left[\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1}\psi_k - \sum_{j=k}^{n} P_{jk}\right] - P_{k(n+1)}\right\|_{L^p(E'_{n+1})} < \varepsilon_{n+1} \tag{17}$$

и

$$\left\|\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1}\psi_{n+1} - P_{(n+1)(n+1)}\right\|_{L^p(E'_{n+1})} < \varepsilon_{n+1}, \tag{18}$$

где $E'_{n+1} = \mathbb{R} \setminus E_{n+1}$ и для любого измеримого подмножества $D \subseteq E'_{n+1}$ и всех $1 \le k \le n$

$$\sup_{l_{k-1}(n+1) \le s < l_k(n+1)} \left\|\sum_{j=l_{k-1}(n+1)}^{s} a_j\varphi_j\right\|_{L^p(D)} < \varepsilon_{n+1} +$$

$$+ \left\|\chi_{[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}]}\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1}\psi_k - \sum_{j=k}^{n} P_{jk}\right\|_{L^p(D)}, \tag{19}$$

$$\sup_{l_n(n+1) \le s \le l_{n+1}(n+1)-1} \left\|\sum_{k=l_n(n+1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^p(D)} < \varepsilon_{n+1} + \left\|\left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1}\psi_{n+1}\right\|_{L^p(D)} \tag{20}$$

Кроме того, для произвольного r $(1 \le r \le p)$ и $1 \le k \le n$

$$\sup_{l_{k-1}(n+1) \le s \le l_k(n+1)-1} \left\|\sum_{k=l_{k-1}(n+1)}^{s} a_k\varphi_k\right\|_{L^r(D\cap[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}])} <$$

$$< \frac{\eta_{n+1}}{4^p\beta_{n+1}} + \left\| \chi_{[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}]} \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1} \psi_k - \sum_{j=k}^{n} P_{jk} - P_{k(n+1)} \right\|_{L^r(D\cap[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}])},$$

$$\sup_{l_n(n+1)\le s\le l_{n+1}(n+1)-1} \left\| \sum_{i=l_n(n+1)}^{s} a_i\varphi_i \right\|_{L^r(D\cap[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}])} <$$

$$< \varepsilon_{n+1} + \left\| \left(\prod_{i=1}^{n} m_i\right)^{-1} \psi_{n+1} \right\|_{L^r(D\cap[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}])}. \tag{21}$$

Возьмем $\beta_{n+2} \in \mathbb{N}$, $\beta_{n+2} \ge \max[2, 2\beta_{n+1}]$ такое, что для произвольного r $(1 \le r \le p)$

$$\sup_{l_n(n+1)\le s\le l_{n+1}(n+1)-1} \left\| \sum_{i=l_1(2)}^{s} a_i\varphi_i \right\|_{L^r(G_{n+2})} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n+1} \sup_{l_{k-1}(j)\le s\le l_k(j)-1} \left\| \Theta \sum_{i=l_0(j)}^{s} a_i\varphi_i \right\|_{L^r(G_{n+2})} < \eta_{n+2}/8,$$

где $G_{n+1} = \mathbb{R} \setminus [-\beta_{n+2}, \beta_{n+2}]$. Потом определим

$$m_{n+1}(t) = d_{n+1}\chi_{E_{n+1}}(t) + \chi_{[-\beta_{n+1},\beta_{n+1}]\setminus E_{n+1}}(t) + d'_{n+1}\chi_{\Gamma_{n+1}}(t) + \chi_{G_{n+1}}(t)$$

с $\Gamma_{n+1} = [-\beta_{n+2}, \beta_{n+2}] \setminus [-\beta_{n+1}, \beta_{n+1}]$ и

$$d_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}}{8} \left(1 + \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{k} \sup_{l_{j-1}(k)\le s\le l_j(k)-1} \left\| \sum_{i=l_{j-1}(k)}^{s} a_i\varphi_i \right\|_{L^r(E_{n+1})} \right)^{-1},$$

$$d'_{n+1} = \frac{\eta_{n+1}}{8} \left(1 + \sup_{1\le r\le p} \sum_{j=1}^{n+1} \sup_{l_{j-1}(n+1)\le s< l_j(n+1)} \left\| \sum_{k=l_{j-1}(n+1)}^{s} a_k\varphi_k(t) \right\|_{L^r(\Gamma_{n+1})} \right)^{-1}.$$

Следовательно, из определения функции m_{n+1} непосредственно получаем, что для произвольного r $(1 \le r \le p)$

$$\sup_{l_{k-1}(q)\le s< l_k(q)} \left\| \prod_{i=1}^{n+1} m_i \sum_{i=l_{k-1}(q)}^{s} a_i\varphi_i \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \eta_q, \quad k < q \le n,$$

и для всех $k (1 \le k \le n)$

$$\sup_{l_{k-1}(k)\le s< l_k(k)} \left\| \prod_{i=1}^{n+1} m_i \sum_{i=l_{k-1}(k)}^{s} a_i\varphi_i \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \eta_k + \|\psi_k\|_{L^r(\Delta_k)}.$$

Для произвольных k и q таких, что $1 \le k \le q \le n$ имеем

$$\left\|\psi_k - \prod_{i=1}^{n+1} m_i \sum_{j=k}^{q} P_{jk}\right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le \left\|\psi_k - \prod_{i=1}^{n+1} m_i \sum_{j=k}^{q} P_{jk}\right\|_{L^r(E_{n+1})} +$$

$$+ \left\|\psi_k - \prod_{i=1}^{n+1} m_i \sum_{j=k}^{q} P_{jk}\right\|_{L^r(E'_{n+1})} \le$$

$$\le \|\psi_k\|_{L^r(E_{n+1})} + \left\|\prod_{i=1}^{n+1} m_i \sum_{j=k}^{q} P_{jk}\right\|_{L^r(E_{n+1})} +$$

$$+ \left\|\psi_k - \prod_{i=1}^{n} m_i \sum_{j=k}^{q} P_{jk}\right\|_{L^p([-\beta_{n+1},\beta_{n+1}])} + \eta_{n+2}/4 \le \sum_{j=q}^{n+1} \eta_j,$$

Подобным образом проверяем также, что условия (14) - (16) выполняются, когда $k = n+1$. Таким образом, в силу индукции получаем, что условия (14) - (16) выполняются для всех натутальных чисел n. Следовательно, определив

$$m(x) = \prod_{i=1}^{\infty} m_i(x)$$

получаем, что для всех r $(1 \le r \le p)$ и $k \in \mathbb{N}$ выполняются следующие условия

$$\left\|\psi_k - m \sum_{j=k}^{q} P_{jk}\right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le 2^{-q-2}, \quad \forall k, q, \quad k \le q, \tag{22}$$

$$\sup_{l_{k-1}(q) \le s < l_k(q)} \left\| m \sum_{i=l_{k-1}(q)}^{s} a_i \varphi_i \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le 2^{-q-3}, \quad k < q, \tag{23}$$

$$\sup_{l_{k-1}(k) \le s < l_k(k)} \left\| m \sum_{i=l_{k-1}(k)}^{s} a_i \varphi_i \right\|_{L^r(\mathbb{R})} \le 2^{-k-3} + \|\psi_k\|_{L^r(\Delta_k)}. \tag{24}$$

Мы опускаем остальную часть доказательства теоремы 1, так как оно проводится аналогично доказательству теоремы 2 работы [6].

Abstract. Let $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a quasibasis for some $L^p(\mathbb{R})$, $1 \le p < \infty$. Then for every nonnegative integer N a bounded, measurable function m can be found such that $\{m\varphi_n\}_{n=N}^{\infty}$ is a quasibasis for each $L^r(\mathbb{R})$, $1 \le r \le p$. If $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a frame in $L^2(\mathbb{R})$ then for every nonnegative integer N a bounded, measurable function m can be found such that $\{m\phi_n\}_{n=N}^{\infty}$ is a quasibasis for each $L^r(\mathbb{R})$, $1 \le r \le 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Banach. Theory of linear operations, vol. 2, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford-Tokyo, 1987.
2. J. J. Benedetto, S. Li, "The theory of multiresolution analysis frames and applications to filter banks", Appl. Comput. Harmon. Anal. vol. 5, № 4, pp. 389 – 427, 1998.
3. Ole Christensen, An introduction to frames and Riesz bases. Birkhäser, Boston, 2003.
4. R. Duffin, A. Schaeffer, "A class of nonharmonic Fourier series", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 72, pp. 341 – 366, 1952.
5. B. R. Gelbaum, "Notes on Banach spaces and bases", Ann. Acad. Brasil, vol. 30, pp. 29 – 36, 1958.
6. K. S. Kazarian, R. Zink, "Some ramifications of a theorem of Boas and Pollard concerning the completion of a set of functions in L^2", Trans. AMS, vol. 349, pp. 4367 – 4383, 1997.
7. К. С. Казарян, "Замкнутые минимальные системы в общих сепарабельных Банаховых пространствах и в L^p, $1 \leq p < \infty$", Мат. заметки, том 53, стр. 51 – 61, 1993.
8. I. Singer, Bases in Banach spaces. vol. II, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1981.
9. А. А. Талалян, "Представление измеримых функций рядами", Успехи мат. наук, том 15, № 5, стр. 77 – 142, 1960.
10. R. M. Young, An introduction to nonharmonic Fourier series. Pure and Applied Mathematics, 93. Acad. Press, New York-London, 1980.
11. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, второе издание, том 1, "Мир", Москва, 1965.

Поступила 18 марта 2005