Известия НАН Армении. Математика, 40, № 2, 2005, 15–28

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ С ПОТЕНЦИАЛОМ, ИМЕЮЩИМ ОПРЕДЕЛЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

А. А. Асатрян

Ереванский Государственный Университет

Резюме. В пространстве $L^2(\mathbb{R})$ рассматривается оператор Штурма-Лиувилля L с потенциалом, имеющим определеное поведение на бесконечности. Для оператора L вводятся данные рассеяния. Доказывается, что по данным рассеяния оператор L определяется однозначно, и вопрос его восстановления сводится к решению линейного интегрального уравнения.

Рассмотрим на $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ дифференциальную операцию $l(y) = -y'' + qy$, где коэффициент (потенциал) q – вещественная, измеримая функция от переменной $x \in \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{0} |q(x) - a^-|dx + \int_{0}^{\infty} |q(x) - a^+|dx < \infty \tag{1}$$

с некоторыми постоянными $a^\pm \in \mathbb{R}$.

Скажем, что операция l применима к функции $y : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$, если y' абсолютно непрерывна на каждом отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Положим

$$[y(x), z(x)] = i(y(x)\overline{z'(x)} - y'(x)\overline{z(x)})$$

для любых функций y и z на $\mathbb{R}$, к которым применима операция l. Введем также обозначения

$$\mu_0 = -\infty, \quad \mu_1 = \min\{a^+, a^-\}, \quad \mu_2 = \max\{a^+, a^-\}, \quad \mu_3 = \infty,$$

$$\lambda_j^\pm(\mu) = (-1)^{j-1}\sqrt{\mu - a^\pm}, \quad \mu \in \mathbb{C}, \ j = 1, 2$$

(где для корня берется главное значение). Для $\mu \in \mathbb{R}$ обозначим через $r^{\pm}(\mu)$ половину числа вещественных корней уравнения $\lambda^2 + a^{\pm} = \mu$. Очевидно, что функции $r^{+}(\mu)$ и $r^{-}(\mu)$ постоянны в каждом интервале (μ_k, μ_{k+1}), $k = 0, 1, 2$. Для каждого $k = 0, 1, 2$ обозначим через $r_k^{\pm}$ значение функции $r^{\pm}(\mu)$ в интервале (μ_k, μ_{k+1}).

Теорема 1. *Для каждого $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{a^+\}$ (или $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{a^-\}$) уравнение $l(y) = \mu y$ имеет линейно независимые решения $y_1^+(x,\mu)$, $y_2^+(x,\mu)$ (соответственно, $y_1^-(x,\mu)$, $y_2^-(x,\mu)$) такие, что для них и для их производных при $x \to \infty$ (соответственно, при $x \to -\infty$) выполняются следующие асимптотические равенства :*

$$y_j^{\pm}(x,\mu) = e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}[1 + o(1)], \tag{2}$$

$$y_j'^{\pm}(x,\mu) = i\lambda_j^{\pm}(\mu) e^{ix\lambda_j^{\pm}(\mu)}[1 + o(1)]. \tag{3}$$

При этом

1) для любого $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{a^+, a^-\}$ и $j, k = 1, 2$

$$[y_j^{\pm}(x,\mu), y_k^{\pm}(x,\mu)] = \begin{cases} 2\lambda_j^{\pm}(\mu) & \text{при} \quad \lambda_j^{\pm}(\mu) = \overline{\lambda_k^{\pm}(\mu)} \\ 0 & \text{при} \quad \lambda_j^{\pm}(\mu) \neq \overline{\lambda_k^{\pm}(\mu)}. \end{cases}$$

2) для каждого $k = 0, 1, 2$. функции $y_j^+(x,\mu)$, $y_j'^+(x,\mu)$ $(1 \le j \le 1 + r_k^+)$ и $y_j^-(x,\mu)$, $y_j'^-(x,\mu)$ $(2 - r_k^- \le j \le 2)$ непрерывны по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$,

3) функции $y_1^+(x,\mu)$, $y_1'^+(x,\mu)$, $y_2^-(x,\mu)$, $y_2'^-(x,\mu)$ дифференцируемы по $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$, причем производные $\frac{\partial y_1^+(x,\mu)}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y_1'^+(x,\mu)}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y_2^-(x,\mu)}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y_2'^-(x,\mu)}{\partial \mu}$ непрерывны по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in (\mu_0, \mu_1)$,

4) если потенциал q удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{0} (1 - x)|q(x) - a^-|\, dx + \int_0^{\infty} (1 + x)|q(x) - a^+|\, dx < \infty, \tag{4}$$

то для каждого $k = 1, 2$ функции $y_j^+(x,\mu)$, $y_j'^+(x,\mu)$ $(1 \le j \le 1 + r_k^+)$ и $y_j^-(x,\mu)$, $y_j'^-(x,\mu)$ $(2 - r_k^- \le j \le 2)$ дифференцируемы по $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, причем производные $\frac{\partial y_j^+(x,\mu)}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y_j'^+(x,\mu)}{\partial \mu}$ $(1 \le j \le 1 + r_k^+)$ и $\frac{\partial y_j^-(x,\mu)}{\partial \mu}$, $\frac{\partial y_j'^-(x,\mu)}{\partial \mu}$ $(2 - r_k^- \le j \le 2)$ непрерывны по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$.

Доказательство : Наметим его для $y_j^+(x,\mu)$ $(j = 1, 2)$. При $\mathrm{Im}\, \lambda_j^+(\mu) \ge 0$ решения $y_j^+(x,\mu)$ определяются из интегральных уравнений

$$y_j^+(x, \lambda_j^+(\mu)) = e^{i\lambda_j^+(\mu)x} + \frac{1}{\lambda_j^+(\mu)} \int_x^{\infty} \sin\left[\lambda_j^+(\mu)(t - x)\right] q^+(t) y_j^+(t, \lambda_j^+(\mu))\, dt,$$

а. при $\operatorname{Im}\lambda_j^+(\mu) < 0$, из интегральных уравнений

$$y_j^+(x,\lambda_j^+(\mu)) = e^{i\lambda_j^+(\mu)x} - \frac{1}{2i\lambda_j^+(\mu)}\int_a^x e^{-i\lambda_j^+(\mu)(x-t)}q^+(t)y_j^+(t,\lambda_j^+(\mu))\,dt-$$

$$-\frac{1}{2i\lambda_j^+(\mu)}\int_x^\infty e^{-i\lambda_j^+(\mu)(t-x)}q^+(t)y_j^+(t,\lambda_j^+(\mu))\,dt,$$

где число a выбирается достаточно большим. Эти уравнения решаются методом последовательных приближений. Соотношения (2) и (3) и утветждение 1) получаются из этих интегральных уравнений, а остальные утверждения получаются из первого уравнения.

Отметим, что для дифференциальных опереаторов порядка $m \geq 2$ существование решений $y_j^\pm(x,\mu)$ $(j = 1,2)$, удовлетворяющих асимптотическим равенствам (2) и (3) и утверждению 1) теоремы 1, установлено в работе [1].

Действующий в пространстве $L^2(\mathbb{R})$ оператор L определим следующим образом (см. [2], стр. 192). Область D опреления оператора L состоит из всех функций $y \in L^2(\mathbb{R})$, для которых выражение $l(y)$ имеет смысл и $l(y) \in L^2(\mathbb{R})$. Для любого $y \in D$ определим $Ly = l(y)$. При условии (1) оператор L является самосопряженным (см. [1]) и имеет ограниченный точечный спектр. Нами в [3] доказано, что при указанных условиях собственные значения оператора L (если таковые имеются) простые, лежат в интервале $(-\infty,\mu_1]$, и для них предельной точкой может быть только число μ_1. Там же показано, что при условии (4) число собственных значений оператора L конечно и лежат они в интервале $(-\infty,\mu_1)$.

В случае $a^+ = a^- = 0$ обратная задача рассеяния для оператора L была рассмотрена Л. Д. Фаддеевым (см. [4] и [5], стр. 264 – 283), а при $a^+ = a^- \neq 0$ легко приводится к указаному случаю. Поэтому мы будем считать, что $a^+ \neq a^-$.

Для каждого $k = 1,2$ при $\mu \in (\mu_k,\mu_{k+1})$ уравнение $l(\varphi) = \mu\varphi$ имеет k линейно независимых, ограниченных решений $\varphi_j(x,\mu)$ $(x \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq k)$, и для этих решений справедливы асимптотические равенства (см.[6]) :

$$\varphi_j(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=1}^{1+r_k^+}\sqrt{|\lambda_\nu'^+(\mu)|}A_{j\nu}^+(\mu)e^{ix\lambda_\nu^+(\mu)}[1+o(1)], \quad x\to\infty, \tag{5}$$

$$\varphi_j(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{\nu=2-r_k^-}^{2}\sqrt{|\lambda_\nu'^-(\mu)|}A_{j\nu}^-(\mu)e^{ix\lambda_\nu^-(\mu)}[1+o(1)], \quad x\to-\infty.$$

При этом, если обозначить

$$B_{j\nu}(\mu) = \begin{cases} A_{j\nu}^+(\mu) & \text{при} \quad 1 \leq \nu \leq r_k^+ \\ A_{j,\nu-r_k^++r_k^-}^-(\mu) & \text{при} \quad r_k^+ < \nu \leq k, \end{cases}$$

$$C_{j\nu}(\mu) = \begin{cases} A^-_{j\nu}(\mu) & \text{при} \quad 1 \le \nu \le r_k^- \\ A^+_{j,\nu+r_k^+-r_k^-}(\mu) & \text{при} \quad r_k^- < \nu \le k \end{cases}$$

то матрицы

$$B(\mu) = (B_{j\nu}(\mu))_{j,\nu=1}^k, \quad C(\mu) = (C_{j\nu}(\mu))_{j,\nu=1}^k \tag{6}$$

являются невырожденными и связаны соотношением

$$B(\mu)B^*(\mu) = C(\mu)C^*(\mu). \tag{7}$$

В качестве одной из этих матриц можно взять произвольную невырожденную матрицу, а по ней другая матрица и решения $\varphi_j(x,\mu)$ определяются однозначно. Из (7) следует, что если одна из матриц (6) унитарна, то и другая также унитарна.

Лемма 1. *Для матриц (6) справедливы следующие утверждения*

1) если одна из матриц (6) измерима (непрерывна) в интервалах (μ_1, μ_2) и (μ_2, μ_3), то другая измерима (непрерывна) в указанных интервалах,

2) если потенциал q удовлетворяет условию (4) и одна из матриц (6) дифференцируема (непрерывно дифференцируема) в интервалах (μ_1, μ_2) и (μ_2, μ_3), то другая матрица дифференцируема (непрерывно дифференцируема) в указанных интервалах.

Доказательство опирается на теорему 1. При этом получаются явные формулы, выражающие коэффициенты одной из матриц (6) с помощью коэффициентов другой, откуда следует, что указанные свойства одной из матриц (6) переходят к другой.

Замечание 1. При $r_k^+ = 1$ коэффициенты $A^+_{j\nu}(\mu)$, входящие в (5), являются элементами одной из матриц (6), а при $r_k^+ = 0$ – нет. Можно доказать, что в последнем случае измеримость, непрерывность, а при условии (4) также дифференцируемость и непрерывная дифференцируемость одной из матриц (6) переносится и на эти коэффициенты. Сказанное верно также и для коэффициентов $A^-_{j\nu}(\mu)$.

Впредь будем предполагать, что матрицы $B(\mu)$ и $C(\mu)$ унитарны, а их элементы измеримые функции : в частности в качестве одной из них можно взять единичную матрицу. При такой нормировке систему решений $\varphi_j(x,\mu)$ $(\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}),\ 1 \le j \le k)$ будем называть нормированной системой обобщенных собственных функций оператора L, соответствущей значению μ.

Введем матрицы

$$A^+(\mu) = (A^+_{j\nu}(\mu))_{1 \le j \le k,\ 1 \le \nu \le 1+r_k^+}, \quad A^-(\mu) = (A^-_{j\nu}(\mu))_{1 \le j \le k,\ 2-r_k^- \le \nu \le 2}.$$

Для $x \in \mathbb{R}$ и $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$ $(k = 1, 2)$ обозначим через $\varphi(x, \mu)$ вектор-столбец, состоящий из решений $\varphi_j(x, \mu)$ $(1 \le j \le k)$.

Лемма 2. *Если функции $\varphi_j(x, \mu)$ $(\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}),\ 1 \le j \le k)$ составляют нормированную систему обобщенных собственных функций оператора L, то для любой измеримой унитарной матрицы $U(\mu) = (U_{ij}(\mu))_1^k$, функции $\tilde{\varphi}_j(x, \mu)$ $(\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}),\ 1 \le j \le k)$, определямые из соотношения*

$$\tilde{\varphi}(x, \mu) = U(\mu)\varphi(x, \mu) \quad (\tilde{\varphi}(x, \mu) = (\tilde{\varphi}_j(x, \mu))_{1 \le j \le k}), \tag{8}$$

составляют нормированную систему обобщенных собственных функций оператора L.

Обратно, для любых нормированных систем $\varphi_j(x, \mu)$ и $\tilde{\varphi}_j(x, \mu)$ $(\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}),\ 1 \le j \le k)$ обобщенных собственных функций L, существует единственная измеримая унитарная матрица $U(\mu) = (U_{ij}(\mu))_{i,j=1}^k$ такая, что имеет место (8). При этом справедливы равенства

$$\tilde{A}^{\pm}(\mu) = U(\mu)A^{\pm}(\mu), \quad \tilde{B}(\mu) = U(\mu)B(\mu), \quad \tilde{C}(\mu) = U(\mu)C(\mu).$$

Доказательство несложное и непосредственно следует из соответствующих определений.

Если оператор L имеет собственные значения, рассмотрим также некоторую ортонормированную систему собственных функций $\{\psi_j, j = 1, 2, \dots\}$ оператора L, полную в замыкании линейной оболочки всех собственных функций оператора L. Ясно, что если точечный спектр T оператора L конечный (счетный), то система собственных функций ψ_j тоже конечна (счетна). Так как собственные значения оператора L простые, то каждому собственному значению L отвечает в точности одна собственная функция из системы $\{\psi_j : j = 1, 2, \dots\}$.

Согласно результам [6] для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо разложение Фурье :

$$f(x) = \sum_j \psi_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_j(t)}\, dt + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{k} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} F_j(\mu)\varphi_j(x, \mu)d\mu \quad (x \in \mathbb{R}), \tag{9}$$

а также для любых функций $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ справедливо обобщенное равенство Парсеваля :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, dx = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi_j(t)}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)}\psi_j(t)\, dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=1}^{k}\int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} F_j(\mu)\overline{G_j(\mu)}\,d\mu, \tag{10}$$

где

$$F_j(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\varphi_j(t,\mu)}\,dt, \quad G_j(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\overline{\varphi_j(t,\mu)}\,dt, \tag{11}$$

причем последний интеграл в (9) сходится по норме пространствс $L^2(\mathbb{R})$, а интегралы (11) при $\mu\in(\mu_k,\mu_{k+1})$ сходятся по норме пространства $L^2(\mu_k,\mu_{k+1})$ (в случае отсутствия собственных значений оператора L первые суммы в (9) и (10) отсутствуют).

Теперь, опираясь на асимптотические поведения обобщенных и обычных собственных функций, введем данные рассеяния для оператора L. Для $\mu\in(\mu_k,\mu_{k+1})$ и $1\le j,\ \nu\le 1+r_k^+$ $(k=1,2)$ обозначим

$$S_{j\nu}^+(\mu)=\sum_{l=1}^{k}\sqrt{|\lambda_\nu'^+(\mu)|}\sqrt{|\lambda_j'^+(\mu)|}A_{l\nu}^+(\mu)\overline{A_{lj}^+(\mu)} \tag{12}$$

и рассмотрим квадратную матрицу $S^+(\mu)=(S_{j\nu}^+(\mu))_{j,\nu=1}^{1+r^+(\mu)}$ порядка $1+r^+(\mu)$. По лемме 2, эта матрица не зависит от выбора нормированной системы обобщенных собственных функций. Следовательно, из леммы 1 и замечания 1 следует, что при условии (1) матрица-функция S^+ непрерывна, а при условии (4) она непрерывно дифференцируема в интервалах (μ_1,μ_2) и (μ_2,μ_3).

Обозначим через T точечный спектр оператора L. Пусть $\mu\in T$, а ψ – соответствующая нормированная собственная функция. Тогда имеет место асимптотическое равенство

$$\psi(x,\mu)=c^+(\mu)e^{ix\lambda_1^+(\mu)}[1+o(1)], \quad x\to\infty, \tag{13}$$

где $c^+(\mu)$ – ненулевое комплексное число. Легко видеть, что числа

$$N^+(\mu)=|c^+(\mu)|^2 \quad (\mu\in T) \tag{14}$$

не зависят от выбора нормированных собственных функций ψ.

Рассмотрим набор данных

$$\{T,\ N^+(\mu)\ (\mu\in T),\ S^+(\mu)\ (\mu\in(\mu_1,\mu_2)\cup(\mu_2,\mu_3))\}, \tag{15}$$

называемых *правыми данными рассеяния оператора* L.

Обратная задача рассеяния для оператора L состоит в восстановлении оператора L по данным (15). Известно (см. [5], стр. 162-166), что если для каждого $a \in \mathbb{R}$ функция q удовлетворяет условию

$$\int_a^\infty (1+|x|)|q(x)-a^+|\,dx < \infty$$

с некоторым числом $a^+ \in \mathbb{R}$, то для всякого числа $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\lambda \geq 0$ уравнение $l(y) = (\lambda^2 + a^+)y$ имеет решение $y^+(x,\lambda)$ такое, что верны представления

$$\begin{aligned} y^+(x,\lambda) &= e^{i\lambda x} + \int_x^\infty e^{i\lambda t} K^+(x,t)\,dt \quad (-\infty < x < \infty), \\ e^{i\lambda x} &= y^+(x,\lambda) + \int_x^\infty y^+(t,\lambda) H^+(x,t)\,dt \quad (-\infty < x < \infty). \end{aligned} \tag{16}$$

При этом ядра $K^+(x,t)$ и $H^+(x,t)$ $(-\infty < x \leq t < \infty)$ не зависят от λ, вещественны, непрерывны по совокупности переменных x, t, связаны соотношениями

$$H^+(x,t) + K^+(x,t) + \int_x^t H^+(x,\xi)K^+(\xi,t)\,d\xi = 0, \tag{17}$$

$$K^+(x,t) + H^+(x,t) + \int_x^t K^+(x,\xi)H^+(\xi,t)\,d\xi = 0, \tag{18}$$

и удовлетворяют оценкам

$$|K^+(x,t)| \leq \frac{1}{2}h^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left[h_1^+(x) - h_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\right], \tag{19}$$

$$\begin{gathered} |H^+(x,t)| \leq \frac{1}{2}h^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\times \\ \times\exp\left\{h_1^+(x) - h_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right) + \exp\left[h_1^+(x) - h_1^+\left(\frac{x+t}{2}\right)\right] - 1\right\} \end{gathered} \tag{20}$$

где $-\infty < x \leq t < \infty$ и

$$h^+(x) = \int_x^\infty |q(t) - a^+|\,dt, \quad h_1^+(x) = \int_x^\infty h^+(t)\,dt.$$

Если для $a \in \mathbb{R}$ и $1 \leq p \leq \infty$ обозначить

$$(K_a^+ f)(x) = \int_x^\infty K^+(x,t)f(t)\,dt \quad (f \in L^p(a,\infty),\ x > a),$$

$$(H_a^+ f)(x) = \int_x^\infty H^+(x,t)f(t)\,dt \quad (f \in L^p(a,\infty),\ x > a),$$

то операторы K_a^+, H_a^+ являются ограниченными в $L^p(a, \infty)$, оператор $I + K_a^+$ обратим и имеет место равенство

$$(I + K_a^+)^{-1} = I + H_a^+. \tag{21}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$K^+(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty (q(t) - a^+)\, dt. \tag{22}$$

Ниже всюду условие (4) предполагается выполненным.

По аналогии с работами [7], [8], с помощью данных рассеяния введем функцию

$$\widetilde{F}^+(x, t) = \sum_{\mu \in T} \frac{N^+(\mu)}{|\lambda_1^+(\mu)|^2} \left(e^{ix\lambda_1^+(\mu)} - 1\right)\left(e^{it\lambda_1^+(\mu)} - 1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_{\mu_1}^{\infty} \sum_{\nu, j=1}^{1+r^+(\mu)} \frac{S_{j\nu}^+(\mu)}{\lambda_\nu^+(\mu)\overline{\lambda_j^+(\mu)}} \left(e^{ix\lambda_\nu^+(\mu)} - 1\right)\left(\overline{e^{it\lambda_j^+(\mu)}} - 1\right) d\mu - \omega(x, t) \quad (x, t \in \mathbb{R}), \tag{23}$$

где

$$\omega(x, t) = \begin{cases} \min\{|x|, |t|\} & \text{при} \quad xt \geq 0, \\ 0 & \text{при} \quad xt < 0. \end{cases}$$

Согласно вышесказанному, точечный спектр T оператора L конечен. Поэтому, первая сумма в (23) содержит конечное число слагаемых. Так как $T \subset (-\infty, \mu_1)$, то при $\mu \in T$ числа $\lambda_1^+(\mu)$ лежат в верхней части мнимой оси. Следовательно, указанная сумма вещественна. Ниже мы увидим, что в (23) интеграл справа сходится в обычном смысле.

Теорема 2. *Существует непрерывная производная*

$$F^+(x, t) = \frac{\partial^2 \widetilde{F}^+(x, t)}{\partial x \partial t}, \quad x, t \in \mathbb{R}$$

причем функция $F^+(x, t)$ вещественна, симметрична :

$$F^+(x, t) = F^+(t, x) \quad (x, t \in \mathbb{R}), \tag{24}$$

и связана с ядром $H^+(x, t)$ представления (16) соотношениями,

$$F^+(x, t) = H^+(x, t) + \int_t^\infty H^+(x, \xi) H^+(t, \xi)\, d\xi \quad (-\infty < x \leq t < \infty), \tag{25}$$

$$F^+(x, t) = H^+(t, x) + \int_x^\infty H^+(x, \xi) H^+(t, \xi)\, d\xi \quad (-\infty < t \leq x < \infty). \tag{26}$$

Доказательство : Для $\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})$, $1 \le l \le k$ $(k = 1, 2)$ обозначим

$$F_N^+(x,t,\mu) = N^+(\mu) e^{ix\lambda_1^+(\mu)} e^{it\lambda_1^+(\mu)} \quad (\mu \in T), \tag{27}$$

$$v_l(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{1+r^+(\mu)} \sqrt{|\lambda_\nu'^+(\mu)|} A_{l\nu}^+(\mu) e^{ix\lambda_\nu^+(\mu)}. \tag{28}$$

Заметим, что

$$\frac{N^+(\mu)}{|\lambda_1^+(\mu)|^2}\left(e^{ix\lambda_1^+(\mu)} - 1\right)\left(e^{it\lambda_1^+(\mu)} - 1\right) = \int_0^x \int_0^t F_N^+(\xi,\eta,\mu)\, d\eta\, d\xi \quad (\mu \in T).$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{\nu,j=1}^{1+r^+(\mu)} \frac{S_{j\nu}^+(\mu)}{\lambda_\nu^+(\mu)\overline{\lambda_j^+(\mu)}}\left(e^{ix\lambda_\nu^+(\mu)} - 1\right)\left(\overline{e^{it\lambda_j^+(\mu)}} - 1\right) =$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \int_0^x v_l(\xi,\mu)\, d\xi \int_0^t \overline{v_l(\eta,\mu)}\, d\eta \quad (\mu \in (\mu_k, \mu_{k+1}),\ k = 1, 2)$$

(при получении первого равенства надо учитывать что $|\lambda_1^+(\mu)|^2 = -[\lambda_1^+(\mu)]^2$ в силу вещественности $i\lambda_1^+(\mu)$). Поэтому выражение (23) принимает следующий вид

$$\widetilde{F}^+(x,t) = \sum_{\mu \in T} \int_0^x \int_0^t F_N^+(\xi,\eta,\mu)\, d\eta\, d\xi +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{k} \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \left[\int_0^x v_l(\xi,\mu)\, d\xi \int_0^t \overline{v_l(\eta,\mu)}\, d\eta\right] d\mu - \omega(x,t). \tag{29}$$

Из (13) следует, что

$$\psi(x,\mu) = c^+(\mu) y^+(x, \lambda_1^+(\mu)), \tag{30}$$

откуда, в силу вещественности функции $y^+(x, \lambda_1^+(\mu))$, получим

$$\overline{\psi(x,\mu)} = \overline{c^+(\mu)} y^+(x, \lambda_1^+(\mu)). \tag{31}$$

Далее, в силу (27) и (16) имеем

$$F_N^+(x,t,\mu) = N^+(\mu)\left[y^+(x,\lambda_1^+(\mu)) + \int_x^\infty y^+(\xi,\lambda_1^+(\mu)) H^+(x,\xi)\, d\xi\right] \times$$

$$\times \left[y^+(t,\lambda_1^+(\mu)) + \int_t^\infty y^+(\eta,\lambda_1^+(\mu)) H^+(t,\eta)\, d\eta\right].$$

Следовательно, в силу (14), (30) и (31) получим

$$F_N^+(x,t,\mu) = \left[\psi(x,\mu) + \int_x^\infty \psi(\xi,\mu) H^+(x,\xi)\, d\xi\right] \times$$

$$\times \left[\overline{\psi(t,\mu)} + \int_t^\infty \overline{\psi(\eta,\mu)} H^+(t,\eta)\, d\eta\right]. \tag{32}$$

Из (5) следует, что

$$\varphi_l(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=1}^{1+r^+(\mu)} \sqrt{|\lambda'^{\,+}_\nu(\mu)|} A^+_{l\nu}(\mu) y^+(x,\lambda^+_\nu(\mu)).$$

Откуда, с учетом (28) и (16), получим

$$v_l(x,\mu) = \varphi_l(x,\mu) + \int_x^\infty \varphi_l(\xi,\mu) H^+(x,\xi)\, d\xi \quad (1 \le l \le k, \quad \mu \in (\mu_k, \mu_{k+1})). \tag{33}$$

Введем функцию

$$f_x(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \xi < 0, \\ 1 + \int_0^\xi H^+(\eta,\xi)\, d\eta & \text{при} \quad 0 \le \xi < x, \\ \int_0^x H^+(\eta,\xi)\, d\eta & \text{при} \quad \xi \ge x \end{cases} \qquad (x \ge 0),$$

$$f_x(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \xi < x, \\ -1 - \int_x^\xi H^+(\eta,\xi)\, d\eta & \text{при} \quad x \le \xi < 0, \\ \int_0^x H^+(\eta,\xi) d\eta & \text{при} \quad \xi \ge 0 \end{cases} \qquad (x < 0)$$

Интегрируя равенства (32) и (33), получим

$$\int_0^x \int_0^t F_N^+(\xi,\eta,\mu)\, d\eta\, d\xi = \int_{-\infty}^\infty \psi(\xi,\mu) f_x(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^\infty \overline{\psi(\xi,\mu)} f_t(\xi)\, d\xi,$$

$$\int_0^x v_l(\xi,\mu)\, d\xi = \int_{-\infty}^\infty \varphi_l(\xi,\mu) f_x(\xi)\, d\xi.$$

Учитывая эти соотношения, равенство (29) перепишем в виде

$$\widetilde{F}^+(x,t) = \sum_{\mu \in T} \int_{-\infty}^\infty \psi(\xi,\mu) f_x(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^\infty \overline{\psi(\xi,\mu)} f_t(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^k \int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}} \left[\int_{-\infty}^\infty \varphi_l(\xi,\mu) f_x(\xi)\, d\xi \int_{-\infty}^\infty \overline{\varphi_l(\xi,\mu)} f_t(\xi)\, d\xi\right] d\mu - \omega(x,t). \tag{34}$$

В силу оценки (20), $f_x(.) \in L^2(\mathbb{R})$ при каждом $x \in \mathbb{R}$. Учитывая это и обобщенное равенство Парсеваля (10), из (34) получим

$$\widetilde{F}^+(x,t) = \int_{-\infty}^\infty f_x(\xi) f_t(\xi)\, d\xi - \omega(x,t).$$

Из этой формулы следует, что смешанная производная $F^+(x,t) = \frac{\partial^2 \widetilde{F}^+(x,t)}{\partial x \partial t}$ непрерывна в $\mathbb{R}^2$ и для нее справедливы соотношения (25) и (26). Вещественность и симметричность F^+ следует из этих соотношений. Доказательство завершено.

Теорема 3. *Функция $F^+(x,t)$ связана с ядром $K^+(x,t)$ соотношениями*

$$F^+(x,t) + K^+(x,t) + \int_x^\infty K^+(x,\xi)F^+(\xi,t)\,d\xi = 0 \quad (-\infty < x \le t < \infty), \tag{35}$$

$$F^+(x,t) + \int_x^\infty K^+(x,\xi)F^+(\xi,t)\,d\xi = H^+(t,x) \quad (-\infty < t \le x < \infty). \tag{36}$$

Доказательство : Фиксируем произвольное $a \in \mathbb{R}$. В пространстве $L^2(a,\infty)$ рассмотрим операторы K_a^+, H_a^+ и оператор F_a^+, определяемый равенством

$$(F_a^+ f)(x) = \int_a^\infty F^+(x,t)f(t)\,dt \quad (f \in L^2(a,\infty),\ x > a).$$

В силу соотношений (25), (26) и оценки (20), существует убывающая на $[a,\infty)$, суммируемая функция σ такая, что

$$|F^+(x,t)| \le \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right) \quad (a \le x,t < \infty). \tag{37}$$

Отсюда следует, что оператор F_a^+ ограничен. Из (25) и (26) следует, что

$$I + F_a^+ = (I + H_a^+)(I + H_a^{*+}), \tag{38}$$

а из (38) и (21) следует, что

$$K_a^+ + F_a^+ + K_a^+ F_a^+ = H_a^{*+}.$$

Отсюда, переходя к соответствующим ядрам, получаем

$$F^+(x,t) + K^+(x,t) + \int_x^\infty K^+(x,\xi)F^+(\xi,t)\,d\xi = 0 \quad (a < x \le t < \infty), \tag{39}$$

$$F^+(x,t) + \int_x^\infty K^+(x,\xi)F^+(\xi,t)\,d\xi = H^+(t,x) \quad (a < t \le x < \infty). \tag{40}$$

Равенства (35) и (36) следуют из (39) и (40), так как a произвольное. Доказательство завершено.

Лемма 3. *При каждом $x \in \mathbb{R}$ функция $K^+(x,\cdot)$ является единственным решением уравнения (35) в любом пространстве $L^p(x,\infty)$ $(1 \le p \le \infty)$.*

Доказательство : Для каждого $x \in \mathbb{R}$, в любом из пространств $L^p(0,\infty)$ рассмотрим интегральные операторы :

$$(K_x f)(\xi) = \int_\xi^\infty K^+(x+\xi, x+\eta)f(\eta)\,d\eta \quad (\xi > 0).$$

$$(K_x^* f)(\xi) = \int_0^\xi K^+(x+\eta, x+\xi) f(\eta)\, d\eta \quad (\xi > 0),$$

$$(H_x f)(\xi) = \int_\xi^\infty H^+(x+\xi, x+\eta) f(\eta)\, d\eta \quad (\xi > 0),$$

$$(H_x^* f)(\xi) = \int_0^\xi H^+(x+\eta, x+\xi) f(\eta)\, d\eta \quad (\xi > 0),$$

$$(G_x f)(\xi) = \int_0^\infty F^+(x+\xi, x+\eta) f(\eta)\, d\eta \quad (\xi > 0).$$

В силу оценок (19), (20) и (37) для функций $K^+(x,t)$, $H^+(x,t)$ и $F^+(x,t)$, операторы K_x, K_x^*, H_x, H_x^* и G_x ограничены. Ясно, что в случае $p = 2$ операторы K_x^* и H_x^* являются сопряженными к операторам K_x и H_x.
Из равенств (17) и (18) следует, что

$$(I + H_x)(I + K_x) = I, \quad (I + K_x)(I + H_x) = I,$$

т.е. оператор $I + H_x$ обратим, и имеет место равенство

$$(I + H_x)^{-1} = I + K_x. \tag{41}$$

Аналогично, оператор $I + H_x^*$ обратим, и имеет место равенство

$$(I + H_x^*)^{-1} = I + K_x^*. \tag{42}$$

Из (25) и (26) легко следует, что

$$I + G_x = (I + H_x)(I + H_x^*).$$

Отсюда с учетом (41), (42) получим, что оператор $I + G_x$ обратим. Теперь покажем, что уравнение (35) в классе $L^p(x,\infty)$ не может иметь более одного решения. В самом деле, пусть для некоторых функций $g_j \in L^p(x,\infty)$ $(j = 1,2)$ имеют место

$$g_1(t) + F^+(x,t) + \int_x^\infty g_1(\xi) F^+(\xi,t)\, d\xi = 0 \quad (x < t < \infty),$$

$$g_2(t) + F^+(x,t) + \int_x^\infty g_2(\xi) F^+(\xi,t)\, d\xi = 0 \quad (x < t < \infty).$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$g_1(t) - g_2(t) + \int_x^\infty [g_1(\xi) - g_2(\xi)] F^+(\xi,t)\, d\xi = 0 \quad (x < t < \infty). \tag{43}$$

Обозначим $g(u) = g_1(u+x) - g_2(u+x)$ $(u > 0)$. Тогда, с учетом (24), равенство (43) можем переписать в виде

$$g(t-x) + \int_x^\infty F^+(t,\xi)g(\xi - x)d\xi = 0 \quad (x < t < \infty),$$

которое, после замены переменных $u = t - x$ и $v = \xi - x$, преобразуется к виду

$$g(u) + \int_0^\infty F^+(u+x, v+x)g(v)dv = 0 \quad (0 < u < \infty)$$

или

$$(I + G_x)g = 0.$$

Из последнего, в силу обратимости оператора $I + G_x$, следует, что $g(u) = 0$ $(0 < u < \infty)$, т.е.

$$g_1(u+x) - g_2(u+x) = 0 \quad (0 < u < \infty).$$

Полагая здесь $u = t - x$ $(x < t < \infty)$, получим

$$g_1(t) = g_2(t) \quad (x < t < \infty).$$

Лемма доказана.

Доказанная лемма показывает, что с помощью правых данных рассеяния ядро $K^+(x,t)$ восстановится однозначно. Пользуясь этим, покажем, что по правым данным рассеяния потенциал q востановится однозначно. В самом деле, в силу унитарности матриц (6) при $\mu > \mu_1$ из (12) имеем

$$S_{11}^+(\mu) = \lambda_1'^+(\mu) = \frac{1}{2\sqrt{\mu - a^+}}.$$

Следовательно, по правым данным рассеяния постоянная a^+ определяется по формуле

$$a^+ = \lim_{\mu\to\infty}\left[\mu - \frac{1}{4[S_{11}^+(\mu)]^2}\right].$$

Из (22) следует, что

$$q(x) = a^+ - 2\frac{d}{dx}K^+(x,x),$$

поэтому потенциал q по правым данным рассеяния восстанавливается однозначно. Вопрос практического нахождения q сводится к решению линейного интегрального уравнения (35).

Автор выражает глубокую благодарность профессору И. Г. Хачатряну за постановку задачи и полезные обсуждения результатов.

Abstract. Sturm-Liouville operators L with certain special behavior of the potential at infinity are considered in the space $L^2(\mathbb{R})$. It is proved that L is uniquely determined by its scattering data. Recovery of L is reduced to solving several linear integral equation.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Петросян, "Исследование точечного спектра самосопряженного дифференциального оператора с коэффициентами, имеющими определенные поведения на бесконечности", Уч. зап. ЕГУ, № 3, стр. 8 – 15, 2003.
2. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, Москва, 1969.
3. А. А. Асатрян, "Исследование точечного спектра оператора Штурма-Лиувилля с потенциалом, имеющим определенное поведение на бесконечности", Уч. зап. ЕГУ, № 1, стр. 23 – 28, 2006.
4. Л. Д. Фаддеев, "Свойства S-матрицы одномерного уравнения Шредингера", Труды Мат. инст. АН СССР, том 73, стр. 314 – 336, 1964.
5. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Наукова Думка, Киев, 1977.
6. А. Г. Петросян, И. Г. Хачатрян, "О разложении по собственным функциям самосопряженного оператора с коэффициентами, имющими определенные поведения на бесконечности", Уч. зап. ЕГУ, № 1, стр. 22 – 27, 2004.
7. И. Г. Хачатрян, "Об одной обратной задаче для дифференциальных операторов высших порядков на всей оси", Изв. АН АрмССР, Математика, том 18, № 5, стр. 394 – 402, 1983.
8. С. В. Бабасян, "Об обратной задаче рассеяния для дифференциальных операторов высших порядков на полуоси", Уч. зап. ЕГУ, № 3(171), стр. 26 – 32, 1989.

Поступила 14 апреля 2005