Известия НАН Армении. Математика, 40, № 2, 2005, 47-60

ОБ ОДНОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНДЕКСА ФУНКЦИИ

Г. А. Григорян

Бюраканская Астрофизическая Обсерватория

Резюме. В статье приводится новый численный метод вычисления индекса функции : для данной функции $F(x)$ по $F_1(x) = F(X)/|F(x)| : [a,b] \longrightarrow C$, строится непрерывная, кусочно-линейная функция $F_2(x)$, совпадающая с $F_1(x)$ в узлах разбиения x_k отрезка $[a,b]$, с любым диаметром разбиения таким, что изменение функции $F_1(x)$ на отрезках $[x_k, x_{k+1}]$ $(k = \overline{1,n})$ меньше, чем 2. Затем по точкам пересечения графика функции $F_2(x)$ с осями координат по специальному конечному алгоритму находится индекс функции $F(x)$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $\Omega_{a,b}$ множество комплекснозначных функций $F(x)$, заданных на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющих условиям :

А) $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$,

Б) $F(x) \neq 0$, $x \in [a,b]$,

В) $F(a) = F(b)$.

В силу этих условий для $F(x)$ определен индекс :

$$\operatorname{ind} F(x) = \frac{1}{2\pi}[\arg F(x)]_{x=a}^{b}. \tag{1.1}$$

Здесь $[X(x)]_{x=a}^{b}$ обозначает приращение $X(x)$ при изменении значения x от a до b. Если L – кусочно-гладкий замкнутый контур (простой или составной), а $E(t)$ – непрерывная, не обращающаяся в нуль функция на L, то задача нахождения индекса $E(t)$ (определение ind $E(t)$ аналогично (1.1), см. [1], стр. 101, [2], стр. 146, [3], стр. 108) с помощью подходящей параметризации кривой L сводится к задаче нахождения индекса функции $F(x) = E(t(x)) \in \Omega_{a,b}$.

Индекс является важной характеристикой сингулярных интегральных операторов (см. [1], стр. 176, 190, [2], стр. 195, [3], стр. 12), дискретных и интегральных операторов Винера–Хопфа (см. [3], стр. 12, 66, 108). Он применяется в задачах локализации нулей и полюсов мероморфных функций ([4], стр. 295-298, принцип аргумента, [5], стр. 110) ; а также при изучении характера устойчивости особой точки (точки покоя) динамической системы на плоскости ([5], теорема 13.5, стр. 151, [7], формула (2.5) и следствие (2.8), стр. 211, 212) и т.д. (более подробно об этих и других приложениях см. в [5]).

Существуют алгебраические алгоритмы, позволяющие найти индекс функции в некоторых частных случаях (см., например, [1], задачи 1,2,3, стр. 167-168, [5], стр. 70-92, [6], стр. 420-429 и 446-453).

Если функция $F(x)(\in \Omega_{a,b})$ имеет конечную вариацию, то в некоторых случаях для вычисления $\operatorname{ind} F(x)$ применяют формулу ([1], p. 103)

$$\operatorname{ind} F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\operatorname{Re} F(x)d(\operatorname{Im}(x)) - \operatorname{Im} F(x)d(\operatorname{Re} F(x))}{|F(x)|^2}. \tag{1.2}$$

В общем случае для вычисления индекса используют численные методы. Среди них своей общностью и простотой выделяется метод Л. А. Чикина ([1], стр. 104-105), который состоит в следующем. Отрезок $[a,b]$ изменения параметра x разбивается точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ на n равных частей. В результате чего контур L и кривая Γ (образ кривой L при отображении $E(t)$) разбивается на n дуг. Пусть $\gamma_j(j = \overline{1,n})$ – дуги кривой Γ и пусть $E(t(X_{j-1}) = (\xi_{j-1}, \eta_{j-1} = \xi + i\eta_{j-1}$, $E(t(x_j,)) = (\xi_j, \eta_j)$ - концы дуги $\gamma_j(j = \overline{1,n})$. Показывается, что тогда

$$\operatorname{ind} E(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j\eta_{j-1} - \xi_{j-1}\eta_j}{\sqrt{\xi_{j-1}^2 + \eta_{j-1}^2}\sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}} + R_n,$$

где R_n – погрешность. Пусть $t(x) = t_1(x) + it_2(x)$ – параметрическое уравнение кривой L, и пусть $t_1(x)$, $t_2(x)$ удовлетворяют условию Гельдера с показателем α, а функция $E(t)$ – тому же условию с показателем β. Доказывается, что если $\alpha\beta > \frac{1}{3}$, то $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$. Следовательно, при этих предположениях в качестве расчетной формулы можно брать следующую :

$$\operatorname{ind} E(x) \approx \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_j\eta_{j-1} - \xi_{j-1}\eta_j}{\sqrt{\xi_{j-1}^2 + \eta_{j-1}^2}\sqrt{\xi_j^2 + \eta_j^2}}.$$

В настоящей работе мы приводим новый метод вычисления индекса функции, в котором на параметризацию $t(x)$ других условий кроме непрерывности не ставится. А именно, пусть

$$F(x) \in \Omega_{a,b} \quad \text{и} \quad F_1(x) = \frac{F(x)|F(a)|}{|F(x)|F(a)},$$

Очевидно, что $\operatorname{ind} F(x) = \operatorname{ind} F_1(x)$. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на части точками $x_1 = a < x_2 < \ldots < x_n = b$ так, чтобы для произвольных x' и x'' и произвольного $k = \overline{1, n-1}$ выполнялось

$$|F_1(x') - F_1(x'')| < 2. \tag{1.3}$$

Пусть $F_2(x)$ – непрерывная, линейная на каждом отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ $(k = \overline{1, n-1})$ функция, совпадающая с $F_1(x)$ в точках x_k. Рассмотрим следующую совокупность систем

$$\begin{cases} \operatorname{Re} F_2(x) = 0 \\ x \in \Delta_k \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{Im} F_2(x) = 0 \\ x \in \Delta_k \end{cases}, \quad k \in \left\{ s : F_1(x_s) \neq F_1(x_{s+1}),\ s = \overline{1, n-1} \right\},$$

где $\Delta_k = [x_k; x_{k+1})$ и $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$ при $k = \overline{1, n-1}$. Доказывается, что при этих предположениях, эта совокупность имеет конечное число решений, которые мы называем *базовыми точками функции*

$$G(x) = \frac{F_2(x)}{|F_2(x)|}.$$

Пусть мы нашли эти решения : $a = \xi_1 < \ldots < \xi_m = b$ тогда $\operatorname{ind} F(x) = 0$, если $m < 5$. Если $m \geq 5$, то рассмотрим вектор $I_G = (G(\xi_1), \ldots, G(\xi_m))$ который мы назовем *индикатором функции* $G(x)$ (видно, что $G(\xi_k) \in \{\pm 1, \pm i\}$, $k = \overline{1, m}$). Чтобы по этому индикатору найти значение $\operatorname{ind} F(x)$, используем два типа операций, осуществляемых над I_G. Их мы называем *сокращениями первого и второго типа*. Сокращение первого типа состоит в том, что если $G(\xi_p) = G(\xi_{p+1})$ для некоторого p, то отбрасывается компонента $G(\xi_{p+1})$, уменьшая тем самым число компонент на 1, т.е. вектор $(G(\xi_1), \ldots G(\xi_p), G(\xi_{p+1}), G(\xi_{p+2}), \ldots, G(\xi_m))$ заменяется вектором $(G(\xi_1), \ldots G(\xi_p), G(\xi_{p+2}), \ldots, G(\xi_m))$. Сокращение второго типа заключается в уменьшении числа компонент I_G сразу на 2, отбрасыванием компонент $G(\xi_{p+1})$ и $G(\xi_{p+2})$, при условии, что $G(\xi_p) = G(\xi_{p+2})$. Применяя эти операции, мы за конечное число шагов получим вектор или длины меньше, чем 5, и тогда $\operatorname{ind} F(x) = 0$, или одного из следующих видов

$$I_+ = (1, i, -1, -i, 1, i, \ldots, 1), \quad I_- = (1, -i, -1, i, 1, -i, \ldots, 1).$$

Тогда $\operatorname{ind} F(x) = \pm \dfrac{|I_\pm| - 1}{4}$, где $|I_\pm|$ – число компонент в $I_\pm$.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Определение 2.1. Говорим, что функции F_1 и F_2 из класса $\Omega = \bigcup_{a<b\in R} \Omega_{a,b}$ эквивалентны и пишем $F_1 \sim F_2$, если $\operatorname{ind} F_1(x) = \operatorname{ind} F_2(x)$.

Очевидно, что отношение $\sim$ является отношением эквивалентности. Пусть $\Omega^\circ_{a,b}$ – подмножество $\Omega_{a,b}$, состоящее из функций $F(x)$, удовлетворяющих условиям

A° $|F(x)| \equiv 1$, $x \in [a,b]$,

$Б^\circ$ $F(a) = F(b) = 1$,

$В^\circ$ уравнения $\mathrm{Re}\, F(x) = 0$ и $\mathrm{Im}\, F(x) = 0$ имеют конечное число решений в $[a,b]$.

Пусть $F \in \Omega^\circ_{a,b}$ и пусть $\xi_1 < \ldots < \xi_m$ - решения совокупности уравнений

$$\mathrm{Re}\, F(x) = 0, \quad \mathrm{Im}\, F(x) = 0. \tag{2.1}$$

Тогда, в силу $Б^\circ$ очевидно, что $\xi_1 = a$ и $\xi_m = b$. Число ξ_k $(k = \overline{1,m})$ назовем *k-той базовой точкой функции F*.

Определение 2.2. Вектор

$$I_F = (F(\xi_1), \ldots, F(\xi_m)) \tag{2.1'}$$

назовем *индикатором функции F*.

Множество индикаторов функций из $\Omega^\circ = \cup a < b \in R\Omega^\circ_{a,b}$ обозначим через $I(\Omega^\circ)$.

Определение 2.3. Будем говорить, что два индикатора I_{F_1} и I_{F_2} из $I(\Omega^\circ)$ эквивалентны, т.е. $I_{F_1} \approx I_{F_2}$, если $F_1 \sim F_2$. Заметим, что отношение $\approx$ является отношением эквивалентности. Отметим, некоторые простые свойства индикатора. Пусть $I_F = (p_1, \ldots, p_m) \in I(\Omega^\circ)$, тогда

1° $p_k \in \{\pm 1, \pm i\}$,

2° $p_1 = p_m = 1$,

3° $p_k \neq -p_{k+1}$, $k = \overline{1, m-1}$.

Свойство 1° следует из A°, а свойство 2° следует из $Б^\circ$. Свойство 3° означает, что точка $F(\xi)$, двигаясь по окружности $\Gamma = \{z : |z| = 1,\ z \in C\}$ при изменении ξ от ξ_k до ξ_{k+1}, не может попасть в противоположную ей точку $-F(\xi)$, не пересекая мнимую (или действительную) ось, если она в момент $\xi = \xi_k$ находится на действительной (или мнимой) оси.

Пусть $I_F \in I(\Omega^\circ)$ и $|I_F| =$ - число компонент вектора I_F. Очевидно, $|I_F| \geq 2$ в силу $В^\circ$.

Определение 2.4. Индикатор $I_F = (p_1, \ldots, p_m) \in I(\Omega^\circ)$ назовем *каноническим*, если он удовлетворяет одному из следующих условий :

α) $|I_F| < 5$,

β) $|I_F| \geq 5$ и $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = i$, $k = \overline{1, m-1}$,

γ) $|I_F| \geq 5$ и $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = -i$, $k = \overline{1, m-1}$.

Теорема 2.1. *Пусть индикатор I_F функции $F(x) \in \Omega^\circ$ – каноничен. Тогда если :*

I) $|I_F| < 5$, то ind $F(x) = 0$.

II) $|I_F| \geq 5$, то ind $F(x) = \dfrac{|I_F| - 1}{4}\dfrac{F(\xi_1)}{F(\xi_2)}i$, *где ξ_1 и ξ_2 – первая и вторая базовые точки функции $F(x)$ соответственно.*

Доказательство : Пусть $\theta(x) = [\arg F(x)]_{t=a}^{b}$, $x \in [a, b]$. Тогда функция $\theta(x)$ непрерывна и связана с $F(x)$ непосредственным соотношением

$$F(x) = e^{i\theta(x)}, \quad x \in [a, b]. \tag{2. 2}$$

Пусть $\xi_1 < \ldots < \xi_m$ – базовые точки функции $F(x)$. Очевидно, что

$$[\arg F(x)]_{x=a}^{b} = \sum_{k=1}^{m-1} \left\{\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k)\right\}. \tag{2.3}$$

В силу свойств 1° и 3° из (2.2) следует, что $\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k) = r + 2\pi s$, где $r \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$ и s – некоторое целое число. Если $s > 0$ (или $s < 0$), то

$$\theta(\xi_k) < \theta(\xi_k) + \frac{\pi}{2} < \theta(\xi_{k+1}) \quad \left(\text{или} \ \ \theta(\xi_{k+1}) < \theta(\xi_k) - \frac{\pi}{2} < \theta(\xi_k)\right), \quad k = \overline{1, m-1}.$$

В силу непрерывности $\theta(x)$, отсюда следует, что существует $\xi' \in (\xi_k, \xi_{k+1})$ такое, что $\theta(\xi') = \theta(\xi_k) \pm \frac{\pi}{2}$. Тогда, в силу (2.2), ξ' – базовая точка функции $F(x)$, отличная от всех ξ_k, $k = \overline{1, m}$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что $s = 0$. Таким образом,

$$\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k) \in \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{2.4}$$

I) Пусть $|I_F| < 5$. Тогда в силу (2.3) и (2.4) имеем

$$0 \leq |\text{ind } F(x)| \leq \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-1}\left|\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k)\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{2}(m-1) = \frac{|I_F| - 1}{4} < 1.$$

Следовательно, ind $F(x) = 0$.

II) Пусть $I_F = (F(\xi_1), \ldots, F(\xi_m))$, где $\xi_1 < \ldots . \xi_m$ – базовые точки функции $F(x)$. Пусть $|I_F| \geq 5$ и $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = \dfrac{F(\xi_{k+1})}{F(\xi_k)} = i (= -i)$, $k = \overline{1, m-1}$. Тогда в силу (2.2) и (2.4) имеем $\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k) = \frac{\pi}{2}$ $\left(\text{или } = -\frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда и из (2.3) следует, что

$$\operatorname{ind} F(x) = \frac{1}{2\pi}(m-1)\frac{\pi}{2} \quad \left(\text{или } = -\frac{1}{2\pi}(m-1)\frac{\pi}{2}\right) \quad = \frac{|I_F|-1}{4}\frac{F(\xi_1)}{F(\xi_2)}i.$$

Доказательство завершено.

Как видим, ind $F(x)$ может быть легко вычислен после того, как будет найден канонический индикатор, эквивалентный I_F. Ключом к построению канонического индикатора, эквивалентного данному, может служить следующий критерий.

Теорема 2.2. *Пусть $I_F = (F(\xi_1), \dots, F(\xi_m))$ – индикатор функции $F(x) \in \Omega_0$ и пусть $|I_F| \geq 5$. Для того, чтобы I_F был каноническим необходимо и достаточно, чтобы $F(\xi_k) \neq F(\xi_{k+1})$, $k = \overline{1, m-1}$ и $F(\xi_k) \neq F(\xi_{k+2})$, $k = \overline{1, m-2}$.*

Доказательство : Необходимость. пусть индикатор $I_F = (F(\xi_1), \dots, F(\xi_m))$ каноничен и $|I_F| \geq 5$. Тогда, согласно определению канонического индикатора либо

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = i, \quad k = \overline{1, m-1} \tag{2.5}$$

либо

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = -i, \quad k = \overline{1, m-1}. \tag{2.6}$$

Поэтому

$$\frac{F(\xi_{k+2})}{F(\xi_k)} = \frac{F(\xi_{k+2})}{F(\xi_{k+1})}\frac{F(\xi_{k+1})}{F(\xi_k)} = -1, \quad k = \overline{1, m-2}. \tag{2.7}$$

Соотношения (2.5) - (2.7) доказывают необходимость.

Достаточность. Пусть $I_F = (F(\xi_1) \dots, F(\xi_m))$ и $m = |I_F| > 5$. $F(\xi_1) = 1$ в силу 2°. Тогда, поскольку по условию теоремы $F(\xi_2) \neq F(\xi_1)$, то $F(\xi_2) \neq 1$. Кроме того, неравенство тоже верно $F(\xi_2) \neq -1$ в силу свойства 3°. Таким образом, ввиду 1° или $F(\xi_2) = i$ или $F(\xi_2) = -i$. Предположим $F(\xi_2) = i$. Тогда, поскольку в силу условия теоремы $F(\xi_2) \neq F(\xi_3)$ и $F(\xi_1) \neq F(\xi_3)$, то ввиду 1° и 3° $F(\xi_3) = -1$. Так как $F(\xi_3) \neq F(\xi_4)$ и $F(\xi_2) \neq F(\xi_4)$, то отсюда в силу 1° и 3° следует, что $F(\xi_4) = -i$. Подобным образом доказывается, что $F(\xi_5) = 1$, $F(\xi_6) = i$, и т.д. Следовательно, $\dfrac{F(\xi_{k+1})}{F(\xi_k)} = i$, $k = \overline{1, m-1}$. В случае, когда $F(\xi_2) = -i$, каноничность I_F доказывается аналогично. Теорема доказана.

Если индикатор $I_F = (F(\xi_1), \dots, F(\xi_m))$ не является каноническим, то $|I_F| \geq 5$, и, согласно теореме 2.2, выполняется хотя бы одно из условий :

а) $F(\xi_p) = F(\xi_{p+1})$ для некоторого $p \in \{1, 2, \dots, m-1\}$,

б) $F(\xi_q) = F(\xi_{q+2})$ для некоторого $q \in \{1, 2, \dots, m-2\}$.

Пусть выполняется условие а). Рассмотрим функцию

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & \text{если} \quad x \in [\xi_1, \xi_p], \\ F(x + d_p) & \text{если} \quad x \in (\xi_p, \xi_m - d_p], \end{cases}$$

где $d_p = \xi_{p+1} - \xi_p$. Ясно, что $F_1 \in \Omega^\circ$, а числа $\eta_1 = \xi_1, \ldots, \eta_{p-1} = \xi_{p-1}$, $\eta_p = \xi_{p+1} - d_p, \eta_{p+1} = \xi_{p+2} - d_p, \ldots, \eta_{m-1} = \xi_m - d_p$ – ее базовые точки. Покажем, что

$$\text{ind } F_1(x) = \text{ind } F(x). \tag{2.8}$$

Пусть функция $\theta(x)$ та же, что и в формуле (2.2). Тогда

$$F_1(x) = e^{i\theta_1(x)}, \tag{2.9}$$

где

$$\theta_1(x) = \begin{cases} \theta(x) & \text{если} \quad x \in [\xi_1, \xi_p], \\ \theta(x + d_p) & \text{если} \quad x \in (\xi_p, \xi_m - d_p]. \end{cases}$$

Функция $\theta_1(x)$ непрерывна, поскольку $\theta(x)$ непрерывна и согласно а) и (2.2), $\theta(\xi_p) = \theta(\xi_{p+1})$. Кроме того, очевидно, что для $F_1(x)$ имеет место аналогичное (2.3) равенство :

$$[\arg F_1(x)]_{x=a}^{b} = \sum_{k=1}^{m-2} \{\theta_1(\eta_{k+1}) - \theta_1(\eta_k)\}.$$

Тогда, поскольку $\theta(\xi_{p+1}) - \theta(\xi_p) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} \text{ind } F(x) &= \frac{1}{2\pi}[\arg F(x)]_{x=\xi_1}^{\xi_m} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-2}\{\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k)\} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1, k\neq p}^{m-2}\{\theta(\xi_{k+1}) - \theta(\xi_k)\} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m-2}\{\theta_1(\eta_{k+1}) - \theta(\eta_k)\} \\ &= \frac{1}{2\pi}[\arg F_1(x)]_{x=\eta_1}^{\eta_{m-1}} = \text{ind } F_1(x). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.8) доказано. Следовательно, $I_F \approx I_{F_1}$.

Заметим, что I_{F_1} получается из I_F по следующему правилу : из I_F отбрасывается компонента $F(\xi_{p+1})$, т.е.

$$I_{F_1} = (F(\xi_1), \ldots, F(\xi_p), F(\xi_{P+2}), \ldots, F(\xi_m)).$$

Переход из I_F к эквивалентному ему индикатору по такому правилу будем называть сокращением первого типа. Аналогично показывается, что если выполняется б), то $I_F \approx I_{F_2} = (F(\xi_1), \ldots, F(\xi_q), F(\xi_{q+3}), \ldots, F(\xi_m))$ $(\in I(\Omega^\circ))$, где

$$F_2(x) = \begin{cases} F(x) & \text{если} \quad x \in [\xi_1, \xi_q], \\ F(x + h_q) & \text{если} \quad x \in (\xi_q, \xi_m - h_q], \end{cases} \quad \text{где} \quad h_q = \xi_{q+2} - \xi_q.$$

т.е. из I_F можно получить эквивалентный ему индикатор отбрасыванием компонент $F(\xi_{q+1})$ и $F(\xi_{q+2})$. Переход из I_F к эквивалентному индикатору только что описанным способом будем называть сокращением второго типа.

Очевидно, что применяя сокращения первого и второго типа мы из любого индикатора за конечное число шагов получим эквивалентный ему канонический индикатор.

§3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДЕКСА $F(x) \in \Omega$

Как показали мы выше, задача вычисления индекса функции $F \in \Omega^\circ$ сводится к задаче нахождения ее базовых точек. Для ее решения можно было бы применить известные численные методы. Но такой способ нахождения индекса, ввиду большого количества вычислений, становится неэффективным. Кроме того, такой способ нахождения индекса применим не ко всем функциям из Ω (очевидно $\Omega^\circ \neq \Omega$).

В этом параграфе мы покажем, что для произвольной $F \in \Omega$ легко построить эквивалентную ей функцию $G \in \Omega^\circ$, базовые точки которой можно найти достаточно просто.

Пусть

$$F \in \Omega_{a,b} \quad \text{и} \quad F_1(x) = \frac{F(x)|F(a)|}{|F(x)|F(a)|}$$

и пусть точки $a = x_1 < \ldots < x_n = b$ разбивают отрезок $[a, b]$ на части так, чтобы для любого $k = \overline{1, n-1}$ выполнялось неравенство

$$|F_1(x') - F_1(x'')| < 2, \quad \forall x', x'' \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{3.1}$$

Определим кусочно-линейную функцию $F_2(x)$ на $[a, b]$ посредством соотношений :

$$F_2(x) = F_1(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} + F_1(x_k)\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{3.2}$$

Докажем, что $F_2 \in \Omega_{a,b}$. Очевидно, что $F_2(x)$ непрерывна и $F_2(a) = F_2(b)$, т.е. F_2 удовлетворяет условиям А) и В). Остается показать, что $F_2(x) \neq 0$ ($x \in [a, b]$), т.е. что F_2 удовлетворяет условию Б). Предположим, верно обратное утверждение, т.е. F_2 не удовлетворяет Б). Пусть тогда $F_2(\eta) = 0$ для некоторого $\eta \in [x_p, x_{p+1}] \subset [a, b]$. В силу (3.2) имеем

$$\left\{F_2(x_{p+1}) - F_2(x_p)\right\}\frac{\eta - x_p}{x_{p+1} - x_p} + F_2(x_p) = 0,$$

из которого получаем

$$\frac{F_2(x_{p+1})}{F_2(x_p)} = \frac{\eta - x_{p+1}}{\eta - x_p} < 0$$

(заметим, что $\eta \neq x_p$, $\eta \neq x_{p+1}$ так как $F_2(x_k) = F_1(x_k) \neq 0$, $k = \overline{1, n-1}$). Следовательно, $|F_2(x_p) - F_2(x_{p+1})| = |2F(x_p)| = 2$, что противоречит (3.1). Таким образом, F_2 удовлетворяет условию Б), и отсюда получаем, что $F_2 \in \Omega_{a,b}$. Покажем, что

$$\text{ind } F_2(x) = \text{ind } F_1(x). \tag{3.3}$$

Пусть $\theta_j(x) = [\arg F_j(t)]_{t=a}^{x}$ $(j = 1, 2)$. Тогда очевидно, что функции θ_1 и θ_2 непрерывны и для них выполняются соотношения

$$F_1(x) = e^{i\theta_1(x)}, \quad F_2(x) = |F_2(x)|e^{i\theta_2(x)}, \quad \theta_1(a) = \theta_2(a) = 0. \tag{3.4}$$

Покажем, что для любого $k = \overline{1, n-1}$ и для любых $x', x'' \in [x_k, x_{k+1}]$ выполняется неравенство $|\theta_1(x') - \theta_1(x'')| < \pi$. Предположим, что это не так. Тогда в силу непрерывности $\theta_1(x)$ для некоторого $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ и для некоторых $\eta_1, \eta_2 \in [x_p, x_{p+1}]$ выполняется равенство $|\theta_1(x') - \theta_1(x'')| = \pi$. Так как $F_1(x) = e^{i\theta_1(x)}$, то отсюда следует, что $F_1(\eta_2) = -F_1(\eta_1)$. Но тогда $|F_1(\eta_1) - F_1(\eta_2)| = 2|F_1(\eta_1)| = 2$, что противоречит неравенству (3.1). полученное противоречие доказывает (3.5). Из (3.5) следует, что существуют числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha_k < \theta_1(x) < \alpha_k + \pi, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \; k = \overline{1, n-1}. \tag{3.6}$$

Из формул (3.2) и (3.4) следует, что $\theta_2(x_k) = \theta_1(x_k)$ $(k = \overline{1, n-1})$, тогда

$$\alpha_k < \min\left\{\theta_1(x_k), \theta_1(x_{k+1})\right\} \leq \theta_2(x) \leq \max\left\{\theta_1(x_k), \theta_1(x_{k+1})\right\} < \alpha_k + \pi,$$

поскольку $F_2(x)$ линейна на каждом интервале $[x_k, x_{k+1}]$. Следовательно, $\alpha_k < \theta_2(x) < \alpha_k + \pi$, $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{1, n-1}$. Отсюда и из (3.6) получаем

$$-\pi < \theta_2(x) - \theta_1(x) < \pi, x \in [a, b].$$

Тогда, поскольку в силу (3.4) $\dfrac{F_2(x)}{F_1(x)} = |F_2(x)|e^{i(\theta_2(x) - \theta_1(x))}$, то ind $\left\{\dfrac{F_2(x)}{F_1(x)}\right\} = 0$, что влечет равенство (3.3).

Определение 3.1. Пусть $|a_k| = 1$ $(k = \overline{1, n})$. Функция

$$H(x) = a_{k+1}\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} + a_k\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \; k = \overline{1, n-1},$$

определенная на отрезке $[a, b]$, называется *иррегулярной степени* $s(> 0)$, если существуют попарно различные числа $k_1, \ldots, k_s \in \{1, \ldots, n-1\}$ такие, что

$a_{k_p} = a_{k_p+1}, p = \overline{1,s}$. В противном случае $H(x)$ называется *регулярной* или *иррегулярной степени нуль*.

Введем обозначения $\Delta_k = [x_k, x_{k+1})$, $k = \overline{1, n-2}$, $\Delta_n = [x_{n-1}, x_n]$. Покажем, что если функция $F_2(x)$, определенная посредством соотношения (3.2) регулярна, то каждое из уравнений

$$\mathrm{Re}\ F_2(x) = 0, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{Im}\ F_2(x) = 0 \tag{3.8}$$

на каждом из $\Delta_k (k = \overline{1, n-1})$ имеет не более одного решения. При фиксированном k на Δ_k эти уравнения равносильны соответственно следующим

$$\frac{\mathrm{Re}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Re}\ F_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = -\mathrm{Re}\ F_1(x_k), \tag{3.9}$$

$$\frac{\mathrm{Im}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Im}\ F_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = -\mathrm{Im}\ F_1(x_k). \tag{3.10}$$

Если $\mathrm{Re}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Re}\ F_1(x_k) \neq 0$, то, очевидно, уравнение (3.9) на Δ_k имеет не более, чем одно решение. Если $\mathrm{Re}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Re}\ F_1(x_k) = 0$, то уравнение (3.9) на Δ_k решения не имеет. Действительно, для того чтобы в этом случае уравнение (3.9) имело решение необходимо, чтобы $\mathrm{Re}\ F_1(x_k) = 0$. Тогда в силу равенств

$$[\mathrm{Re}\ F_1(x_p)]^2 + [\mathrm{Im}\ F_1(x_p)]^2 = 1, \quad p = k, k+1,$$

должно выполняться одно из следующих соотношений :

$$F_1(x_{k+1}) = F_1(x_k) \quad \text{или} \quad F_1(x_{k+1}) = -F_1(x_k).$$

Первое из них не может выполняться в силу регулярности $F_2(x)$ (так как $F_2(x_j) = F_1(x_j)$, $j = \overline{1, n}$). Во втором случае

$$|F_1(x_{k+1}) - F_1(x_k)| = 2|F_1(x_k)| = 2$$

что противоречит (3.1). Полученное противоречие доказывает отсутствие решений у уравнения (3.9) на Δ_k. Аналогичным образом доказывается, что на каждом Δ_k $(k = \overline{1, n})$ уравнение (3.10) имеет не более, чем конечное число решений, и, таким образом, функция

$$G(x) = \frac{F_2(x)}{|F_2(x)|} \in \Omega^\circ.$$

В силу (3.3)

$$\mathrm{ind}\ G(x) = \mathrm{ind}\ F(x).$$

Заметим, что множество базовых точек функции $G(x)$ совпадает с множеством решений уравнений (3.7) и (3.8). Поскольку на Δ_k (3.7) и (3.8) эквивалентны линейным уравнениям (3.9) и (3.10) соответственно, то базовые точки функции $G(x)$ можно найти, решив совокупность систем :

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{Re}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Re}\ F_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = -\mathrm{Re}\ F_1(x_k),\\ x \in \Delta_k,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{Im}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Im}\ F_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = -\mathrm{Im}\ F_1(x_k),\\ x \in \Delta_k,\end{array}\right.\end{array}\right. \quad k = \overline{1, n-1}. \tag{3.11}$$

Если $F_2(x)$ иррегулярна, то может оказаться, что $\dfrac{F_2(x)}{|F_2(x)|} \notin \Omega^*$ (т.е. одна из систем из совокупности (3.11) имеет бесконечное число решений). Однако, из иррегулярной функции F_2 легко получить эквивалентную ей регулярную. В самом деле, если при некотором p выполняется равенство $F_2(x_p) = F_2(x_{p+1})$, то, как нетрудно заметить, функция

$$F_3(x) = \begin{cases} F_2(x) & \text{при} \quad x \in [x_1, x_p), \\ F_2(x + x_{p+1} - x_p) & \text{при} \quad x \in [x_p, x_n - x_{p+1} + x_p] \end{cases} \tag{3.12}$$

(здесь полагается, что при $p = 1$ $[x_1, x_p)$ равно пустому множеству) эквивалентна F_2 и имеет степень иррегулярности на единицу меньше, чем степень иррегулярности F_2. Функцию F_3 будем называть сокращением степени 1 функции F_2. Сокращение степени $l+1$ функции F_2 определим по индукции, как сокращение степени 1 функции H, которая является сокращением степени l функции F_2. Ясно, что если F_2 иррегулярна степени $s > 0$, то ее сокращение степени s будет эквивалентной ей регулярной функцией.

Пусть F_2 иррегулярна степени 1, $F_2(x_p) = F_2(x_{p+1})$ и F_3 определена посредством (3.12). Тогда функция

$$G(x) = \frac{F_3(x)}{|F_3(x)|} \in \Omega^* \quad \text{и} \quad G \sim F.$$

Пусть $\eta_1 < \ldots < \eta_m$ – базовые точки функции $G(x)$, и пусть $\eta_1, \ldots, \eta_l \in [x_1, x_p)$, $\eta_{l+1}, \ldots, \eta_m \in [x_p, x_n - x_{p+1} + x_p]$. Тогда, ввиду определения (3.12), справедливо равенство

$$I_G = \left(\frac{F_2(\eta_1)}{|F_2(\eta_1)|}, \ldots, \frac{F_2(\eta_l)}{|F_2(\eta_l)|}, \frac{F_2(\xi_{l+1})}{|F_2(\xi_{l+1})|}, \ldots, \frac{F_2(\xi_m)}{|F_2(\xi_m)|} \right),$$

где $\xi_k = \eta_k + x_{p+1} - x_p$, $k = \overline{l+1, m}$.

Замечание. Так как при $p = 1$ полагается, что $[x_1, x_p)$ – пустое множество, то в этом случае следует положить $l = 0$, и тогда

$$I_G = \left(\frac{F_2(\xi_1)}{|F_2(\xi_1)|}, \ldots, \frac{F_2(\xi_m)}{|F_2(\xi_m)|}\right).$$

Нетрудно видеть, что базовые точки функции G, принадлежащие $[x_1, x_p)$ $(p > 0)$, совпадают с совокупностью решений систем

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\ F_2(x) = 0, \\ x \in [x_1, x_p), \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Im}\ F_2(x) = 0, \\ x \in [x_1, x_p), \end{cases} \tag{3.13}$$

а базовые точки G, принадлежащие $[x_p, x_n - x_{p+1} + x_p]$, совпадают с совокупностью решений систем

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\ F_2(x + x_{p+1} - x_p) = 0, \\ x \in [x_p, x_n - x_{p+1} + x_p]. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Im}\ F_2(x + x_{p+1} - x_p) = 0, \\ x \in [x_p, x_n - x_{p+1} + x_p]. \end{cases}$$

Следовательно, числа $\xi_{l+1}, \ldots, \xi_m$ (или числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$ в случае $p = 1$) совпадают с совокупностью решений систем

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\ F_2(x) = 0, \\ x \in [x_{p+1}, x_n]. \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Im}\ F_2(x) = 0, \\ x \in [x_{p+1}, x_n]. \end{cases}$$

Отсюда и из (3.13) вытекает, что числа $\eta_1, \ldots, \eta_l, \xi_{l+1}, \ldots, \xi_m$ (или числа $\xi_1, \ldots, \xi_m$ в случае $p = 1$) совпадают с совокупностью решений систем (3.11), из которых при $p > 1$ удалены системы :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}\ F_1(x_{p+1}) - \mathrm{Re}\ F_1(x_p)}{x_{p+1} - x_p}(x - x_p) = -\mathrm{Re}\ F_1(x_p), \\ x \in \Delta_p, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Im}\ F_1(x_{p+1}) - \mathrm{Im}\ F_1(x_p)}{x_{k+1} - x_p}(x - x_p) = -\mathrm{Im}\ F_1(x_p), \\ x \in \Delta_p. \end{cases}$$

Таким образом, если $\xi_1 < \ldots < \xi_m$ – решения совокупности систем (3.11), из которых удалены две последние системы (при $p > 1$), то

$$I_G = \left(\frac{F_2(\xi_1)}{|F_2(\xi_1)|}, \ldots, \frac{F_2(\xi_m)}{|F_2(\xi_m)|}\right).$$

Отсюда видно, что если F_2 иррегулярна степени $s > 1$ (ясно, что при $s = n - 1$ $F_2(x) \equiv 1$, неравенство $s > n - 1$ невозможно), а H – сокращение F_2 степени s, то индикатор I_G функции

$$G(x) = \frac{H(x)}{|H(x)|} \in \Omega^\circ$$

(G эквивалентна F), определятся формулой

$$I_G = \left(\frac{F_2(\xi_1)}{|F_2(\xi_1)|}, \dots, \frac{F_2(\xi_q)}{|F_2(\xi_q)|} \right),$$

где $\xi_1 < \dots < \xi_q$ - совокупность решений всех тех систем

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Re}\ F_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = -\mathrm{Re}\ F_1(x_k), \\ x \in \Delta_k \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{Im}\ F_1(x_{k+1}) - \mathrm{Im}\ F_1(x_k)}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) = -\mathrm{Im}\ F_1(x_k), \\ x \in \Delta_k \end{cases} \tag{3.14}$$

для которых $F(x_k) \neq F(x_{k+1})$, $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Таким образом, мы показали, что для любой функции $F \in \Omega$ можно построить эквивалентную ей функцию $G \in \Omega^*$, базовые точки которой весьма просто находятся решением совокупности систем (3.14), а по значениям G в этих точках мы легко найдем значение ind $F(x)$. Заметим, что описанный выше метод можно применить к функции $F \in \Omega_{a,b}$ лишь в том случае когда существует эффективный способ построения по функции F разбиения $a = x_1 < \dots < x_n = b$ отрезка $[a, b]$, гарантирующего выполнимость условия (1.3). Ниже мы покажем, что такой способ существует для функций $F(x)$, удовлетворяющих условию Гельдера

$$|F(x') - F(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1). \tag{3.15}$$

Пусть функция $F \in \Omega_{a,b}$ удовлетворяет условию (3.15). Пусть числа n и x_k, ($k = \overline{1, n+1}$) определяются из условий

$$x_k = a + \frac{k-1}{n}(b - a), \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{3.16}$$

$$n > (b - a)\left[\frac{2M}{m}\right]^{1/\alpha} \tag{3.17}$$

$m = \min\limits_{k=\overline{1,n+1}} \{|F(x_k)|\}$. Покажем, что для обеспечения выполнимости условия (1.3) достаточно узлы x_k разбиения отрезка $[a, b]$ определить по формулам (3.16). Из (3.15) и неравенства $||A| - |B|| \leq |A - B|$ легко вывести, что если

$$n > (b - a)\left\{\frac{M}{\min_{x\in[a,b]}|F(x)|}\right\}^{1/\alpha}, \tag{3.18}$$

то (1.3) имеет место для x_k, определяемых по (3.16).

Покажем, что если выполняется (3.17), то

$$\min_{x\in[a,b]} |F(x)| \geq m. \tag{3.19}$$

Из (3.17) следует, что

$$x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n} < \left(\frac{n}{2M}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k = \overline{0,n}.$$

Тогда

$$|F(x)| = |F(x_k) - (F(x_k) - F(x))| \geq |F(x_k)| - |F(x_k) - F(x)| \geq$$

$$\geq |F(x_k)| - M|x_k - x|^{\alpha} \geq |F(x_k)| - M|x_{k+1} - x_k|^{\alpha} \geq m - M\frac{m}{2M} = \frac{m}{2}$$

для любого $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Следовательно, имеет место (3.19).

Автор выражает благодарность А. М. Джрбашяну за полезные советы.

Abstract. The paper gives a new numerical method for calculation of the index of a function : given a function $F(x)$ and $F_1(x) = F(X)/|F(x)| : [a,b] \to C$, a continuous, piecewise linear function $F_2(x)$ is constructed that coincides with $F_1(x)$ at some partition points x_k of the interval $[a,b]$. If the diameter of the partition renders the variation of $F_1(x)$ in the intervals $[x_k, x_{k+1}]$ ($k = \overline{1,n}$) less than 2, then the index of $F(x)$ is calculated using the intersection points of the graph of $F_2(x)$ with the coordinate axis by a special finite algorithm.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Д. Гахов. Краевые задачи. Наука, Москва, 1977.
2. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. ГИФМЛ, Москва, 1962.
3. З. Пресдорф. Некоторые классы сингулярных уравнений", Мир, Москва, 1979.
4. А. И. Маркушевич. Краткий курс теории аналитических функций., Наука, Москва, 1978.
5. М. А. Красносельский, А. И. Перов, А. И. Поволецкий, П. П. Забрейко. Векторные поля на плоскости, ГИФМЛ, ММосква 1963.
6. Ф. Ф. Гантмахер. Теория матриц, ГИФМЛ, Москва, 1955.
7. S. Lifshitz. Differential equations : Geometric theory. Pure and applied math., volume 4, Interscience publishers, New York, London, 1957.

Поступила 5 ноября 2004