*Известия НАН Армении. Математика, 40, № 2, 2005, 3–14*

# О СХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ–УОЛША ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ $\Lambda$-ВАРИАЦИИ

**Г. М. Амирханян**

*Институт математики НАН Армении*
*E-mail : a_gagik@mail.ru*

**Резюме.** В статье доказывается, что если интегрируемая функция $f(x,y)$ принадлежит классу Ватермана $\Lambda BV([0,1]^2)$ при $\Lambda = \left\{\bar{o}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ln(n+1)}}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ и непрерывна в каждой точке компакта $E$, то двойной ряд Фурье–Уолша функции $f(x,y)$ равномерно $u(K)$-сходится на $E$.

## §1. ВВЕДЕНИЕ

Для одномерных тригонометрических рядов хорошо известна следующая теорема.

**Теорема (Дирихле – Жордан).** *Если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[-\pi,\pi]$ и непрерывна в каждой точке отрезка $[a,b]\subset[-\pi,\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на $[a,b]$.*

Аналог этой теоремы имеет место также для рядов Фурье–Уолша (см. [3], стр. 58).

Для функции $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ и интервала $\Delta=(a,b)$, обозначим

$$f(\Delta)=f(b)-f(a),\quad f^*(\Delta)=\sup_{a\le x<y\le b}|f(x)-f(y)|.$$

**Определение 1.** Пусть последовательность $\Lambda=\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ принадлежит классу $\Phi$, т.е. является монотонно убывающей последовательностью положительных чисел такой, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^{-1}=\infty.$$

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на $[0,1]$ принадлежит классу Ватермана $\Lambda BV([0,1])$, если

$$\Lambda V_{[0,1]} = \sup_{\Gamma} \sum_{k=1}^{n} \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k} < \infty,$$

где $\Gamma$ – система неперекрывающихся интервалов $\{I_k\}_{k=1}^{n}$ из $[0,1]$.

Пусть теперь $f(x,y) \in L^1([0,1]^2)$. Для интервалов $\Delta_1 = (a_1, a_2)$ и $\Delta_2 = (b_1, b_2)$, положим

$$f(\Delta_1, \Delta_2) := f(a_1, b_1) + f(a_2, b_2) - f(a_1, b_2) - f(a_2, b_1),$$

$$f^*(\Delta_1, \Delta_2) := \sup |f(I, J)|,$$

где sup берется по всем интервалам $I \subset \Delta_1$, $J \subset \Delta_2$.

**Определение 2.** Пусть последовательность $\Lambda \in \Phi$. Говорят, что $f(x,y) \in \Lambda BV([0,1]^2)$, если

1. $f(x,0), f(0,y) \in \Lambda BV([0,1])$,
2. $\Lambda V_{[0,1]^2}(f) = \sup\limits_{\Gamma_1, \Gamma_2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{r=1}^{m} \dfrac{|f(I_k, J_r)|}{\lambda_k \lambda_r} < \infty,$

   где $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ – две системы непересекающихся интервалов в $[0,1]$.

Отметим, что поскольку любая функция из класса Ватермана, очевидно, ограничена, для $f(x,y) \in \Lambda BV([0,1]^2)$ можно определить величину

$$\Lambda V(f) = \Lambda V_{[0,1]^2}(f) + \Lambda V_{[0,1]}(f(0,y)) + \Lambda V_{[0,1]}(f(x,0)) + \sup_{[0,1]^2} |f(x,y)|.$$

Если в определениях 1 и 2 $\Lambda \equiv \{j\}_{j=1}^{\infty}$, то множества $\Lambda BV([0,1])$ и $\Lambda BV([0,1])^2$ обозначают соответственно через $HBV([0,1])$ и $HBV([0,1])^2$, а функции из этих классов называют **функциями с ограниченной гармонической вариацией**. В работе [4] Д. Ватерман доказал аналог теоремы Дирихле–Жордана для функций с ограниченной гармонической вариацией. Для двумерных тригонометрических рядов Фурье справедлива следующая теорема (см. [1]).

**Теорема (А. Саакян).** *Пусть функция $f(x,y) \in HBV([-\pi,\pi]^2)$ непрерывна во всех точках открытого множества $E \subset [-\pi,\pi]^2$. Тогда прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x,y)$ равномерно сходятся к $f(x,y)$ на каждом компакте $K \subset E$.*

Эта теорема была усилена О. Саргсяном (см.[5]).

**Теорема (О. Саргсян).** *Пусть функция $f(x,y) \in HBV([-\pi,\pi]^2)$ непрерывна в точках компакта $K \subset [-\pi,\pi]^2$. Тогда прямоугольные частные суммы ряда Фурье функции $f(x,y)$ равномерно сходятся к $f(x,y)$ на $K$.*

О. Саргсян (см.[6]) также доказал аналог этой теоремы для рядов Фурье–Уолша.

**Определение 3.** Говорят, что конечное множество $U \subset \mathbb{Z}_+^2$ принадлежит классу $A$, если вместе с произвольной точкой $(k, j) \in U$ множеству $U$ принадлежат также все целочисленные точки прямоугольника $[0, k] \times [0, j]$. Если, кроме того, при фиксированном $K > 1$ из условий $(0, N) \in U$ и $(M, 0) \in U$ следует, что множества

$$\{(k, j) \in \mathbb{Z}_+^2 : Kk + j \leq N\} \subset U \quad \text{и} \quad \{(k, j) \in \mathbb{Z}_+^2 : k + Kj \leq M\} \subset U,$$

то говорят, что множество $U$ принадлежит классу $A(K)$.
Заметим, что если $U \in A(K)$, то $N(U)/n(U) \leq 2K$, где

$$N(U) = \min\{n : [0, n]^2 \cap \mathbb{Z}_+^2 \supseteq U\} \quad \text{и} \quad n(U) = \max\{n : [0, n]^2 \cap \mathbb{Z}_+^2 \subseteq U\}.$$

**Определение 4.** Говорят, что ряд $\sum\limits_{k,j=0}^{\infty} a_{k,j}$ $u$-сходится (соответственно $u(K)$-сходится) к $a$ если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N$ такое, что

$$\left| \sum_{(k,j) \in U} a_{k,j} - a \right| < \varepsilon$$

для любого $U \in A$ (соответственно $U \in A(K)$) с $n(U) > N$.
Для $f(x, y) \in L^1([0, 1]^2)$ и конечного множества $U \subset \mathbb{Z}_+^2$ обозначим

$$S_U(f, x, y) = \sum_{(k,j) \in U} c_{k,j}(f) w_k(x) w_j(y),$$

где

$$c_{k,j}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t, s) w_k(t) w_j(s) dt ds,$$

а $\{w_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – система Уолша.
Обозначим $\Lambda_{1/2} = \left\{ \lambda_n = \frac{n^{1/2}}{\sqrt{\ln(n+1)}} \right\}$. В настоящей работе мы доказываем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Если фиксировано произвольное $K > 1$ и функция $f(x, y) \in \Lambda_{1/2} BV([0, 1]^2)$, то для любого $U \in A(K)$ и для любой точки $(x, y) \in [0, 1]^2$ имеем*

$$|S_U(f, x, y)| \leq C K \Lambda_{1/2} V(f).$$

*Если же последовательность $\Lambda = \{\lambda'_n\} \in \Phi$ такова, что $\lambda'_n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$, а функция $f(x, y) \in \Lambda BV([0, 1]^2)$ непрерывна на компакте $E \subset [0, 1]^2$, то ее ряд Фурье–Уолша равномерно $u(K)$-сходится на $E$.*
Для тригонометрической системы эта теорема была доказана М. И. Дьяченко [2].

## § 2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Напомним, что система Уолша $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ в нумерации Пэли определяется равенствами

$$(w_0(x) \equiv 1), \quad w_n(x) = \prod_{i=0}^{k} (r_i(x))^{\varepsilon_i} \quad \text{если} \quad n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i 2^i, \quad \varepsilon_i = 0 \quad \text{или} \quad \varepsilon_i = 1,$$

где $\{r_i(x)\}$ – система Радемахера.

Ядро Дирихле для системы Уолша

$$D_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} w_i(x)$$

обладает следующими свойствами (см. [3], Пункт 1.4) :

а) Если $n = 2^k + m$ и $1 \le m \le 2^k$, то

$$D_n(x) = D_{2^k}(x) + r_k(x) D_m(x). \tag{1}$$

б) Ядро $D_n(x)$ при $1 \le n \le 2^k$ принимает постоянное значение на каждом из интервалов $\Delta_m^{(k)} = \left[\frac{m}{2^k}, \frac{m+1}{2^k}\right)$, $m = 0, 1, ..., 2^k - 1$.

в) Для ядра $D_{2^k}(x)$ справедливо равенство

$$D_{2^k}(x) = \begin{cases} 2^k & \text{при} \quad x \in \Delta_0^{(k)}, \\ 0 & \text{при} \quad x \in [0,1) \setminus \Delta_0^{(k)}. \end{cases} \tag{2}$$

г)
$$|D_n(x)| < \frac{1}{x} \quad \text{для любого } x \in (0,1) \tag{3}$$

Имея ввиду (3), для $n \ge 1$ и $x \in (0,1)$ получим

$$|D_n(x)| \le \min\left\{n+1, \frac{1}{x}\right\} \le \frac{C}{x + 1/n} = \frac{Cn}{nx+1}. \tag{4}$$

Докажем что,

$$\left|\int_x^1 D_n(t)dt\right| \le C \min\left\{1, \frac{1}{nx}\right\} \le \frac{C}{nx+1}, \quad x \in [0,1]. \tag{5}$$

Пусть $n = 2^k + m$ и $1 \le m \le 2^k$. Из (1) имеем

$$D_n(x) = D_{2^k}(x) + r_k(x) D_m(x),$$

и, следовательно,

$$\left|\int_x^1 D_n(t)dt\right| \le \left|\int_x^1 D_{2^k}(t)dt\right| + \left|\int_x^1 r_k(t) D_m(t)dt\right|.$$

В силу (2)

$$\left|\int_x^1 D_{2^k}(t)dt\right| = 0 \quad \text{при} \quad x \geq 1/2^k$$

и

$$\left|\int_x^1 D_{2^k}(t)dt\right| < 1 < 1/(2^k x) \quad \text{при} \quad x < 1/2^k.$$

Следовательно,

$$\left|\int_x^1 D_{2^k}(t)dt\right| \leq C \min\left\{1, \frac{1}{nx}\right\}. \tag{6}$$

Выберем $i$ так, чтобы $i/2^k \leq x < (i+1)/2^k$ ($x \in \Delta_i^{(k)}$). Так как $D_m(t)$ принимает постоянное значение на каждом из интервалов $\Delta_j^{(k)}$ и интеграл от $r_k(t)$ по интервалу $\Delta_j^{(k)}$ равен нулю, то

$$\left|\int_x^1 r_k(t)D_m(t)dt\right| = \left|\int_x^{\frac{i+1}{2^k}} r_k(t)D_m(t)dt\right| \leq \frac{1}{2^k}|D_m(x)|.$$

Оттуда, учитывая (4), имеем

$$\left|\int_x^{\frac{i+1}{2^k}} r_k(t)D_m(t)dt\right| \leq C \min\left\{1, \frac{1}{nx}\right\},$$

Из (6) и последнего неравенства следует (5).

Частные суммы ряда Фурье–Уолша функции $f \in L^1(0,1)$ имеют вид

$$S_N(f,x) = \int_0^1 f(t)D_n(x \oplus t)dt, \quad \text{где} \quad x \oplus t = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - t_i|,$$

если $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 2^{-i}$, $t = \sum_{i=1}^{\infty} t_i 2^{-i}$, $x_i, t_i = 0$ или $1$. Операция $\oplus$ имеет следующие свойства :

1. Для лкобых $x, y \in [0,1]$ справедливы

$$|x \oplus y - x| \leq y, \tag{7}$$

$$|x - y| \leq x \oplus y, \tag{8}$$

2. Для любого $f \in L^1([0,1])$ и $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 f(t \oplus x)dt = \int_0^1 f(t)dt, \tag{9}$$

т.е. интеграл инвариантен относительно $\oplus$-сдвига (см [3], 2.1.2).

**Лемма 1.** *Пусть задано $K > 1$, множество $U \in A(K)$ и число*

$$n(U) := \max\left\{n : [0,n]^2 \cap \mathbb{Z}_+^2 \subseteq U\right\} \geq 1.$$

*Тогда для ядра Дирихле по системе Уолша*

$$D_U(x,y) = \sum_{(k,j)\in U} w_k(x) w_j(y)$$

*для любых $x, y \in (0,1)$ справедливы такие оценки :*

$$|D_U(x,y)| \leq CK \frac{n^2(U)}{\sqrt{n(U)x+1}\sqrt{n(U)y+1}}, \tag{10}$$

$$\left|\int_x^1 D_U(t,y)dt\right| \leq CK \frac{n(U)\sqrt{\ln(n(U)x+2)}\sqrt{\ln(n(U)y+2)}}{\sqrt{n(U)x+1}\sqrt{n(U)y+1}}, \tag{11}$$

$$\left|\int_y^1 D_U(x,s)ds\right| \leq CK \frac{n(U)\sqrt{\ln(n(U)x+2)}\sqrt{\ln(n(U)y+2)}}{\sqrt{n(U)x+1}\sqrt{n(U)y+1}}, \tag{12}$$

$$\left|\int_x^1\int_y^1 D_U(t,s)dtds\right| \leq CK \frac{\sqrt{\ln(n(U)x+2)}\sqrt{\ln(n(U)y+2)}}{\sqrt{n(U)x+1}\sqrt{n(U)y+1}}, \tag{13}$$

Для тригонометрической системы эта лемма была доказана М. И. Дьяченко [2]. Для системы Уолша доказательство аналогично и вытекает из оценок (4) и (5).

**Замечание.** Пусть $2^k \leq n(U) < 2^{k+1}$. Тогда, если в оценках (10) – (13) поставить $2^k$ вместо $n(U)$, то эти оценки снова будут справедливы с $4C$ вместо $C$.

**Лемма 2.** *Пусть функция $f(x,y) \in \Lambda BV([0,1]^2)$ непрерывна на компакте $E \subset [0,1]^2$. Тогда*

$$\Lambda V_{[x-\delta,x+\delta]\times[y-\delta,y+\delta]}(f) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0$$

*равномерно на $E$.*

Эта лемма была доказана А. Саакяном [1] для случая $\Lambda \equiv \{n\}_{n=1}^{\infty}$. В общем случае это доказательство остается практически таким же.

## § 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.

*Доказательство теоремы 1* : Так как

$$S_U(f,x,y) = \int_0^1\int_0^1 f(t,s) D_U(x\oplus t, y\oplus s)dtds,$$

то

$$S_U(f,0,0) = \int_0^1\int_0^1 f(t,s) D_U(t,s)dtds,$$

и $S_U(f,0,0)$ оценивается с помощью леммы 1 точно так же, как это было сделано для тригонометрический системы в работе М. И. Дьяченко [2]. Более того, для $U \in A(K)$ и всякой интегрируемой функции $f$ имеет место оценка

$$|S_U(f,0,0)| \le CK \left( \sum_{i,j=1}^{l} \frac{f^*(\Delta_i,\Delta_j)}{\lambda_i\lambda_j} + \sum_{i=1}^{l} \frac{f^*(\Delta_i,y_1)}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^{l} \frac{f^*(x_1,\Delta_j)}{\lambda_j} + |f(x_1,y_1)| \right)$$

$$=: CK\left(S_1(f)+S_2(f)+S_3(f)+S_4(f)\right), \tag{14}$$

где $l = 2^k$, $2^k \le n(U) < 2^{k+1}$, $x_i = y_i = i/l$ и $\Delta_i = (x_{i-1}, x_i)$ для $i = 1,2,\dots,l$.

Выберем произвольные $a, b \in [0,1]$ и, используя (14), оценим $S_U(f,a,b)$. Пусть $F(x,y) := f(x \oplus a, y \oplus b)$. Учитывая инвариантность интеграла относительно $\oplus$-сдвига (см. (9)) имеем

$$S_U(f,a,b) = S_U(F,0,0) \tag{15}.$$

Сначала оценим $S_1(F)$. Обозначим

$$\Omega_0 := \left\{1,2,\dots,2^k\right\}, \quad \#\Omega_0 = 2^k,$$

$$\Omega_n := \left\{i = 2^n s, \quad s = 1,2,\dots,2^{k-n}\right\}, \quad \#\Omega_n = 2^{k-n}, \quad n = 1,2,\dots,k.$$

Поскольку $\Omega_0 \supset \Omega_1 \supset \dots \supset \Omega_k$, то

$$\Omega_0 = \bigcup_{n=0}^{k-1} (\Omega_n \setminus \Omega_{n+1}) \bigcup \Omega_k =: \bigcup_{n=0}^{k} G_n, \tag{16}$$

$$G_n = \left\{2^n + r2^{n+1} : \quad 0 \le r < 2^{k-n-1}\right\},$$

$$\#G_n = 2^{k-n-1}, \quad n = 0,1,\dots,k-1, \quad \#G_k = 1. \tag{17}$$

Из (14) и (16) имеем

$$S_1(F) = \sum_{i,j=1}^{l} \frac{F^*(\Delta_i,\Delta_j)}{\lambda_i\lambda_j} = \sum_{i,j\in\Omega_0} \frac{F^*(\Delta_i,\Delta_j)}{\lambda_i\lambda_j}$$

$$= \sum_{n,m=0}^{k} \left( \sum_{i\in G_n, j\in G_m} \frac{F^*(\Delta_i,\Delta_j)}{\lambda_i\lambda_j} \right) =: \sum_{n,m=0}^{k} A_{n,m} \tag{18}$$

Пусть $i \in G_n$, $n < k$, тогда (см. (17)) $i = 2^n + r2^{n+1}$, $0 \le r < 2^{k-n-1}$, и

$$\Delta_i = \left( \frac{2^n + r2^{n+1} - 1}{2^k}, \frac{2^n + r2^{n+1}}{2^k} \right) \subset \left[ \frac{r2^{n+1}}{2^k}, \frac{2^n + r2^{n+1}}{2^k} \right]$$

$$= \left[ \frac{2r}{2^{k-n}}, \frac{2r+1}{2^{k-n}} \right] = \overline{\Delta}_{2r}^{(k-n)}. \tag{19}$$

Обозначим

$$z_r = a \oplus \frac{2r}{2^{k-n}} = a \oplus \frac{r}{2^{k-n-1}}, \quad 0 \le r < 2^{k-n-1},$$

$$I_r = \left[ z_r - \frac{1}{2^{k-n}}, z_r + \frac{1}{2^{k-n}} \right] \cap [0,1], \quad 0 \le r < 2^{k-n-1}. \tag{20}$$

Все чисал из множества $\{z_r\}_{r=0}^{2^{k-n-1}-1}$ в двоичной записи имеют одинаковые цифры, начиная с $(k-n)$-ого места и из первых $(k-n-1)$ цифр некоторые различны. Следовательно,

$$|z_i - z_j| \ge \frac{1}{2^{k-n-1}}, \quad i \ne j.$$

Поэтому интервалы $\{I_r\}_{r=0}^{2^{k-n-1}-1}$ попарно не пересекаются (исключая концевые точки).

Из (8) для всякого $x \in \overline{\Delta}_{2r}^{(k-n)}$ имеем

$$|a \oplus x - z_r| = \left| a \oplus x - a \oplus \frac{2r}{2^{k-n}} \right| \le \left| x \oplus \frac{2r}{2^{k-n}} \right| \le \frac{1}{2^{k-n}}$$

следовательно, $a \oplus x \in \left[ z_r - \frac{1}{2^{k-n}}, z_r + \frac{1}{2^{k-n}} \right]$ и

$$a \oplus \overline{\Delta}_{2r}^{(k-n)} \subset I_r. \tag{21}$$

Из (19) и (21) получим, что для $i \in G_n$, $n < k$,

$$a \oplus \overline{\Delta}_i \subset I_r, \quad i = 2^n + r2^{n+1}, \quad 0 \le r < 2^{k-n-1}. \tag{22}$$

Итак, при $n < k$ каждое из множеств $\left\{ a \oplus \overline{\Delta}_i \right\}_{i \in G_n}$ принадлежит одному из интервалов $\{I_r\}$, которые попарно не пересекаются. Семейство $\left\{ a \oplus \overline{\Delta}_i \right\}_{i \in G_k}$ состоит из одного множества, и в качестве $\{I_r\}$ можно взять $\{[0,1]\}$.

Аналогичным образом, для $0 \le m \le k$ можно построить семейство $\{J_p\}$ непересекающихся интервалов из $[0,1]$, так, что

$$b \oplus \overline{\Delta}_j \subset J_p, \quad j = 2^m + p2^{m+1}, \quad 0 \le p < 2^{k-m-1}. \tag{23}$$

Из (18), (22), (23) и равенства $F(x,y) = f(x \oplus a, y \oplus b)$ имеем

$$A_{n,m} \le \sum_{i \in G_n, j \in G_m} \frac{f^*(I_{r(i)}, J_{p(j)})}{\lambda_i \lambda_j},$$

где $i = 2^n + r(i)2^{n+1}$ и $j = 2^m + p(i)2^{m+1}$. Следовательно, для $i(r) = 2^n + r2^{n+1}$ и $j(p) = 2^m + p2^{m+1}$ имеем

$$A_{n,m} \le \sum_{0\le r<2^{k-n-1}} \sum_{0\le p<2^{k-m-1}} \frac{f^*(I_r, J_p)}{\lambda_{i(r)}\lambda_{j(p)}}. \tag{24}$$

Оценим $\lambda_{i(r)}$.

$$\lambda_{i(r)} = \frac{\sqrt{i(r)}}{\sqrt{\ln(i(r)+1)}} = \frac{\sqrt{2^n + r2^{n+1}}}{\sqrt{\ln(2^n + r2^{n+1} + 1)}} \ge \frac{2^{n/2}\sqrt{r+1}}{\sqrt{\ln(2^{n+1}(r+2))}}$$
$$\ge \frac{2^{n/2}\sqrt{r+1}}{\sqrt{\ln(r+2)+n+1}} \ge \frac{2^{n/2}\sqrt{r+1}}{2\sqrt{n+1}\sqrt{\ln(r+2)}} = \frac{2^{n/2}}{2\sqrt{n+1}}\lambda_{r+1}. \tag{25}$$

Откуда получаем

$$\frac{1}{\lambda_{i(r)}} \le a_n \frac{1}{\lambda_{r+1}}, \quad \text{где} \quad a_n = \frac{2\sqrt{n+1}}{2^{n/2}}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A < \infty. \tag{26}$$

Аналогичным образом получим, что

$$\frac{1}{\lambda_{j(p)}} \le a_m \frac{1}{\lambda_{p+1}}. \tag{27}$$

Используя (24), (26), (27) и тот факт, что $\{I_r\}$ и $\{J_p\}$ состоят из попарно непересекающихся интервалов, получим

$$A_{n,m} \le \sum_{0\le r<2^{k-n-1}} \sum_{0\le p<2^{k-m-1}} \frac{f^*(I_r, J_p)}{\lambda_{i(r)}\lambda_{j(p)}}$$
$$\le a_n a_m \sum_{0\le r<2^{k-n-1}} \sum_{0\le p<2^{k-m-1}} \frac{f^*(I_r, J_p)}{\lambda_{r+1}\lambda_{p+1}} \le a_n a_m \Lambda_{1/2} V(f). \tag{28}$$

Из (18) и (28) имеем

$$S_1(F) = \sum_{n,m=0}^{k} A_{n,m} \le \Lambda_{1/2} V(f) \sum_{n,m=0}^{k} a_n a_m \le A^2 \Lambda_{1/2} V(f). \tag{29}$$

Аналогичным образом получим,

$$S_2(F) \le A\Lambda_{1/2} V(f), \tag{30}$$
$$S_3(F) \le A\Lambda_{1/2} V(f). \tag{31}$$

Кроме того, имеем

$$S_4(F) = |F(x_1, y_1)| = |f(x \oplus x_1, y \oplus y_1)| \le \Lambda_{1/2} V(f). \tag{32}$$

Из формул (14) - (15) и (29) — (32) следует, что

$$|S_U(f,a,b)| \le CK\Lambda_{1/2}V(f),$$

и первое утверждение теоремы доказано.

Приступим к доказательству второго утверждения теоремы. Пусть $f(x,y) \in \Lambda BV([0,1]^2)$, где $\Lambda = \{\lambda'_n\}$, $\lambda'_n = o(\lambda_n)$ при $n \to \infty$. Тогда $f(x,y) \in \Lambda_{1/2}BV([0,1]^2)$.

Докажем, что если $f(x,y) = 0$ в некоторой окрестности точки $(a,b) \in [0,1]^2$, то ряд Фурье–Уолша функции $f$ $u(K)$-сходится к нулю в точке $(a,b)$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно (18) и (28) имеем

$$S_1(F) = \sum_{n,m=0}^{k} A_{n,m}, \quad A_{n,m} \le a_n a_m \Lambda_{1/2}V(f).$$

Тогда существует число $N_\varepsilon$, независящее от $k$ такое, что

$$S_1(F) = \sum_{n,m=0}^{N_\varepsilon} A_{n,m} + \alpha, \tag{33}$$

где $|\alpha| < \varepsilon$. Убедимся, что каждое слагаемое суммы $\sum\limits_{n,m=0}^{N_\varepsilon} A_{n,m}$ стремится к нулю при $n(U) \to \infty$ $(k \to \infty)$. Пусть

$$f(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D(a) \times D(b), \tag{34}$$

где $D(a) = \left[a - \frac{1}{2^q}, a + \frac{1}{2^q}\right] \cap [0,1]$, $D(b) = \left[b - \frac{1}{2^q}, b + \frac{1}{2^q}\right] \cap [0,1]$, $q \in \mathbb{N}$ и $k > N_\varepsilon + q + 2 =: M_\varepsilon$. Заметим, что при $n \le N_\varepsilon$ имеем

$$I_r \subset D(a) \quad \text{при} \quad r = 0,1,\dots,2^{k-M_\varepsilon}. \tag{35}$$

Так как $\frac{2r}{2^{k-n}} \le \frac{2^{k+1-M_\varepsilon}}{2^{k-n}} \le \frac{1}{2^{q+1}}$ при $r = 0,1,\dots,2^{k-M_\varepsilon}$, то из (1) имеем

$$|z_r - a| = \left|a \oplus \frac{2r}{2^{k-n}} - a\right| \le \frac{1}{2^{q+1}},$$

и из (20) получим (35). Подобным образом получим, что

$$J_p \subset D(b) \quad \text{при} \quad p = 0,1,\dots,2^{k-M_\varepsilon}. \tag{36}$$

Из $\lambda'_n = o(\lambda_n)$ следует, что существует число $N_0$ такое, что

$$\frac{\lambda'_i}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon^2} \quad \text{при} \quad i \geq N_0.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\lambda_i} < \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon^2}\frac{1}{\lambda'_i} \quad \text{при} \quad i \geq N_0. \tag{37}$$

Из (34) - (36) имеем

$$f^*(I_k, J_p) = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, 2^{k-M_\varepsilon}, \quad p = 0, 1, \ldots, 2^{k-M_\varepsilon}. \tag{38}$$

Возьмем $k_0$ так, что $2^{k-M_\varepsilon} > N_0$ при $k > k_0$. Используя (24) и (37) - (38) для $k > k_0$ имеем

$$A_{n,m} \leq \sum_{0 \leq r < 2^{k-n-1}} \sum_{0 \leq p < 2^{k-m-1}} \frac{f^*(I_r, J_p)}{\lambda_{i(r)}\lambda_{j(p)}} \leq \sum_{N_0 \leq r < 2^{k-n-1}} \sum_{N_0 \leq p < 2^{k-m-1}} \frac{f^*(I_r, J_p)}{\lambda_r \lambda_p}$$

$$\leq \sum_{N_0 \leq r < 2^{k-n-1}} \sum_{N_0 \leq p < 2^{k-m-1}} \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon^2}\frac{f^*(I_r, J_p)}{\lambda'_r \lambda'_p} \leq \frac{\varepsilon}{N_\varepsilon^2}\Lambda V(f). \tag{39}$$

Согласно (33) и (39) имеем

$$S_1(f) \leq \varepsilon C(\Lambda V(f) + 1) \quad \text{при} \quad k > k_0.$$

Последнее означает, что $S_1(F) \to 0$ при $n(U) \to \infty$. Подобным образом доказывается, что $S_2(F) \to 0$, $S_3(F) \to 0$ и $S_4(F) \to 0$ при $n(U) \to \infty$. Следовательно. (см. (14), (15))

$$S_U(f, a, b) \to 0 \quad \text{при} \quad n(U) \to \infty. \tag{40}$$

Из доказательства видим, что соотношение (40) имеет место равномерно для семейства функций, удовлетворяющих (34) и имеющих равномерно ограниченые $\Lambda$-вариации.

Теперь предположим, что $f(x, y)$ непрерывна на компакте $E \subset [0, 1]^2$, и покажем, что ее ряд Фурье–Уолша равномерно $u(K)$–сходится на $E$. Пусть $a, b \in E$. Положим $\overline{f}(x, y) := f(x, y) - f(a, b)$. Тогда $\overline{f}(a, b) = 0$ и функция $\overline{f}(x, y)$ непрерывна в точке $(a, b)$. При любом $\delta > 0$ функцию $\overline{f}(x, y)$ можно представить в виде суммы $\overline{f}(x, y) = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, где $f_1(x, y) = \overline{f}(x, y)X_{D(a)\times D(b)}(x, y)$, $D(a) = [a - \delta, a + \delta] \cap [0, 1]$ и $D(b) = [b - \delta, b + \delta] \cap [0, 1]$. Отметим что $\overline{f}, f_1, f_2 \in \Lambda BV([0, 1]^2)$ и $f_2$ имеет равномерно ограниченную $\Lambda$-вариацию относительно $(a, b) \in E$. Так как $\overline{f}(x, y)$ непрерывна в точке $(a, b)$, то при $\delta \to +0$, получаем

$$\Lambda V(f_1) = \Lambda V_{D(a)\times D(b)}(\overline{f}) + \Lambda V_{D(a)}(\overline{f}(x, b - \delta)) + \Lambda V_{D(b)}(\overline{f}(a - \delta, y)) + o(1).$$

Применяя уже доказанную часть теоремы, лемму 2 и хорошо известный результат о непрерывности одномерной вариации в точках непрерывности функции, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|S_U(f_1, a, b)| \le CK\Lambda_{1/2}V(f_1) \le CK\Lambda V(f_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

для любого $U \in A(K)$. Так как $f_2(x, y) = 0$ при $(x, y) \in D(a) \times D(b)$, то согласно доказанному ранее, имеем

$$|S_U(f_2, a, b)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

если $n(U)$ достаточно большое число. Следовательно,

$$|S_U(f, a, b) - f(a, b)| < \varepsilon, \quad \forall (a, b) \in E \quad \text{при} \quad n(U) > N_\varepsilon,$$

т.е. ряд Фурье–Уолша функции $f$ равномерно $u(K)$–сходится на $E$. Теорема 1 доказана.

**Abstract.** The article proves that if a summable function $f(x, y)$ belongs to Waterman's class $\Lambda BV([0, 1]^2)$ for $\Lambda = \left\{\overline{o}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\ln(n+1)}}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ and is continuous at every point of some compact $E$, then the double Fourier–Walsh series of $f(x, y)$ is uniformly $u(K)$–convergent on $E$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Саакян, "О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 6, стр. 517 – 529, 1986.
2. М. И. Дьяченко, "Двумерные классы Ватермана и $u$–сходимость рядов Фурье", Мат. сб., том 190, № 7, стр. 55 – 68, 1999.
3. Б. И. Голубев, Ряды и преобразования Уолша, Москва, 1987.
4. D. Waterman, "On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation", Studia Math., vol. 44, № 1, pp. 107 – 117, 1972.
5. О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса для кратных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 28, № 3, стр. 1 – 20, 1993.
6. . О. Г. Саргсян, "О сходимости и явлении Гиббса для двойных рядов Фурье–Уолша функций ограниченной гармонической вариации", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 30, № 5, стр. 41 – 59, 1995.

Поступила 20 января 2005