

СВОЙСТВО БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ ОБЩЕЙ
ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА
В $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$

К. А. Керян

Ереванский Государственный Университет
E-mail: karepkeryan@yahoo.com

Резюме. Общая периодическая система Франклина, соответствующая всюду плотной последовательности точек $T = (t_n, n \geq 0)$ из отрезка $[0, 1]$, определяется как последовательность ортонормированных, кусочно-линейных (с конечным множеством узлов $t_0, \dots, t_n \in T$), непрерывных функций с периодом 1. Основным результатом данной статьи устанавливается, что любая общая периодическая система Франклина является безусловным и гриди-базисами в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1928 году Франклин [1] построил первый пример полной, ортонормальной системы, которая является базисом в $C[0, 1]$. До этого Хаар [2] построил полную ортонормальную систему такую, что ряд Фурье–Хаара любой непрерывной функции равномерно сходится к той же функции. Однако система Хаара не является базисом в $C[0, 1]$, так как функции системы Хаара разрывны.

Систематические исследования системы Франклина начались с работ З. Чисельского [3], [4], где, в частности, получены экспоненциальные оценки функций системы Франклина.

В дальнейшем эти оценки сыграли фундаментальную роль в исследованиях по системе Франклина. В частности, эти оценки были использованы С. В. Бочкаревым [5] для доказательства утверждения, что система Франклина является

Работа выполнена при финансовой поддержке ANSEF, грант № 05-PS-math-87-65.

безусловным базисом в любом рефлексивном пространстве Орлича и поэтому и в пространстве $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Позже П. Войташчик [6] доказал безусловную базисность системы Франклина в пространстве $\mathcal{RN}_1$. З. Чисельский [7] ввел в рассмотрение периодическую систему Франклина и показал, что многие свойства непериодической системы Франклина сохраняются также для периодической системы.

Исследование общей системы Франклина началось в работе [8], где получены оценки для частичных сумм ряда Фурье–Франклина. Свойство безусловной базисности общей системы Франклина в пространстве $L_p[0, 1]$ при некоторых ограничениях на структуру разбиения отрезка $[0, 1]$ было доказано в работах [9, 10].

Г. Г. Геворкян и А. Камохт [11] окончательно решили вопрос безусловной базисности системы Франклина в $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Ими доказано, что при любом допустимом разбиении отрезка $[0, 1]$, соответствующая система Франклина является безусловным базисом в $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Они также доказали, что общая система Франклина является гриди-базисом в $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

В настоящей работе исследуются общие периодические системы Франклина. Нами получены оценки частичных сумм ряда Фурье интегрируемых функций по общей периодической системе Франклина. Мы также доказали, что общая периодическая система Франклина является безусловным и гриди-базисами в пространствах $L_p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Отметим, что как в периодическом, так и в непериодическом случаях для функций общей системы Франклина нет экспоненциальных оценок, которые сыграли важную роль в исследованиях классической системы Франклина.

Мы в дальнейшем будем использовать следующие обозначения. Для любого множества $A \subset [0, 1]$ через χ_A мы будем обозначать характеристическую функцию множества A , через $|A|$ лебегову меру множества A , а через A^c дополнение множества A , т.е. $A^c = [0, 1] \setminus A$. $\#B$ обозначает число элементов множества B , поэтому $\#B = \infty$ для бесконечного множества B . Поскольку мы будем рассматривать периодический интервал $[0, 1]$, то допустимы обозначения $[a; b]$ с $a > b$. В этом случае $[a; b] = [a; 1] \cup [0; b]$. Для любой интегрируемой функции $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ положим $\overline{M}f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt$, где I – обобщенный интервал, а под функцией $\overline{M}f(x)$ будем понимать максимальную функцию Харди–Литтлвуда. Для любых a и b обозначим $a \vee b = \max(a, b)$ и $a \wedge b = \min(a, b)$. Наконец, $a \sim b$ будет означать, что существуют положительные константы c_1, c_2 не зависящие от a и b такие, что $c_1 a \leq b \leq c_2 a$.

§2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\sigma = (s_i, 0 \leq i \leq N)$ разбиение отрезка $[0, 1]$ с простыми узлами, причем

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 \dots < s_{N-1} < s_N = 1. \quad (2.1)$$

Через $S(\sigma)$ обозначим множество всех непрерывных функций f , которые линейны на каждом отрезке $[s_i, s_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$, и удовлетворяющие условию $f(0) = f(1)$. Далее пусть

$$N_{\sigma,0}(t) = \frac{s_1 - t}{s_1 - s_0} \chi_{[s_0, s_1]}(t) + \frac{t - s_{N-1}}{s_N - s_{N-1}} \chi_{[s_{N-1}, s_N]}(t),$$

$$N_{\sigma,i}(t) = \frac{t - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} \chi_{(s_{i-1}, s_i]}(t) + \frac{s_{i+1} - t}{s_{i+1} - s_i} \chi_{(s_i, s_{i+1}]}(t), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Ясно, что любая функция $f \in S(\sigma)$ имеет единственное представление вида

$$f = \sum_{i=0}^{N-1} a_i N_{\sigma,i},$$

где коэффициенты a_i определяются равенствами $a_i = f(s_i)$.

Пусть $\sigma = (s_i, 0 \leq i \leq N)$ и $\sigma^* = (s_i^*, 0 \leq i \leq N+1)$ такие разбиения отрезка $[0, 1]$, которые удовлетворяют условию (2.1) и σ^* получается из σ добавлением одной новой точки s^* . Очевидно, $\dim S(\sigma^*) = \dim S(\sigma) + 1$ и $S(\sigma) \subset S(\sigma^*)$. Следовательно, существует единственная функция $\varphi \in S(\sigma^*)$ такая, что φ ортогональна к $S(\sigma)$ в $L^2[0, 1]$, $\|\varphi\|_2 = 1$ и $\varphi(s^*) > 0$. Эту функцию φ назовем общей периодической функцией Франклина соответствующая паре разбиений (σ, σ^*) .

Определение 1. Последовательность точек $T = (t_n, n \geq 0)$ из $[0, 1]$ назовем допустимой, если $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_n \in [0, 1]$, $t_i \neq t_j$ при $i \neq j$, и T всюду плотно в $[0, 1]$.

Для допустимой последовательности $T = (t_n, n \geq 0)$ и $n \geq 1$, через $\pi_n = (t_{n,i}, 0 \leq i \leq n)$ обозначим разбиение интервала $[0, 1]$, полученное возрастающей перестановкой последовательности $(t_i, 0 \leq i \leq n)$. Отметим, что все разбиения π_n удовлетворяют условию (2.1), и π_n получается из π_{n-1} добавлением точки t_n .

Определение 2. Под общей периодической системой Франклина, соответствующей допустимой последовательности T , будем понимать последовательность функций $\{f_n, n \geq 1\}$, определяемых следующим образом: $f_1(t) = 1$, и f_n ($n \geq 2$)

– общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений (π_{n-1}, π_n) .

Известно, что при любом допустимом разбиении, соответствующая общая непериодическая система Франклина является базисом в пространстве непрерывных функций (см. например [12], Теорема 6 в Главе 6). Дословным повторением доказательства этой теоремы, можно показать, что при любом допустимом разбиении, соответствующая общая периодическая система Франклина является базисом в пространстве непрерывных, периодических функций.

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. Пусть T допустимая последовательность и $\{f_n, n \geq 1\}$ соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда для любой интегрируемой функции f частичные суммы $S_n f(x)$ ряда Фурье–Франклина удовлетворяют неравенству

$$S_n f(x) \leq C \widetilde{M} f(x) \quad \text{для всех } x \in [0, 1] \text{ и } n = 1, 2, \dots$$

и сходятся к функции $f(x)$ почти всюду в $[0, 1]$.

Теорема 2. Общая периодическая система Франклина, соответствующая любой допустимой последовательности T является безусловным базисом в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Теорема 3. Общая периодическая система Франклина, соответствующая любой допустимой последовательности T является гриди-базисом в пространствах $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$.

Отметим, что при доказательстве мы получаем нечто большее. А именно, для любого $p \in (1, \infty)$ существует постоянная C_p , зависящая только от p такая, что при любой последовательности коэффициентов $\{a_n, n \geq 0\}$ и любом выборе знаков $\varepsilon_n = \pm 1$ получаем

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n f_n \right\|_p \leq C_p \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n \right\|_p.$$

Отметим, что в [11] допускались также двойные точки в разбиении T . Здесь мы этого не делаем, поскольку при появлении двойной точки в разбиении, периодическая система Франклина с некоторого номера превращается в непериодическую систему.

§3. ОЦЕНКИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ РЯДА ФУРЬЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\pi = \{t_i; 0 \leq i \leq n\}$ допустимое разбиение отрезка $[0, 1]$, т.е.

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

и пусть S_π — пространство всех непрерывных, кусочно линейных функций с периодом 1 и с узлами t_i . Введем следующие обозначения:

$$l_i = t_i - t_{i-1}, \quad l_{n+k+i} = l_i \quad \text{для } k \in \mathbb{Z},$$

$$\nu_i = \frac{l_i + l_{i+1}}{2}.$$

Далее, пусть $G = G_\pi = [(N_{\pi,i}, N_{\pi,j}); 0 \leq i, j \leq n-1]$ — матрица Грамма системы $\{N_{\pi,i}\}_{i=0}^{n-1}$ и пусть $G^{-1} = A = (a_{i,j})_{i,j=0}^{n-1}$. Для удобства будем считать, что

$$a_{n+k+i, n+m+j} = a_{i,j}, \quad \text{где } k, m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда числа $a_{i,j}$ имеют следующие свойства.

Свойство 1. Для любых i и j имеют место следующие соотношения

$$l_i a_{i-1,j} + 2(l_i + l_{i+1})a_{i,j} + l_{i+1}a_{i+1,j} = 6\delta_{i,j}, \quad (3.1)$$

$$1, 2 \leq a_{i,j} \nu_i \leq 2, \quad (3.2)$$

и для каждого i существует некоторое n_i такое, что $i < n_i < i + n$ и

$$a_{i,j} = (-1)^{i+j} |a_{i,j}| \quad \text{при } n_i - n + 1 \leq j \leq n_i, \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} |a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j+1}| & \text{при } i \leq j \leq n_i - 1, \\ |a_{i,j}| \geq 2|a_{i,j-1}| & \text{при } n_i - n + 2 \leq j \leq i, \end{cases} \quad (3.4)$$

$$|a_{i,j}| \leq \frac{2}{2^{|i-j|_n}} \frac{1}{\nu_i \vee \nu_j}, \quad (3.5)$$

где $|i-j|_n = \min(|i-j|, n - |i-j|)$ и

$$\begin{cases} |a_{i,j}| \leq \frac{2}{2^{\min(j-i, -2k+n+j+i)}} \frac{1}{\nu_k} & \text{при } i \leq k \leq j \leq n_i, \\ |a_{i,j}| \leq \frac{2}{2^{\min(i-j, 2k+n-i+j)}} \frac{1}{\nu_k} & \text{при } n_i - n + 1 \leq j \leq k \leq i. \end{cases} \quad (3.6)$$

Для каждого i существует некоторое k_i такое, что $n_i \wedge n_{i-1} \leq k_i \leq n_i \vee n_{i-1}$

$$|a_{i+\epsilon, j+\eta}| \leq \frac{8}{2^{\min[j-i, -2k+n+j+i]}} \frac{1}{l_k} \quad (3.7)$$

для $\epsilon = 0, -1, \eta = 0, -1$ и $i \leq k \leq j < k_i \leq n + i$, и

$$|a_{i+\epsilon, j+\eta}| \leq \frac{8}{2^{\min[n+i-j, 2k-j-i]}} \frac{1}{l_k}$$

для $\epsilon = 0, -1, \eta = 0, 1$ и $i < k_i \leq j \leq k \leq n + i$.

Доказательство : Ясно, что равенство (3.1) равносильно условию $G^{-1} = A$. Из $(N_i, N_j) = (N_j, N_i)$ следует, что $a_{i,j} = a_{j,i}$. Покажем, что

$$|a_{i,i}| \geq 2|a_{i,i\pm 1}|.$$

Допустим противное. Без ограничения общности можем считать, что $|a_{i,i}| < 2|a_{i,i+1}| = 2|a_{i+1,i}|$. Из равенств (3.1) имеем

$$l_{i+1}a_{i,i} + 2(l_{i+1} + l_{i+2})a_{i+1,i} + l_{i+2}a_{i+2,i} = 0$$

что равносильно

$$l_{i+1}(a_{i,i} + 2a_{i+1,i}) + l_{i+2}(2a_{i+1,i} + a_{i+2,i}) = 0.$$

Из последнего равенства и из $\operatorname{sgn}(a_{i,i} + 2a_{i+1,i}) = \operatorname{sgn}(a_{i+1,i})$ следует, что $\operatorname{sgn}(2a_{i+1,i} + a_{i+2,i}) = -\operatorname{sgn}(a_{i+1,i})$, и поэтому $2|a_{i+1,i}| < |a_{i+2,i}|$. Повторяя эти рассуждения, получим

$$\begin{aligned} |a_{i,i}| &< 2|a_{i+1,i}| < |a_{i+2,i}| < \frac{1}{2}|a_{i+3,i}| < \dots < \frac{1}{2^{n-3}}|a_{i+n-1,i}| < \\ &< \frac{1}{2^{n-2}}|a_{i+n,i}| = \frac{1}{2^{n-2}}|a_{i,i}| \end{aligned}$$

которое невозможно при $n \geq 2$. Из (3.1) также имеем

$$l_i a_{i-1,i} + 2(l_i + l_{i+1})a_{i,i} + l_{i+1}a_{i+1,i} = 0.$$

Следовательно, из последнего равенства и неравенства $|a_{i,i}| \geq 2|a_{i,i\pm 1}|$ вытекает (3.2). Тем же способом можно доказать, что если $|a_{i,j}| \leq 2|a_{i,j+1}|$, то

$$2|a_{i,j+1}| \leq |a_{i,j+2}| \leq \frac{1}{2}|a_{i,j+3}| \leq \dots \leq \frac{1}{2^{i+n-j-2}}|a_{i,i+n}|$$

и $a_{i,k}a_{i,k+1} < 0$ для $j+1 \leq k \leq i+n-1$. Определим n_i следующим образом

$$n_i = \max\{j : |a_{i,j-1}| \geq 2|a_{i,j}| \text{ и } a_{i,j}a_{i,j-1} \leq 0, i \leq j \leq i+n\}.$$

Из определения n_i следует (3.3) и (3.4). Из (3.6) следует оценка (3.5), а (3.6) вытекает из определения n_i и свойства (3.4).

Осталось доказать (3.7). Допустим, что $n_i > n_{i-1}$ и обозначим

$$k_i = \begin{cases} n_{i-1}, & \text{если } |a_{i,n_{i-1}}| < |a_{i-1,n_{i-1}}| \\ n_i, & \text{если } |a_{i,n_i}| \geq |a_{i-1,n_i}| \\ \max\{j \leq n_i : |a_{i,j}| \geq |a_{i-1,j}|\} + 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда из (3.6) получим (3.7). Доказательство завершено.

С помощью матрицы A , определим биортогональную систему $\{N_i^*\}_{i=0}^{n-1}$ следующим образом :

$$N_i^*(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_{i,j} N_j(t), \quad t \in [0, 1].$$

Ясно, что $(N_i, N_j^*) = \delta_{i,j}$ и $N_i^*(t_j) = a_{i,j}$. Пусть

$$K_\pi(t, s) = \sum_{i=0}^{n-1} N_i(t) N_i^*(s), \quad t, s \in [0, 1].$$

Тогда для любой функции $f \in L^1[0, 1]$ ее проекцией на пространство S_π будет

$$P_\pi f(t) = \int_0^1 K_\pi(t, s) f(s) ds.$$

Теорема 4. Пусть $\pi = \{t_i : 0 \leq i \leq n\}$ – разбиение отрезка $[0, 1]$ и $t \in [t_{i-1}, t_i]$ для некоторого i . Тогда существует $\tilde{t}_{k_i} \in [t_{k_i-1}, t_{k_i}]$ такое, что

$$\int_t^{\tilde{t}_{k_i}} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [s, \tilde{t}_{k_i}]) ds \leq 128, \quad (3.8)$$

$$\int_{\tilde{t}_{k_i}}^t \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [\tilde{t}_{k_i}, s]) ds \leq 128, \quad (3.9)$$

где $[a, b]$ – обобщенный интервал (т.е. $[a, b] = [a, 1] \cup [0, b]$, если $a > b$) и $\text{var} (f; [a, b])$ – полная вариация функции f на отрезке $[a, b]$.

Доказательство : Определим точку $\tilde{t}_{k_i}$: если $K_\pi(t, t_{k_i-1}) K_\pi(t, t_{k_i}) < 0$, то точка $\tilde{t}_{k_i}$ удовлетворяет условию $K_\pi(t, \tilde{t}_{k_i}) = 0$; в противном случае, если $|K_\pi(t, t_{k_i-1})| > |K_\pi(t, t_{k_i})|$, то $\tilde{t}_{k_i} = t_{k_i}$; а если $|K_\pi(t, t_{k_i-1})| \leq |K_\pi(t, t_{k_i})|$, то $\tilde{t}_{k_i} = t_{k_i-1}$. Из определения $\tilde{t}_{k_i}$ следует, что

$$\text{var} (K_\pi(t, \cdot); [t_{k_i-1}, \tilde{t}_{k_i}]) \leq |K_\pi(t, t_{k_i-1})|.$$

Мы приведем доказательство неравенства (3.8), а (3.9) доказывается аналогично. Учитывая последнее неравенство и что функция $K_\pi(t, s)$ кусочно линейная с

узлами π , получаем

$$\begin{aligned}
 \int_t^{\bar{t}_{k_i}} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [s, \bar{t}_{k_i}]) ds &\leq \int_{t_{k_i-1}}^{\bar{t}_{k_i}} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [s, \bar{t}_{k_i}]) ds = \\
 &= \sum_{k=i}^{k_i-1} \int_{I_k} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [s, \bar{t}_{k_i}]) ds + \int_{t_{k_i-1}}^{\bar{t}_{k_i}} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [s, \bar{t}_{k_i}]) ds \leq \\
 &\leq \sum_{k=i}^{k_i-1} l_k \left[\sum_{j=k}^{k_i-1} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); I_j) + \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [t_{k_i-1}, \bar{t}_{k_i}]) \right] + \\
 &+ l_{k_i} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [t_{k_i-1}, \bar{t}_{k_i}]) \leq \\
 &\leq \sum_{k=i}^{k_i-1} l_k \left[\sum_{j=k}^{k_i-1} (|K_\pi(t, t_{j-1})| + |K_\pi(t, t_j)|) + |K_\pi(t, t_{k_i-1})| \right] + l_{k_i} |K_\pi(t, t_{k_i-1})| \leq \\
 &\leq \sum_{k=i}^{k_i} l_k \left[\sum_{j=k}^{k_i-1} (|a_{i-1,j-1}| \vee |a_{i,j-1}| + |a_{i-1,j}| \vee |a_{i,j}|) + |a_{i-1,k_i-1}| \vee |a_{i,k_i-1}| \right].
 \end{aligned}$$

Из (3.7) следует, что

$$|a_{i-1,j-1}| \vee |a_{i,j-1}| + |a_{i-1,j}| \vee |a_{i,j}| \leq \frac{16}{2^{\min\{j-1, -2k+n+j+1\}}} \frac{1}{l_k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 \int_t^{\bar{t}_{k_i}} \text{var} (K_\pi(t, \cdot); [s, \bar{t}_{k_i}]) ds &\leq \sum_{k=i}^{k_i} l_k \left[2 \sum_{j=k}^{k_i} \left(\frac{8}{2^{j-i}} + \frac{8}{2^{-2k+n+j+1}} \right) \frac{1}{l_k} \right] = \\
 &= 16 \sum_{k=i}^{k_i} \sum_{j=k}^{k_i} \left(\frac{1}{2^{j-i}} + \frac{1}{2^{-2k+n+j+1}} \right) \leq 128.
 \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Для любого разбиения π отрезка $[0, 1]$ и функции $f \in L^1[0, 1]$ имеет место

$$|P_\pi f(t)| \leq 256 \overline{\mathbf{M}} f(t). \quad (3.10)$$

Доказательство : этой теоремы совпадает с доказательством Теоремы 4.2 работы [8].

Из (3.10) и из того, что общая периодическая система Фрэнклина является базисом в пространстве непрерывных, периодических функций, методом работы [13] (стр. 36), можно доказать следующее утверждение.

Corollary. Пусть T допустимая последовательность точек отрезка $[0, 1]$ и $\{f_n: n \geq 1\}$ соответствующая ей периодическая система Франклина. Тогда для каждой интегрируемой функции f частичные суммы $S_n f(x)$ ряда Фурье Франклина сходятся к функции $f(x)$ почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

§4. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОБЩЕЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРАНКЛИНА

4.1. Свойства общей периодической системы Франклина. Пусть

$$\bar{\pi} = \{0 = t_{-l} < \dots < t_{-1} < t_1 < \dots < t_{n-l} = 1\} \quad \text{и} \quad \pi = \bar{\pi} \cup \{t^*\},$$

где $t_{-1} < t^* = t_0 < t_1$. Общая периодическая функция Франклина соответствующая разбиениям $(\bar{\pi}, \pi)$ определена в параграфе 2. Как и в [11], каждой функции Франклина поставим в соответствие "канонический интервал" J .

Для построения интервала J , рассмотрим следующие интервалы:

$$I = [t_{-1}, t_1], \quad I^- = [t_{-2}, t_0], \quad I^+ = [t_0, t_2], \\ \nu = |I|, \quad \nu^- = |I^-|, \quad \nu^+ = |I^+|, \quad \mu = \min(\nu^-, \nu, \nu^+).$$

Если $l = 1$ или $n - l = 1$, возьмем $t_{-2} = t_{n-2}$ и $I^- = [t_{n-2}, t_0] = [t_{n-2}, 1] \cup [0, t_0]$ или $t_2 = t_{-n+2}$ и $I^+ = [t_0, t_2] = [t_0, 1] \cup [0, t_{-n+2}]$ соответственно. Теперь выберем $I^* = [t_{i^*}, t_{i^*+2}]$ один из интервалов I^- , I или I^+ так, чтобы $\mu = |I^*|$. Обозначая $I^{*\prime} = [t_{i^*}, t_{i^*+1}]$ и $I^{*\prime\prime} = [t_{i^*+1}, t_{i^*+2}]$, для J выберем или $I^{*\prime}$ или $I^{*\prime\prime}$ так, чтобы $|J| = \max(|I^{*\prime}|, |I^{*\prime\prime}|)$.

Заметим, что из такого выбора μ и J следует, что

$$|J| \leq \mu \leq 2|J|.$$

Для удобства будем считать, что

$$t^{*\prime} = t_{-2}, \quad t^- = t_{-1}, \quad t^+ = t_1 \quad \text{и} \quad t^{*\prime\prime} = t_2.$$

Напомним, что $G = G_\pi = [(N_{\pi,i}, N_{\pi,j}), -l \leq i, j \leq n-l-1]$ есть матрица Грамма системы функций $(N_{\pi,i}, -l \leq i \leq n-l-1)$ и $G^{-1} = A = [a_{i,j}, -l \leq i, j \leq n-l-1]$. Также будем считать, что $a_{n-k+1, n-m+j} = a_{i,j}$ для $k, m \in \mathbb{Z}$. Заметим, что функция $\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i N_i$, где $\omega_i = -\frac{t_0}{t_0+t_1} a_{i,-1} + a_{i,0} - \frac{t_0}{t_0+t_1} a_{i,1}$ принадлежит $S(\pi)$ и ортогональна $S(\bar{\pi})$. Следовательно, $f = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_2} \operatorname{sgn} \varphi(t_0)$ является общей периодической функцией Франклина соответствующей паре разбиений $(\bar{\pi}, \pi)$. Будем считать, что $f = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i N_i$, где f есть общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений $(\bar{\pi}, \pi)$.

Лемма 1. Пусть $\bar{\pi}$ и π суть разбиения с вышеупомянутыми свойствами и f соответствующая им общая периодическая функция Франклина. Тогда

$$\|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2}, \quad |\xi_{-1}| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu}, \quad |\xi_0| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu}, \quad |\xi_1| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu^2} \quad (4.1)$$

с константами не зависящими от $(\bar{\pi}, \pi)$ и p .

Доказательство : Очевидно, что $\omega_0 = -\frac{l_1}{l_0+l_1}a_{0,-1} + a_{0,0} - \frac{l_0}{l_0+l_1}a_{0,1}$. Следовательно, из (3.4), (3.2) и Свойство 1, §3 получим, что $\frac{3}{2}a_{0,0} \geq \omega_0 \geq \frac{1}{2}a_{0,0}$ и $\omega_0 > 0$. Поэтому

$$\varphi(t_0) > 0 \quad \text{и} \quad 0,6 \leq \omega_0 \nu \leq 3.$$

Теперь покажем, что $\omega_1 \sim \frac{1}{\nu^2}$ и $\omega_1 < 0$ при $n \geq 4$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

Случай 1 : $a_{1,0} \geq 0$. Из Свойства 1, §3 следует, что

$$l_0 a_{1,-1} + 2(l_0 + l_1)a_{1,0} + l_1 a_{1,1} = 0, \quad (4.2)$$

Из $a_{1,1} > 0$ и $a_{1,0} \geq 0$ следует, что $a_{1,-1} < 0$ и $|a_{1,-1}| > 2a_{1,0}$. Тем же способом можно доказать, что $|a_{1,-2}| > 2|a_{1,-1}|$, $|a_{1,-3}| > 2|a_{1,-2}|, \dots$. Таким образом, $a_{1,1} \geq 2|a_{1,2}| > 4|a_{1,3}| > \dots > 2^{n-2}|a_{1,-1}|$. Следовательно, с учетом (4.2), получим $l_0|a_{1,-1}| > l_1|a_{1,1}| > l_1 2^{n-2}|a_{1,-1}|$, откуда следует, что $l_0 > 2^{n-2}l_1$. Так как $\omega_1 = -\frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)}a_{1,-1} - \frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)}a_{1,1}$, то оно отрицательно и

$$|\omega_1| = \frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)}|a_{1,1}| - \frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)}|a_{1,-1}| \geq \frac{|a_{1,1}|}{4} \quad \text{при} \quad n \geq 4.$$

Ясно, что $|\omega_1| \leq |a_{1,1}|$, и, следовательно, $\omega_1 < 0$ и $|\omega_1| \sim |a_{1,1}| \sim \frac{1}{\nu^2}$ при $n \geq 4$.

Случай 2 : $a_{1,0} < 0$ и $a_{1,-1} \geq 0$. В этом случае имеем $\omega_1 < 0$ и $|\omega_1| = \frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)}|a_{1,1}| + \frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)}|a_{1,-1}|$. Следовательно, $\frac{1}{2}|a_{1,1}| \leq |\omega_1| \leq \frac{3}{2}|a_{1,1}|$, так как $|a_{1,1}| \geq 2|a_{1,0}| \geq |a_{1,-1}|$. В этом случае также мы имеем $\omega_1 < 0$ и $|\omega_1| \sim |a_{1,1}| \sim \frac{1}{\nu^2}$.

Случай 3 : $a_{1,0} < 0$ и $a_{1,-1} < 0$. Многократным применением неравенства (3.1), аналогично первому случаю получим $a_{1,1} \geq 2|a_{1,2}| \geq 4|a_{1,3}| \geq \dots \geq 2^{n-2}|a_{1,-1}|$. Учитывая последнее неравенство и $\omega_1 = -\frac{2l_0+l_1}{2(l_0+l_1)}a_{1,1} - \frac{2l_1+l_0}{2(l_0+l_1)}a_{1,-1}$ получаем

$$\omega_1 < 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{4}|a_{1,1}| \leq |\omega_1| \leq \frac{3}{2}|a_{1,1}| \quad \text{при} \quad n \geq 4.$$

Комбинируя эти три случая получаем

$$\omega_1 < 0 \quad \text{и} \quad \frac{0,3}{\nu^2} \leq |\omega_1| \leq \frac{3}{\nu^2}.$$

Аналогично доказывается, что $\omega_{-1} < 0$ и $|\omega_{-1}| \sim \frac{1}{\nu_1}$. Очевидно, что существует i_0 такое, что $1 \leq i_0 \leq n-1$ и $|\omega_{i_0}| = \min_{1 \leq i \leq n-1} |\omega_i|$. Учитывая, что $|\omega_{i_0}| \leq |\omega_{i_0+1}|$ из равенства $l_i \omega_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1})\omega_i + l_{i+1}\omega_{i+1} = 0$, где $2 \leq i \leq n-2$, для $i = i_0 + 1$ получим, что ω_{i_0+1} и ω_{i_0+2} имеют разные знаки и $|\omega_{i_0+2}| \geq 2|\omega_{i_0+1}|$. Тем же способом, используя неравенство $|\omega_{i_0+2}| \geq |\omega_{i_0+1}|$ из предыдущего равенства для $i = i_0 + 2$ получим, что ω_{i_0+2} и ω_{i_0+3} имеют разные знаки и $|\omega_{i_0+3}| \geq 2|\omega_{i_0+2}|$. Аналогично доказывается, что

$$\begin{aligned} |\omega_{n-1}| &\geq 2|\omega_{n-2}| \geq \dots \geq 2^{n-i_0-2}|\omega_{i_0+1}| \geq 2^{n-i_0-2}|\omega_{i_0}|, \\ |\omega_1| &\geq 2|\omega_2| \geq \dots \geq 2^{i_0-2}|\omega_{i_0-1}| \geq 2^{i_0-2}|\omega_{i_0}|, \\ \omega_i &= (-1)^i |\omega_i| \quad \text{для} \quad i_0 - n + 1 \leq i \leq i_0 - 1. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Чтобы доказать неравенство $\|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2}$, воспользуемся следующим свойством функций N_i , которое доказывается простыми вычислениями.

Свойство 2 (L_p стабильность функций N_i). Пусть π — разбиение отрезка $[0, 1]$ и $f = \sum_{i=0}^{n-1} a_i N_i \in S(\pi)$. Тогда для любого $p \in [1, \infty]$, имеем

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)^{1/p} \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \nu_i\right)^{1/p} \leq \|f\|_p \leq \left(\sum_{i=0}^{n-1} |a_i|^p \nu_i\right)^{1/p}.$$

Приступим к оцениванию $\|f\|_p$. Заметим, что $|a_{i,j}| = \min_{i \leq j \leq n+i-1} |a_{i,j}|$, где $i \leq j \leq n+i-1$. Следовательно, многократным применением (3.1) как и выше, получим

$$\begin{aligned} |a_{i,i}| &\geq 2|a_{i,i-1}| \geq \dots \geq 2^{n+i-j_i-1}|a_{i,j_i-n+1}| \geq 2^{n+i-j_i-1}|a_{i,j_i}|, \\ |a_{i,i}| &\geq 2|a_{i,i+1}| \geq \dots \geq 2^{j_i-i-1}|a_{i,j_i-1}| \geq 2^{j_i-i-1}|a_{i,j_i}|. \end{aligned}$$

Отсюда и из $|\omega_i| \leq |a_{i,-1}| + |a_{i,0}| + |a_{i,1}|$ получаем, что

$$|\omega_i| \leq 3 \cdot 2^{-\min\{i, n-i\}+1} |a_{i,i}|. \quad (4.4)$$

Из (4.4) и (3.2) следует

$$|\omega_i| \leq 12 \cdot 2^{-\min\{i, n-i\}} \frac{1}{\nu_i}. \quad (4.5)$$

Из Свойства 2, (4.3) и (4.5) получаем

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |\omega_i|^p \nu_i \leq \frac{3^p}{\nu_0^{p-1}} + 2 \frac{3^p}{\nu_1^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \dots + \frac{1}{2^p}\right) + 2 \frac{3^p}{\nu_{-1}^{p-1}} \left(1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p}} + \dots + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2^{(k-1)p}} + \dots + \frac{1}{2^p}\right) \leq 3^p 8 \left(\frac{1}{\nu_0^{p-1}} + \frac{1}{\nu_1^{p-1}} + \frac{1}{\nu_{-1}^{p-1}}\right) \leq \\ &\leq 24 \cdot 3^p \mu^{1-p} \leq 24 \cdot 3^p |J|^{1-p} \end{aligned}$$

для $k = [\frac{n}{2}]$, и

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p^p &\geq \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{n-1} |\omega_i|^p \nu_i \geq \frac{1}{p+1} (|\omega_{-1}|^p \nu_{-1} + |\omega_0|^p \nu_0 + |\omega_1|^p \nu_1) \\ &\geq \frac{(0.3)^p}{p+1} \left(\frac{1}{\nu_0^{p-1}} + \frac{1}{\nu_1^{p-1}} + \frac{1}{\nu_{-1}^{p-1}} \right) \geq \frac{(0.3)^p}{p+1} \mu^{1-p} \geq \frac{2(0.15)^p}{p+1} |J|^{1-p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\varphi\|_p \sim |J|^{1/p-1}.$$

Поскольку $\varphi(t_0) > 0$, то функция Франклина будет равным $f = \frac{\varphi}{\|\varphi\|_2}$. Отсюда получаем

$$\|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2} \quad \text{и} \quad |\xi_i| \sim \frac{|J|^{1/2}}{\nu_i} \quad \text{для} \quad i = 0, \pm 1.$$

Пусть $\pi = \bar{\pi} \cup \{t_0\}$ суть разбиения отрезка $[0, 1]$, и пусть $f = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i N_i$ общая периодическая функция Франклина соответствующая разбиениям $(\bar{\pi}, \pi)$, а i_0 такое, что $|\xi_{i_0}| = \min_{1 \leq i \leq n-1} |\xi_i|$. Тогда из (4.3) получаем

$$\begin{aligned} |\xi_1| &\geq 2|\xi_2| \geq \dots \geq 2^{i_0-2} |\xi_{i_0-1}| \geq 2^{i_0-2} |\xi_{i_0}|, \\ |\xi_{n-1}| &\geq 2|\xi_{n-2}| \geq \dots \geq 2^{n-i_0-2} |\xi_{i_0+1}| \geq 2^{n-i_0-2} |\xi_{i_0}|, \\ \xi_i &= (-1)^{n-i} |\xi_i|, \quad i_0 - n + 1 \leq i \leq i_0 - 1. \end{aligned} \quad (4.6)$$

При этих предположениях имеет место следующее свойство.

Свойство 3. (a) Если $i_0 + 3 - n \leq i \leq -1$, то

$$(a1) \quad \begin{cases} |\xi_{i-1}| \leq \frac{2}{3} \frac{l_i}{l_i + l_{i-1}} |\xi_i|, & |\xi_{i-1}| \leq \frac{|\xi_i|}{2} \quad \text{для} \quad i = i_0 + 2 - n, \\ |\xi_i| = (-1)^i \xi_i, & \text{для} \quad i = i_0 + 2 - n \quad \text{и} \quad i = i_0 + 1 - n. \end{cases}$$

$$(a2) \quad |\xi_i| \leq C \left(\frac{2}{3} \right)^{|i|} \frac{l_{-1}}{\sum_{j=i}^{-1} l_j} \frac{|J|^{1/2}}{\nu^*} \quad \text{для} \quad i = i_0 + 2 - n \quad \text{и} \quad i = i_0 + 1 - n.$$

$$(a3) \quad \begin{cases} |\xi_{i-1}| (\frac{3}{2} l_{i-1} + 2l_i) \leq |\xi_i| l_i \leq 2|\xi_{i-1}| (l_{i-1} + l_i), \\ |\xi_{i_0+1}| (l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}) \leq |\xi_{i_0+2}| l_{i_0+2} \leq |\xi_{i_0+1}| (3l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}). \end{cases}$$

$$(a4) \quad \begin{cases} \int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}} |f(t)|^p dt \leq \epsilon^p \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)|^p dt, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max_{t_{i-2} \leq t \leq t_{i-1}} |f(t)| \leq \epsilon \max_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} |f(t)|, \end{cases} \quad \text{где} \quad \epsilon = \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

А для $i \leq i_0 + 1 \leq -1$ имеем

(a5)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |f(t)|^p dt &\leq \frac{1 - e^p}{e^p} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} |f(t)|^p dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^p dt &\leq \frac{1 - e^p}{e^p} \|f\|_p^p, \quad 1 \leq p < \infty. \end{aligned} \right.$$

(a6)
$$\left\{ \begin{aligned} \max_{t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}} |f(t)| &\leq e^p \max_{t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}} |f(t)|, \\ \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |f(t)| &\leq e^p \|f\|_\infty. \end{aligned} \right.$$

(b) Если $t_0 - 3 \geq i \geq 1$, то

(b1)
$$\left\{ \begin{aligned} |k_{i+1}| &\leq \frac{2}{3} \frac{k_{i+1} + l_{i+2}}{l_{i+1}} |k_i|, \quad |k_{i+1}| \leq \frac{2}{|k_i|} \text{ для } i = t_0 - 2, \\ |k_i| &= (-1)^i \xi_i, \text{ для } i = t_0 - 2 \text{ и } i = t_0 - 1. \end{aligned} \right.$$

(b2)
$$|k_i| \leq C \left(\frac{3}{2} \right)^i \frac{l_2}{l_1^{1/2}} \sum_{j=2}^{i+1} l_j^{1/2} \text{ для } i = t_0 - 2 \text{ и } i = t_0 - 1.$$

(b3)
$$\left\{ \begin{aligned} |k_{i+1}| \left(\frac{3}{2} l_{i+2} + 2l_{i+1} \right) &\leq |k_i| l_{i+1} \leq 2 |k_{i+1}| (l_{i+2} + l_{i+1}), \\ |k_{i+2}| (l_{i+2} + 2l_{i+1}) &\leq |k_{i+1}| (l_{i+1} + 2l_{i+2}) \leq |k_{i+1}| (3l_{i+2} + 2l_{i+1}). \end{aligned} \right.$$

(b4)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} |f(t)|^p dt &\leq e^p \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} |f(t)|^p dt, \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max_{t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}} |f(t)| &\leq e \max_{t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}} |f(t)|. \end{aligned} \right.$$

А для $i \geq 1 - s \geq 1$ имеем

(b5)
$$\left\{ \begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} |f(t)|^p dt &\leq \frac{1 - e^p}{e^p} \int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} |f(t)|^p dt, \\ \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^p dt &\leq \frac{1 - e^p}{e^p} \|f\|_p^p, \quad 1 \leq p < \infty. \end{aligned} \right.$$

(b6)
$$\left\{ \begin{aligned} \max_{t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}} |f(t)| &\leq e^p \max_{t_{i+1} \leq t \leq t_{i+2}} |f(t)|, \\ \max_{t_0 \leq t \leq t_1} |f(t)| &\leq e^p \|f\|_\infty. \end{aligned} \right.$$

Покажем, что $f \in S(\pi)$ следует, что

$$l_i \xi_{i-1} + 2(l_i + l_{i+1}) \xi_i + l_{i+1} \xi_{i+1} = 0 \text{ для } 2 \leq i \leq n-2,$$
$$\frac{l_1^2}{l_0 + l_1} \left(2(l_{-1} + l_0) + \xi_0(l_0 + 2l_1) + \xi_1 \frac{l_0 + l_1}{l_1} \right) + \xi_1 \frac{l_0 + l_1}{l_1} = 0,$$
$$\xi_{-1} \frac{l_0^2}{l_0 + l_1} + \xi_0(2l_0 + l_1) + \xi_1 \left(2(l_1 + l_2) + \frac{l_0 l_1}{l_0 + l_1} \right) + \xi_2 l_2 = 0.$$

Из этих равенств и из (4.6) вытекают (a3) и (b3). Неравенства (a1) и (b1) следуют из (a2), (b2) и (4.6). Неравенства (a2) и (b2) следуют из (a1), (b1), (4.1) при

многократном применении следующего элементарного неравенства:

$$\frac{a}{(a+b)(a+c)} < \frac{1}{a+b+c}, \quad a, b, c > 0.$$

Теперь докажем неравенство (a4) (неравенство (b4) проверяется аналогичным образом).

Если $m_{i,p} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f(t)|^p dt$, то $m_{i,p} = \frac{l_i}{p+1} \frac{|\xi_{i-1}|^{p+1} + |\xi_i|^{p+1}}{|\xi_{i-1}| + |\xi_i|}$, так как $\xi_i \xi_{i-1} < 0$. Кроме того, для $p \geq 1$ имеем

$$|\xi_i|^p \geq \frac{|\xi_{i-1}|^{p+1} + |\xi_i|^{p+1}}{|\xi_{i-1}| + |\xi_i|} \geq \left(\frac{|\xi_{i-1}|^2 + |\xi_i|^2}{|\xi_{i-1}| + |\xi_i|} \right)^p \geq 2^p (\sqrt{2} - 1)^p |\xi_i|^p. \quad (4.7)$$

Следовательно,

$$\frac{m_{i+1,p}}{m_{i,p}} \geq 2^p (\sqrt{2} - 1)^p \frac{l_{i+1}}{l_i} \frac{|\xi_{i+1}|^p}{|\xi_i|^p}.$$

Комбинируя эти неравенства с (a3), получим

$$\frac{m_{i+1,p}}{m_{i,p}} \geq 2^p (\sqrt{2} - 1)^p \frac{l_{i+1}}{l_i} \left(2 + \frac{3}{2} \frac{l_i}{l_{i+1}} \right)^p \geq \frac{3}{4} 4^p (\sqrt{2} - 1)^p \geq e^{-p}.$$

Чтобы доказать (a5), покажем, что

$$\int_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}} |f(t)|^p dt \leq 4 \int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt.$$

Так как f линейная функция на интервале $[t_{i_0}, t_{i_0+1}]$, то $|f(t)| \leq |\xi_{i_0+1}|$ для $t \in [t_{i_0}, t_{i_0+1}]$. Отсюда имеем

$$\int_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}} |f(t)|^p dt \leq l_{i_0+1} |\xi_{i_0+1}|^p.$$

Из $\xi_{i_0+1} \xi_{i_0+2} < 0$ следует, что

$$\int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt = \frac{l_{i_0+2}}{p+1} \frac{|\xi_{i_0+1}|^{p+1} + |\xi_{i_0+2}|^{p+1}}{|\xi_{i_0+1}| + |\xi_{i_0+2}|}.$$

Из (4.7) получаем

$$\int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt \geq \frac{l_{i_0+2}}{p+1} 2^p (\sqrt{2} - 1)^p |\xi_{i_0+2}|^p.$$

Из (a3) для $i = i_0 + 2$ имеем

$$|\xi_{i_0+1}|(l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}) \leq |\xi_{i_0+2}|l_{i_0+2} \leq |\xi_{i_0+1}|(3l_{i_0+1} + 2l_{i_0+2}).$$

Следовательно,

$$\frac{\int_{t_{i_0+1}}^{t_{i_0+2}} |f(t)|^p dt}{\int_{t_{i_0}}^{t_{i_0+1}} |f(t)|^p dt} \geq \frac{l_{i_0+2}}{l_{i_0+1}} \frac{2^p (\sqrt{2} - 1)^p}{p+1} \left(2 + \frac{l_{i_0+1}}{l_{i_0+2}}\right)^p \geq \frac{4^p (\sqrt{2} - 1)^p}{2(p+1)} \geq \frac{1}{4}.$$

Заметим, что (a5) есть следствие последнего неравенства и (a4).

Неравенство (b5) проверяется тем же способом, а неравенства (a6) и (b6) вытекают из (a4) и (b4) соответственно. Доказательство завершено.

Прежде чем сформулировать Свойство 4, мы нуждаемся в некоторых обозначениях. Пусть $x \in [0, 1]$, $x \notin J$ и $x \neq t_{i_0}$. Тогда отрезок $[0, 1]$ точкой x и интервалом J разбивается на два обобщенных интервала. Точка t_{i_0} не принадлежит одному из этих интервалов. Длину этого интервала обозначим через $\text{dist}(x, J)$, а количество точек из разбиения π принадлежащих этому интервалу через $d_\pi(x)$. Если $x \in J$, то полагаем $d_\pi(x) = 0$.

Если $J = [\alpha, \beta]$, то через J^- и J^+ будем обозначать обобщенные интервалы $[t_{i_0}, \alpha]$ и $[\beta, t_{i_0}]$ соответственно. Для $x \in J^-$ обозначим через $\int_{t_{i_0}}^x f(t) dt$ интеграл по интервалу $[t_{i_0}, x] \subset J^-$ в положительном направлении. Аналогично определяется интеграл $\int_x^{t_{i_0}} f(t) dt$ для $x \in J^+$.

Для обобщенного интервала $V \subset [0, 1]$ с концами α и β (т.е. $V = [\alpha, \beta]$ или $V = [\alpha, 1] \cup [0, \beta]$), будем считать, что $d_\pi(V) = \min(d_\pi(\alpha), d_\pi(\beta))$, если $V \cap J = \emptyset$ и $d_\pi(V) = 0$, если $V \cap J \neq \emptyset$.

Свойство 4. Пусть $\pi = \bar{\pi} \cup \{t_0\}$ — разбиение с вышеупомянутыми свойствами, и $f = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i N_i$ — общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений $(\bar{\pi}, \pi)$. Тогда существует постоянная $C > 0$ не зависящая от $\bar{\pi}$ и π такая, что

$$|\xi_i| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_\pi(t_i)} \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \text{dist}(t_i, J) + |[t_{i-1}, t_{i+1}]|} \quad i \neq i_0, \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (4.8)$$

Более того, для каждого $p \in [1, +\infty)$ существует постоянная $C_p > 0$ такая, что при $x \in J^-$ имеем

$$\int_{t_{i_0}}^x |f(t)|^p dt \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{d_\pi(x)} \frac{|J|^{p/2}}{(|J| + \text{dist}(x, J))^{p-1}} \quad (4.9)$$

а при $x \in J^+$ имеем

$$\int_x^{t_{i_0}} |f(t)|^p dt \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{d_\pi(x)} \frac{|J|^{p/2}}{(|J| + \text{dist}(x, J))^{p-1}}.$$

Кроме того

$$\|f\|_{L^p(J)} \sim \|f\|_p \sim |J|^{1/p-1/2}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad (4.10)$$

где постоянные эквивалентности не зависят от p , π и $\bar{\pi}$.

Замечание. Из линейности функции f на каждом из отрезков (t_k, t_{k+1}) и (4.8) следует, что

$$|f(x)| \leq C \left(\frac{2}{3}\right)^{d_+(x)} \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \text{dist}(x, J)}. \quad (4.11)$$

Доказательство этого замечания и Свойства 4 совпадают с доказательством соответствующего Свойства из [11].

Свойство 5. Пусть $\tilde{f}$ — общая периодическая функция Франклина, соответствующая паре разбиений $(\bar{\pi}, \pi)$ и $\chi_{J,2} = \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \text{dist}(t, J)}$. Тогда существует постоянная $C > 0$ не зависящая от $\bar{\pi}$ и π такая, что

$$|f(t)| \leq C \tilde{M} \chi_{J,2}(t) \quad \text{и} \quad |\chi_{J,2}(t)| \leq C \tilde{M} f(t).$$

Доказательство : При $p = 1$, неравенство справа следует из (4.10) :

$$\tilde{M} f(t) \geq \frac{1}{|J|} \int_J |f(t)| dt \geq C |J|^{-1/2} = C \chi_{J,2}(t), \quad \text{для } t \in J.$$

Учитывая, что $\tilde{M} \chi_{J,2}(t) \geq \frac{|J|^{1/2}}{|J| + \text{dist}(t, J)}$, из (4.11) получим первое неравенство.

4.2. Свойства общей периодической системы Франклина. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \geq 0\}$ — допустимая последовательность точек и пусть $\{f_n, n \geq 1\}$ — соответствующая общей периодической системе Франклина. Через $I_n, I_n^-, I_n^+, J_n, \nu_n$ и d_n обозначим интервалы и величины ранее определенные для общей периодической функции Франклина, которые соответствуют функции f_n и разбиению π_n . Предположим также, что точки $t_n^{--}, t_n^-, t_n^+, t_n^{++}, t_n$ соответствуют t_n и π_{n-1} в точности также, как точки $t^{--}, t^-, t^+, t^{++}, t_0$ соответствовали t_0 и $\bar{\pi}$ в параграфе 4.1.

Лемма 2. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \geq 0\}$ — допустимая последовательность точек и $\{f_n, n \geq 1\}$ — соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Если $t_k \leq t_l, k, l \geq 0$ и не существует такого номера $i \leq \max(k, l)$, со свойством $t_i \in (t_k, t_l)$, то для всех таких k и l имеем

$$\#\{n; J_n \subset [t_k, t_l]\} \leq 3.$$

Лемма 3. Пусть $\mathcal{T} = \{t_n, n \geq 0\}$ — допустимая последовательность и пусть $\{f_n, n \geq 1\}$ — соответствующая ей периодическая система Франклина. Далее, если $t_k \leq t_l, k, l \geq 0$ и не существует такого номера $i \leq \max(k, l)$ со свойством $t_i \in (t_k, t_l)$, то для всех таких k и l имеем

$$\#\left\{n : J_n \subset [t_k, t_l], |J_n| \geq \frac{|[t_k, t_l]|}{2}\right\} \leq 15.$$

Доказательства этих лемм совпадают с доказательствами лемм 3.4 и 3.5 из [11], с той разницей, что здесь мы не рассматриваем разбиения с двойными точками, и поэтому вместо констант 5 и 25 из [11] здесь выступают константы 3 и 15, соответственно.

Следующее свойство является простым следствием Леммы 3.

Свойство 6. Пусть $T = \{t_n, n \geq 0\}$ – допустимая последовательность и пусть $\{f_n, n \geq 1\}$ – соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Если $\{n_s : s \geq 1\}$ есть последовательность натуральных чисел такая, что $J_{n_s} \supset J_{n_{s+1}}$, то для любого числа $\gamma > 0$ имеем

$$\sum_{s \geq 1} |J_{n_s}|^\gamma \sim |J_{n_1}|^\gamma \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^m |J_{n_s}|^{-\gamma} \sim |J_{n_m}|^{-\gamma}$$

с постоянными эквивалентности, зависящими от γ , но не зависящими от T и последовательности $\{n_s : s \geq 1\}$.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $T = \{t_n, n \geq 0\}$ – допустимая последовательность точек и $\{f_n; n \geq 1\}$ соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Для любой функции $f \in L_p[0, 1]$, $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ обозначим

$$Pf(t) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 f_n^2(t) \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad S^* f(t) = \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{i=1}^n a_i f_i(t) \right|.$$

5.1. Технические Оценки. Ниже нам понадобится следующее известное свойство полиномов.

Свойство 7. Пусть $k \in N$ и $0 < \rho < 1$ суть фиксированные числа. Тогда для любого интервала $[a, b]$, множества $A \subset [a, b]$, удовлетворяющего условию $|A| \geq \rho|[a, b]|$ и любого полинома Q степени k , существует такая константа $C = C_{k, \rho}$, зависящая только от k и ρ , что

$$\max_{t \in [a, b]} |Q(t)| \leq C_{k, \rho} \sup_{t \in A} |Q(t)| \quad \text{и} \quad \int_a^b |Q(t)| dt \leq C_{k, \rho} \int_A |Q(t)| dt.$$

Для $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ и $l > 0$ положим $E_l = \{t \in (0, 1), Pf(t) > l\}$, и $V = (\alpha, \beta)$, где $M\chi_{E_l}(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ и $M\chi_{E_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$. Пусть $\Gamma = \{n \in N, J_n \subset V\}$ и $\Lambda = N \setminus \Gamma$.

Лемма 4.

$$\int_{V^c} \sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)| dt \leq C \int_V \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} dt, \quad (5.1)$$

$$\left(\sum_{n \in \Lambda} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} \leq Cl, \quad t \in V, \quad (5.2)$$

где C — абсолютная постоянная.

Доказательство : Начнем с доказательства неравенства (5.1). Оценим интеграл $\int_{V^c \cap J_n^+} |a_n f_n(t)| dt$, а интеграл $\int_{V^c \cap J_n^-} |a_n f_n(t)| dt$ оценивается аналогично. Заметим, что из (b5), Свойства 3, (4.10) и Свойства 4 следует

$$\int_{V^c \cap J_n^+} |a_n f_n(t)| dt \leq C \varepsilon^{d_n(\beta)} \int_{J_n} |a_n f_n(t)| dt$$

для любого $n \in \Gamma$ для которого $V^c \cap J_n^+ \neq \emptyset$. Обозначим через J_n^l левую половину интервала J_n . Так как функция f_n линейна на J_n , $J_n^l \subset J_n$ и $|J_n^l| = \frac{|J_n|}{2}$, то из Свойства 7 имеем $\int_{J_n} |f_n(t)| dt \leq C \int_{J_n^l} |f_n(t)| dt$. Отсюда следует, что

$$\int_{V^c \cap J_n^+} |a_n f_n(t)| dt \leq C \varepsilon^{d_n(\beta)} \int_{J_n^l} |a_n f_n(t)| dt \leq C \varepsilon^{d_n(\beta)} \int_{J_n^l} \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} dt.$$

Положим

$$\Gamma_s = \{n \in \Gamma : d_n(\beta) = s \text{ и } V^c \cap J_n^+ \neq \emptyset\}.$$

Тогда

$$\int_{V^c \cap J_n^+} \sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)| dt = \int_{V^c \cap J_n^+} \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_s} |a_n f_n(t)| dt$$

так как $\Gamma_0 = \emptyset$. Действительно, если $d_n(\beta) = 0$, то $\beta \in J_n$, и из определения множества Γ следует, что $J_n \subset V$, что невозможно.

Если $n \in \Gamma_s$, $s \geq 1$, тогда $\#\{\pi_n \cap (V \cap J_n^+)\} = s$. Отсюда следует, что для любого фиксированного s , интервалы J_n (где $n \in \Gamma_s$) могут быть сгруппированы в пачки с интервалами имеющими общий правый конец и с отдельными максимальными интервалами из различных пачек. Следовательно, из Леммы 3 вытекает, что каждая точка $t \neq t_i$ принадлежит не больше, чем 15 интервалам J_n^l для $n \in \Gamma_s$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \Gamma_s} \int_{V^c \cap J_n^+} |a_n f_n(t)| dt &\leq C \varepsilon^s \sum_{n \in \Gamma_s} \int_{J_n^l} \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} dt \leq \\ &\leq C \varepsilon^s \int_V \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} dt. \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по $s \geq 1$ получим

$$\sum_{n \in \Gamma} \int_{V^c \cap J_n^+} |a_n f_n(t)| dt \leq C \int_V \left(\sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} dt.$$

Интеграл $\int_{V \cap J_n^-} \sum_{n \in \Gamma} |a_n f_n(t)| dt$ оценивается аналогичным образом. Это завершает доказательство неравенства (5.1).

Перейдем к доказательству неравенства (5.2). Введем следующие обозначения

$$\Lambda' = \{n \in \Lambda, \# \{\pi_n \cap V\} \leq 1\} \quad \text{и} \quad \Lambda'' = \Lambda \setminus \Lambda'.$$

Заметим, что существует такая константа $C > 0$, что

$$\left(\sum_{n \in \Lambda'} |a_n f_n(t)|^2 \right)^{1/2} \leq Cl \quad \text{для всех} \quad t \in V. \quad (5.3)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что если γ есть первая точка последовательности $\mathcal{T}$ в интервале V , то сумма $\sum_{n \in \Lambda'} |a_n f_n(t)|^2$ является полиномом второй степени на обоих интервалах (α, γ) и (γ, β) . Кроме того, $|E_1^c \cap [\alpha, \gamma]| \geq \frac{3}{4} |[\alpha, \gamma]|$ и $|E_1^c \cap [\gamma, \beta]| \geq \frac{3}{4} |[\gamma, \beta]|$, так как $M\chi_{E_1}(\alpha) \leq \frac{1}{4}$ и $M\chi_{E_1}(\beta) \leq \frac{1}{4}$. Следовательно, на обоих интервалах (α, γ) и (γ, β) неравенство (5.3) вытекает из Свойства 7, так как $Pf(t) \leq 1$ на E_1^c .

Для каждого $n \in \Lambda''$ введем следующие обозначения

$$\gamma_n = \begin{cases} t_{i_n} & \text{если } t_{i_n} \in V, \\ \alpha & \text{если } t_{i_n} \notin V \text{ и } \alpha \in J_n^-, \\ \beta & \text{если } t_{i_n} \notin V \text{ и } \beta \in J_n^+, \end{cases}$$

и $h_n = f_n \chi_{(\alpha, \gamma_n)}$, $g_n = f_n \chi_{(\gamma_n, \beta)}$. Ясно, что

$$\begin{aligned} f_n^2(t) &\leq h_n^2(t) + g_n^2(t) \quad \text{для } t \in V \text{ и } n \in \Lambda'', \\ f_n^2(t) &\geq \max(h_n^2(t), g_n^2(t)). \end{aligned}$$

Для доказательства существования $C > 0$ такой, что $\sum_{n \in \Lambda''} |a_n g_n(t)|^2 \leq Cl^2$, по индукции определим последовательность точек β_n , и ассоциируем с ней разбиение множества Λ'' . Положим, $n_1 = \min \Lambda''$ и пусть $\beta_1 \in \pi_{n_1}$, такое, что $\beta_1 < \beta$ и $(\beta_1, \beta) \cap \pi_{n_1} = \emptyset$ (заметим, что $\alpha < \beta_1$). Обозначим

$$\Lambda_1'' = \{n \in \Lambda'', (\beta_1, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}.$$

Далее, положим $n_2 = \min \Lambda'' \setminus \Lambda_1''$. Заметим, что $\# \{(\beta_1, \beta) \cap \pi_{n_2}\} \geq 1$. Поэтому, мы можем выбрать $\beta_2 \in \pi_{n_2}$, такое, что $\beta_1 < \beta_2 < \beta$ и $(\beta_2, \beta) \cap \pi_{n_2} = \emptyset$. Положим

$$\Lambda_2'' = \{n \in \Lambda'' \setminus \Lambda_1'', (\beta_2, \beta) \cap \pi_n = \emptyset\}.$$

Заметим, что $\beta_k \in \pi_n$ при $n \geq n_k$. Определив точки $\beta_1, \dots, \beta_k$ и множества $\Lambda_1'', \dots, \Lambda_k''$, возьмем $n_{k+1} = \min \Lambda'' \setminus \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i''$, и заметим, что $\# \{(\beta_k, \beta) \cap \pi_{n_{k+1}}\} > 1$.

Теперь определим $\beta_{k+1} \in \pi_{n_{k+1}}$ так, чтобы $\beta_k < \beta_{k+1} < \beta$ и $(\beta_{k+1}, \beta) \cap \pi_{n_{k+1}} = \emptyset$. Положим

$$\Lambda_{k+1}'' = \left\{ n \in \Lambda'' \setminus \bigcup_{i=1}^k \Lambda_i'', (\beta_{k+1}, \beta) \cap \pi_n = \emptyset \right\}.$$

Ясно, что $\beta_k \in \pi_n$ для любого $n \geq n_k$, и $n \geq n_k$, если $n \in \Lambda_l''$, где $l \geq k$. Применяя Свойство 7, получим

$$\sum_{n \in \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i''} |a_n f_n(t)|^2 \leq Cl^2 \quad \text{для } t \in [\beta_m, \beta).$$

Так как $\mathbb{M}\chi_{B_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$ и для каждого m и $n \in \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i''$ функции f_n и g_n линейны на (β_m, β) . Кроме того, так как $g_n^2(t) \leq f_n^2(t)$, то

$$\sum_{n \in \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i''} |a_n g_n(t)|^2 \leq Cl^2, \quad t \in [\beta_m, \beta). \quad (5.4)$$

Теперь рассмотрим сумму $\sum_{n \in \Lambda_m''} |a_n g_n(t)|^2$ на отрезке $[\beta_{k-1}, \beta_k)$, где $k \leq m$. Для этого рассмотрим следующие случаи.

Случай 1 : $\beta_m = t_n$. Этот случай может встретиться самое большее один раз. Напомним, что $(\beta_m, \beta) \cap \pi_n = \emptyset$ и $J_n \not\subset V$ для $n \in \Lambda_m''$. Итак, мы имеем следующие два подслучая :

1a : $\beta_m = t_n$ является левым концом интервала J_n . Тогда $\beta \in J_n$ и $\mathbb{M}\chi_{B_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$. Поэтому из Свойства 7 вытекает существование абсолютной постоянной $C > 0$ такой, что

$$|a_n f_n(t)| \leq Cl, \quad t \in J_n.$$

1b : $\beta_m = t_n$ и t_n^+ является правым концом интервала J_n . В этом случае $\beta_m \leq t_n^+$. Кроме того, $I_n^+ = [t_n, t_n^+] \cup J_n$ и $|J_n| \geq |[t_n, t_n^+]|$, т.е. $|J_n| \leq |I_n^+| \leq 2|J_n|$ по определению интервалов I^+ и J . Следовательно, используя неравенство $\mathbb{M}\chi_{B_l}(\beta) \leq \frac{1}{4}$ и Свойство 7 получим

$$|a_n f_n(t)| \leq Cl, \quad t \in J_n.$$

Объединяя случаи (1a) и (1b) с (аб) Свойства 3 и (4.10) Свойства 4, мы получим

$$|a_n g_n(t)| \leq C\epsilon^{m-k}l, \quad t \leq \beta_k. \quad (5.5)$$

Случай 2 : $\beta_m = t_n^+$. Так как $n \in \Lambda_m''$, то точка t_n^+ является левым концом интервала J_n . Из Свойства 4 и определения функции g_n следует, что

$$|g_n(t)| \leq C\epsilon^{m-k}|g_n(\beta_m)|, \quad t \leq \beta_k.$$

Следовательно, для $t \leq \beta_k$ получаем

$$\left(\sum_{\substack{n \in \Lambda_m'' \\ n \in C_{\beta_k} \cap \Lambda_m''}} |a_n g_n(t)|^2 \right)^{1/2} \leq C \varepsilon^{m-k} \left(\sum_{\substack{n \in \Lambda_m'' \\ n \in C_{\beta_k} \cap \Lambda_m''}} |a_n g_n(\beta_m)|^2 \right)^{1/2} \leq C \varepsilon^{m-k} l. \quad (5.6)$$

Случай 3: $\beta_m \neq t_n$ и $\beta_m \neq t_n^+$. Так как $n \in \Lambda_m''$, то из Свойства 4 и определения g_n , для $t \leq \beta_k$ получим

$$\left(\sum_{\substack{n \in \Lambda_m'' \\ n \in C_{\beta_k} \cap \Lambda_m''}} |a_n g_n(t)|^2 \right)^{1/2} \leq C \varepsilon^{m-k} \left(\sum_{\substack{n \in \Lambda_m'' \\ n \in C_{\beta_k} \cap \Lambda_m''}} |a_n g_n(\beta_m)|^2 \right)^{1/2} \leq C \varepsilon^{m-k} l. \quad (5.7)$$

Из неравенств (5.5), (5.6) и (5.7) вытекает

$$\left(\sum_{n \in \Lambda_m''} |a_n g_n(t)|^2 \right)^{1/2} \leq C \varepsilon^{m-k} l, \quad t \leq \beta_k. \quad (5.8)$$

Пусть теперь $t \in [\beta_m, \beta_{m+1})$. Используя неравенства (5.4) и (5.8), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \Lambda''} |a_n g_n(t)|^2 &\leq \sum_{n \in \bigcup_{i=1}^m \Lambda_i''} |a_n g_n(t)|^2 + \sum_{k \geq m+1} \sum_{n \in \Lambda_k''} |a_n g_n(t)|^2 \leq \\ &\leq Cl^2 + \sum_{k \geq m+1} C \varepsilon^{2(k-m-1)} l^2 \leq Cl^2. \end{aligned}$$

Из (5.8) получаем аналогичное неравенство для $t \in (\alpha, \beta_1)$. Для $t \in [\beta_{\max}, \beta)$, где $\beta_{\max} = \sup_{k \geq 1} \beta_k$ достаточно применить неравенство (5.4).

Сумма $\sum_{n \in \Lambda''} |a_n h_n(t)|^2$ оценивается аналогично. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть $V = (\alpha, \beta) \subset (0, 1)$ и $f \in L^p[0, 1]$ ($1 < p < 2$) такие, что $\text{supp } f \subset V$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$. Тогда существует постоянная M_p , зависящая только от p такая, что

$$\sum_{n=n(V)}^{\infty} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_{L^p(\bar{V})}^p \leq M_p \|f\|_p^p,$$

где $\vartheta = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{3}}$, $n(V) = \min\{n : \pi_n \cap V \neq \emptyset\}$ и $\bar{V} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ — обобщенный интервал с концами

$$\bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha - 2|V| & \text{если } \alpha - 2|V| \geq 0, \\ \alpha - 2|V| + 1 & \text{если } \alpha - 2|V| < 0, \end{cases} \quad \bar{\beta} = \begin{cases} \beta + 2|V| & \text{если } \beta + 2|V| \leq 1, \\ \beta + 2|V| - 1 & \text{если } \beta + 2|V| > 1, \end{cases}$$

и $\bar{V} = [0, 1]$, если $|V| > \frac{1}{2}$.

Доказательство : Обозначим через $1/q = 1 - 1/p$ и заметим, что $0 < \theta < 1$. Из очевидного неравенства

$$\int_{\tilde{V}_+} |f_n(t)|^p dt \leq \int_{\tilde{V}_+ \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt + \int_{\tilde{V}_+ \cap (J_n^+ \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt$$

следует, что нужно оценить суммы

$$\sum_{n=n(V)}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V}_+ \cap (J_n^- \cup J_n))}^p,$$

$$\sum_{n=n(V)}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V}_+ \cap (J_n^+ \cup J_n))}^p.$$

Поскольку обе суммы оцениваются аналогично, мы приведем оценки только для первой суммы. Для этого рассмотрим следующие случаи :

Случай 1 : $J_n \subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 2 : $\tilde{\alpha} \in J_n$, $|J_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha]| \geq |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 3 : $J_n \subset [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}]$ или $\tilde{\alpha} \in J_n$, $|J_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha]| \leq |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$ или $\tilde{\beta} \in J_n$, $|J_n \cap [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}]| \leq |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}]$.

Случай 4 : $\alpha \in J_n$, $|J_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha]| \geq |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 5 : $J_n \subset [\alpha, \tilde{\beta}]$ или $\alpha \in J_n$, $|J_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha]| \leq |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$.

Случай 6 : $\tilde{\beta} \in J_n$, $|J_n \cap [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}]| > |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}]$.

Обозначим через $\tilde{V}_- = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ и $\tilde{V}_+ = [\alpha, \tilde{\beta}]$.

Случай 1 : Для тех n , которые удовлетворяют условиям $J_n \subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$ введем следующие обозначения :

$$T_-^1 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \geq \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T_{-,m}^1 = \{ n \in T_-^1 : \# \{ \pi_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha] \} = m \},$$

$$S_-^1 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt < \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$S_{-,m}^1 = \{ n \in S_-^1 : \# \{ \pi_n \cap \tilde{V}_-^c \} = m \}.$$

Рассмотрим тот случай, когда $n \in T_{-,m}^1$. Для ясности введем обозначения $(x_1, x_2, \dots, x_m) = \{ \pi_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha] \}$ так, что $[x_1, x_2] \subset [x_1, x_3] \subset \dots \subset [x_1, x_m]$ и $m \geq 2$.

Также заметим, что

$$\# T_{-,m}^1 \leq 7. \quad (5.9)$$

В самом деле, только $[x_1, x_2]$ и $[x_{m-1}, x_m]$ могут быть интервалами J_n для некоторого $t_n \neq x_1, x_2, \dots, x_m$, и только один из интервалов $[x_{i-1}, x_i]$ ($3 \leq i \leq m-1$) может быть интервалом J_n , где $t_n = x_i$, который был добавлен последним. Следовательно, неравенство (5.9) следует из Леммы 2. Кроме того, из (a5) и (b5) Свойства 3 для $n \in T_{-,m}^1$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\bar{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt &\leq C_p \varepsilon^{p d_n(\bar{\alpha})} \|f_n\|_p^p, \\ \int_V |f_n(t)|^q dt &\leq 2 \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq C_p \varepsilon^{q d_n(\alpha)} \|f_n\|_q^q. \end{aligned}$$

Добавим, что если $\bar{V} \cap (J_n^- \cup J_n) \neq \emptyset$, то $d_n(\alpha) + d_n(\bar{\alpha}) = m$ и $d_n(V) \leq d_n(\alpha) \leq m$. Следовательно,

$$\sum_{n \in T_{-,m}^1} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{p d_n(V)} |a_n|^p \int_{\bar{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \vartheta^{mp} \|f\|_p^p \quad (5.10)$$

и из (5.9) получаем очевидную оценку

$$|a_n|^p \leq \int_V |f(t)|^p dt \left(\int_V |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q}. \quad (5.11)$$

Теперь рассмотрим случай $n \in S_{-,m}^1$. Заметим, что $t_n \in \bar{V}_-$. Из определения интервала S_-^1 следует, что для каждого m и $n \in S_{-,m}^1$ имеем

$$\left(\int_V |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q} \leq C_p \left(\int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q}. \quad (5.12)$$

Пусть Δ является таким интервалом линейности функции f_n (с концами из π_n), что $\Delta \cap (V \cap J_n^-) \neq \emptyset$. Тогда из определения интервала Δ и Свойства 4 получим, что

$$\max_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C \varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|} \leq C \varepsilon^{d_n(\beta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n)}.$$

Следовательно,

$$\max_{t \in V \cap J_n^-} |f_n(t)| = \max_{\Delta: \Delta \cap V \cap J_n^- \neq \emptyset} \max_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C \varepsilon^{d_n(\beta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n)}.$$

Отсюда и из неравенства (5.12) следует, что

$$\left(\int_V |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q} \leq C_p |V|^{p-1} \varepsilon^{p d_n(\beta)} \frac{|J_n|^{p/2}}{(|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n))^p}.$$

Учитывая, что $d_n(V) \leq d_n(\beta) = m + d_n(\tilde{\alpha}) - \xi$, где $\xi = \#\{\pi_n \cap \{\tilde{\alpha}\}\}$, и комбинируя вышеупомянутые соотношения, получаем

$$\sum_{n \in S_{-,m}^1} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |\alpha_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \sum_{n \in S_{-,m}^1} \vartheta^{p(m+d_n(\tilde{\alpha}))} \frac{|J_n| |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n))^p} \|f\|_p^p. \quad (5.13)$$

Пусть $k = d_n(\tilde{\alpha})$ и m и k фиксированы. Тогда интервалы J_n могут быть сгруппированы в пачки, так чтобы интервалы из одной пачки имели общий левый конец и максимальные интервалы из разных пачек не пересекались бы. Из Леммы 14 вытекает, что каждая точка $t \neq t_i$ может принадлежать не более чем 15-ти интервалам J_n^r .

Ясно, что $|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n) > \|\beta, t\|$ для $t \in J_n^r$. Следовательно,

$$\sum_{\substack{d_n(\tilde{\alpha})=k \\ n \in S_{-,m}^1}} \frac{|J_n| |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n))^p} \leq C \sum_{\substack{d_n(\tilde{\alpha})=k \\ n \in S_{-,m}^1}} \int_{J_n^r} \frac{|V|^{p-1}}{\|\beta, t\|^p} dt \leq C_p \int_{\tilde{\alpha}}^{\alpha} \frac{|V|^{p-1}}{\|\beta, t\|^p} dt \leq C_p.$$

Из последнего и из неравенства (5.13) вытекает

$$\sum_{n \in S_{-,m}^1} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |\alpha_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \vartheta^{mp} \|f\|_p^p. \quad (5.14)$$

Случай 2 : Для n , удовлетворяющему $\tilde{\alpha} \in J_n, |J_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha]| \geq |V|$ и $J_n \not\subset [\tilde{\alpha}, \alpha]$, обозначим

$$T_-^2 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \geq \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T_{-,m}^2 = \{ n \in T_-^2 : \#\{\pi_n \cap [\tilde{\alpha}, \alpha]\} = m \},$$

$$S_-^2 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt < \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$S_{-,m}^2 = \{ n \in S_-^2 : \#\{\pi_n \cap \tilde{V}^c\} = m \}.$$

Если $n \in T_{-,m}^2$, то $\#T_{-,m}^2 < \infty$ и $d_n(\alpha) = m \geq d_n(V)$. Более того, если $n_0 < n_1 < \dots < n_r$ такие элементы множества $T_{-,m}^2$, что $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset J_{n_2} \dots \supset J_{n_r}$, то эти интервалы имеют тот же правый конец, и из оценок $\|f_n\|_p^p$ и Свойства 3, для $n \in T_{-,m}^2$, получаем

$$\|f_n\|_p \sim |J_n|^{1/p-1/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{qm} |V| |J_n|^{-q/2}.$$

Последнее неравенство вместе с (5.11) дает

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \epsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Из определения $T_{-,m}^2$ следует, что $|J_n| \geq |V|$. Следовательно, из Свойства 6 вытекает, что

$$\sum_{n \in T_{-,m}^2} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_0}|^{1-p} \leq C_p |V|^{1-p}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n \in T_{-,m}^2} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \vartheta^{-p} \|f\|_p^p. \quad (5.15)$$

Теперь рассмотрим случай когда $n \in S_{-,m}^2$. Заметим, что $\#S_{-,m}^2 < \infty$ и $d_n(\beta) = m \geq d_n(V)$. Более того, если $n_0 < n_1 < \dots < n$, суть элементы множества $S_{-,m}^2$, для которых $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset J_{n_2} \dots \supset J_n$, то все эти интервалы имеют общий левый конец, и из оценок $\|f_n\|_p^p$ и Свойства 3 получаем

$$\|f_n\|_p \sim |J_n|^{1/p-1/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \epsilon^{qm} |V| |J_n|^{-q/2}.$$

Последнее неравенство вместе с (5.11) дают

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \epsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Из определения $S_{-,m}^2$ следует, что $|J_n| \geq |V|$. Следовательно, из Свойства 6 вытекает

$$\sum_{n \in S_{-,m}^2} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_0}|^{1-p} \leq C_p |V|^{1-p}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{n \in S_{-,m}^2} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \vartheta^{-p} \|f\|_p^p. \quad (5.16)$$

Случай 3 : Для тех n , которые удовлетворяют условиям Случая 3, введем обозначения

$$T_-^3 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \geq \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T_{-,m}^3 = \{ n \in T_-^3 : \# \{ \pi_n \cap [\bar{\alpha}, \alpha] \} = m \}.$$

$$S_-^3 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt < \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$S_{-,m}^3 = \left\{ n \in S_-^3 : \# \{ \pi_n \cap [\beta, \tilde{\beta}] \} = m \right\}.$$

Если $n \in T_{-,m}^3$, то обозначим

$$\alpha^* = \max \{ \tilde{\alpha} \text{ по правым концам интервалов } J_n, n \in T_{-,m}^3 \}.$$

Из этого определения следует, что $|V| \leq \|[\alpha^*, \alpha]\| \leq 2|V|$ и $\#(\pi_n \cap [\alpha^*, \alpha]) = m$ для всех $n \in T_{-,m}^3$. Поэтому для $n \in T_{-,m}^3$ имеем $d_n(\alpha) = m + d_n(\alpha^*) - \xi^*$, где $\xi^* = \#(\pi_n \cap \alpha^*)$ и $d_n(V) \leq d_n(\alpha)$. Полагая, что $n \in T_{-,m}^3$, сначала оценим $\sup_{t \in V \cap J_n^+} |f_n(t)|$. Для этого допустим, что Δ интервал линейности функции f_n (с концами из π_n) такой, что $\Delta \cap V \cap J_n^+ \neq \emptyset$. Из определения интервала Δ получаем

$$d_n(\Delta) \geq d_n(\alpha) \quad \text{и} \quad \text{dist}(\alpha, J_n) \leq \text{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|.$$

Следовательно, из Свойства 4, для $\varepsilon = (\sqrt{2} + 1)/3 > 2/3$ получаем

$$\sup_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C \varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq C \varepsilon^{m+d_n(\alpha^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\alpha, J_n)}.$$

Следовательно,

$$\sup_{t \in V \cap J_n^+} |f_n(t)| \leq C \varepsilon^{m+d_n(\alpha^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\alpha, J_n)}.$$

Итак, мы имеем

$$\int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{q(m+d_n(\alpha^*))} \frac{|V| |J_n|^{q/2}}{(|J_n| + \text{dist}(\alpha, J_n))^q}.$$

Так как $\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2}$, последнее неравенство вместе с (5.11) дают

$$\left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V)} |\alpha_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \|f\|_p^p \vartheta^{p(m+d_n(\alpha^*))} \frac{|J_n| |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\alpha, J_n))^p}. \quad (5.17)$$

Обозначим через J_n^l левую половину интервала J_n и для фиксированного k рассмотрим все $n \in T_{-,m}^3$, удовлетворяющие условию $d_n(\alpha^*) = k$. Если $k = 0$, то из условий Случая 3 вытекает, что α^* является правым концом интервалов J_n , и эти интервалы формируют вложенное семейство, т.е. все эти интервалы можно перенумеровать так, чтобы $J_{n_1} \supset J_{n_2} \supset \dots \supset J_{n_l}$. Для $k > 0$, рассмотрим два индекса $n_1 < n_2$ таких, что $d_{n_1}(\alpha^*) = k = d_{n_2}(\alpha^*)$. Тогда все точки из

разбиения разбиения π_n , принадлежат π_n . Следовательно, или правый конец J_n совпадает с правым концом J_n , (из этого следует, что $J_n \subset J_n$) или он лежит между правым концом J_n и точкой α^* (в этом случае левый конец J_n также принадлежит тому же интервалу). Из последнего и Леммы 3 следует, что каждая точка $t \neq t_j$ может принадлежать не больше, чем 15-ти интервалам J_n^i , где m и k фиксированы и $d_n(\alpha^*) = k$. Кроме того, для $t \in J_n^i$ имеем

$$|J_n| + \text{dist}(\alpha, J_n) = |J_n^i| + \text{dist}(\alpha, J_n^i) \geq |[t, \alpha]|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in T_{-,m}^3: d_n(\alpha^*)=k} \frac{|J_n| |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\alpha, J_n))^p} &\leq C_p \sum_{n \in T_{-,m}^3: d_n(\alpha^*)=k} \int_{J_n^i} \frac{|V|^{p-1}}{|[t, \alpha]|^p} dt \\ &\leq C_p |V|^{p-1} \int_{-\infty}^{\alpha^*} \frac{1}{(\alpha - t)^p} dt \leq C_p \frac{|V|^{p-1}}{(\alpha - \alpha^*)^{p-1}} \leq C_p. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.17), суммированием по k , получим

$$\sum_{n \in T_{-,m}^3} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \|f\|_p^p \vartheta^{pm}. \quad (5.18)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n \in S_{-,m}^3$. Обозначим

$$\beta^* = \min \{ \tilde{\beta} \text{ по левым концам интервалов } J_n, n \in S_{-,m}^3 \}.$$

Следовательно, $|V| \leq |[\beta, \beta^*]| \leq 2|V|$ и для всех $n \in S_{-,m}^3$ имеем $\#(\pi_n \cap [\beta, \beta^*]) = m$. Итак, для $n \in S_{-,m}^3$ имеем, что $d_n(\beta) = m + d_n(\beta^*) - \xi^*$, где $\xi^* = \#(\pi_n \cap \beta^*)$ и $d_n(V) \leq d_n(\beta)$. Для того, чтобы оценить $\sup_{t \in V \cap J_n^-} |f_n(t)|$ для $n \in S_{-,m}^3$, предположим, что Δ является интервалом линейности функции f_n (с концами из π_n) такой, что $\Delta \cap V \cap J_n^- \neq \emptyset$. Из определения интервала Δ следует, что

$$d_n(\Delta) \geq d_n(\beta) \quad \text{и} \quad \text{dist}(\beta, J_n) \leq \text{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|.$$

Из Свойства 4 следует, что (заметим, что $\varepsilon > 2/3$)

$$\sup_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C \varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(J_n, \Delta) + |\Delta|} \leq C \varepsilon^{m+d_n(\beta^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n)}.$$

Отсюда следует

$$\sup_{t \in V \cap J_n^-} |f_n(t)| dt \leq C \varepsilon^{m+d_n(\beta^*)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n)}.$$

Следовательно,

$$\int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{q(m+d_-(\beta^*))} \frac{|V||J_n|^{q/2}}{(|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n))^q}.$$

Поскольку $\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2}$, из последнего неравенства и из (5.11), получаем

$$\left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_-(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \|f\|_p^p \vartheta^{p(m+d_-(\beta^*))} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n))^p}. \quad (5.19)$$

Для фиксированного k , рассмотрим все $n \in S_{-,m}^3$ со свойством $d_-(\beta^*) = k$. Если $k = 0$, из условий Случая 3 следует, что β^* является левым концом интервалов J_n , и эти интервалы формируют вложенное семейство. Для $k > 0$ рассмотрим два индекса $n_1 < n_2$ таких, чтобы $d_{n_1}(\beta^*) = k = d_{n_2}(\beta^*)$. Тогда все точки разбиения π_{n_1} также принадлежат π_{n_2} . Следовательно, или левый конец отрезка J_{n_2} совпадает с левым концом J_{n_1} (отсюда следует, что $J_{n_2} \subset J_{n_1}$) или он лежит между левым концом интервала J_{n_1} и точкой β^* (в этом случае правый конец интервала J_{n_2} также должен принадлежать тому же интервалу). Из последнего и Леммы 3 следует, что каждая точка $t \neq t_j$ может принадлежать не больше чем 15-ти интервалам из $J_n^r =$ правая половина интервала J_n . Кроме того, для $t \in J_n^r$ имеем

$$|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n) = |J_n^r| + \text{dist}(\beta, J_n^r) \geq |\beta, t|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in S_{-,m}^3: d_-(\beta^*)=k} \frac{|J_n||V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\beta, J_n))^p} &\leq C_p \sum_{n \in S_{-,m}^3: d_-(\beta^*)=k} \int_{J_n^r} \frac{|V|^{p-1}}{|\beta, t|^p} dt \\ &\leq C_p |V|^{p-1} \int_{\beta^*}^{\alpha} \frac{1}{|\beta, t|^p} dt \leq C_p \frac{|V|^{p-1}}{|\beta, \beta^*|^{p-1}} \leq C_p. \end{aligned}$$

Отсюда и из (5.19), суммированием по k , получаем

$$\sum_{n \in S_{-,m}^3} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_-(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \|f\|_p^p \vartheta^{pm}. \quad (5.20)$$

Случай 4 : Обозначим через

$$T_-^4 = \{n \in \text{Случай 4}\}, \quad T_{-,m}^4 = \{n \in T_-^4, \#\{\pi_n \cap [\bar{\alpha}, \alpha]\} = m\}.$$

Отметим, что мы можем пропустить случай $m = 0$ или $m = 1$ для которых $[\bar{\alpha}, \alpha] \cap \pi_n = \{\alpha\}$, так как эти случаи уже рассмотрены для $T_{-,m}^2$ или $S_{-,m}^2$. Таким

образом, $d_n(V) = 0$. Так как по крайней мере одна точка из π_n принадлежит интервалу V и еще одна точка в интервале π_n , причем $(\bar{\alpha}, \alpha)$, то получаем $|J_n \cap [\bar{\alpha}, \alpha]| \geq |V|$. Следовательно, $|V| \leq |J_n| \leq 3|V|$. Интервалы $J_n, n \in T_{-,m}^4$ формируют вложенное семейство, так как $\alpha \in J_n$, и по Лемме 3 имеем $\#T_{-,m}^4 \leq 30$. Более того, в этом случае из (а5) Свойства 3, имеем

$$\int_{\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f_n\|_p^p.$$

Комбинируя эти соотношения с (5.11) и с оценками для $\|f_n\|_p^p$ и $\|f_n\|_q$, получим

$$\sum_{n \in T_{-,m}^4} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \int_{\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.21)$$

Случай 5 : Обозначим

$$T_-^5 = \{n \in \text{Случай 5} \mid, \quad T_{-,m}^5 = \{n \in T_-^5, \# \{\pi_n \cap [\bar{\alpha}, \alpha]\} = m\},$$

и положим

$$\alpha' = \min \{\alpha \text{ по левым концам интервала } J_n, n \in T_{-,m}^5\}.$$

Тогда $|V| \leq |[\bar{\alpha}, \alpha']| \leq 2|V|$ и для всех $n \in T_{-,m}^5$ имеем

$$J_n \subset [\alpha', \beta] \quad \text{и} \quad \#([\bar{\alpha}, \alpha'] \cap \pi_n) = m.$$

Мы можем считать, что $J_n^- \cap \tilde{V}^c \neq \emptyset$, так как

$$\sum_{n \in T_{-,m}^5; J_n^- \cap \tilde{V}^c = \emptyset} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \int_{\tilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt = 0.$$

Если $n \in T_{-,m}^5$, то $d_n(\bar{\alpha}) = m + d_n(\alpha') - \xi'$, где $\xi' = \#(\pi_n \cap \{\alpha'\})$, и $\text{dist}(\bar{\alpha}, J_n) \geq |[\bar{\alpha}, \alpha']|$, откуда следует, что $|J_n| + \text{dist}(\bar{\alpha}, J_n) \sim |V|$. Из неравенства (4.9) и Свойства 4 следует, что

$$\int_{\tilde{V}^c \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \left(\frac{2}{3}\right)^{p(m+d_n(\alpha'))} \frac{|J_n|^{p/2}}{|V|^{p-1}}. \quad (5.22)$$

Для каждого $n \in T_{-,m}^5$, разложим интервал $[\alpha', \beta]$ в сумму трех не пересекающихся интервалов V_n^-, J_n, V_n^+ (где V_n^- и V_n^+ суть левая и правые части интервалов $[\alpha', \beta] \setminus J_n$). Обозначим

$$\begin{aligned} a_{n,1} &= \int_{V_n^-} f(t) f_n(t) dt, & a_{n,2} &= \int_{J_n} f(t) f_n(t) dt, \\ a_{n,3} &= \int_{V_n^+ \cap J_n^+} f(t) f_n(t) dt, & a_{n,4} &= \int_{V_n^+ \cap J_n^-} f(t) f_n(t) dt. \end{aligned}$$

Начнем с оценивания части, которая соответствует $a_{n,2}$. Заметим, что

$$|a_{n,2}|^p \leq \|f_n\|_q^p \int_{J_n} |f(t)|^p dt.$$

Для фиксированного k рассмотрим $n \in T_{-,m}^b$, удовлетворяющие условию $d_n(\alpha') = k$. Напомним, что если $n_1 < n_2$, то все точки разбиения π_{n_1} также принадлежат π_{n_2} . Следовательно, для любого фиксированного k , интервалы J_n с индексами $n \in T_{-,m}^b$, где $d_n(\alpha') = k$, можно сгруппировать в пачки так, чтобы интервалы из одной пачки имели бы общий левый конец, а максимальные интервалы из разных пачек были бы разделены. Заметим, что интервалы из одной пачки формируют вложенное семейство интервалов. Через J_{n_0} обозначим один из максимальных интервалов. Тогда используя (5.22) и Свойство 6, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in T_{-,m}^b, d_n(\alpha')=k, J_n \subset J_{n_0}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,2}|^p \int_{\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq \\ & \leq \sum_{n \in T_{-,m}^b, d_n(\alpha')=k, J_n \subset J_{n_0}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pk} \int_{J_n} |f(t)|^p dt \|f_n\|_q^p \int_{\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq \\ & \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \int_{J_{n_0}} |f(t)|^p dt \sum_{n \in T_{-,m}^b, d_n(\alpha')=k, J_n \subset J_{n_0}} \frac{|J_n|^{p/2} |J_n|^{p/2-1}}{|V|^{p-1}} \leq \\ & \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \int_{J_{n_0}} |f(t)|^p dt \frac{|J_{n_0}|^{p-1}}{|V|^{p-1}} \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \int_{J_{n_0}} |f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Просуммировав по максимальным интервалам, получаем

$$\sum_{n \in T_{-,m}^b, d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,2}|^p \int_{\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p,$$

а просуммировав по k приходим к неравенству

$$\sum_{n \in T_{-,m}^b} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,2}|^p \int_{\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n)} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.23)$$

Теперь приступим к оцениванию части, соответствующей $a_{n,3}$. Для фиксированного k , обозначим через $n_{k,j}, j \geq 1$ подпоследовательность (в возрастающем порядке) всех $n \in T_{-,m}^b$ таких, что $d_n(\alpha') = k$. Заметим, что если $n_1 < n_2$ и $d_{n_1}(\alpha') = k = d_{n_2}(\alpha')$, тогда или левый конец J_{n_2} совпадает с левым концом J_{n_1} , (в этом случае $J_{n_2} \subset J_{n_1}$ и правый конец J_{n_2} также принадлежит J_{n_1} , причем

если он совпадает с правым концом $J_{n,i}$, то в силу Леммы 2 следует, что число таких интервалов не может быть больше, чем 3), или левый конец $J_{n,i}$ находится между α' и левым концом $J_{n,i}$ (в этом случае правый конец $J_{n,i}$ также находится между α' и левым концом $J_{n,i}$).

Допустим, что $\gamma_{n,i}$ — правый конец интервала $J_{n,i}$ (будем считать, что $\gamma_{n,i} = \beta$). Заметим, что $\gamma_{n,i}$ принадлежит разбиению $\pi_{n,i}$ для всех $j \geq i \geq 1$, и $[\alpha', \gamma_{n,i+1}] \subset [\alpha', \gamma_{n,i}]$. Положим $d_{ij}^k = \#\{\pi_{n,i} \cap [\gamma_{n,i+1}, \gamma_{n,i}]\}$. Тогда из определения d_{ij}^k вытекает, что $d_{ij}^k \geq \frac{L-i-3}{3}$. Следовательно, для $j \geq i$ из Свойства 3 имеем

$$\int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} |f_{n,i}(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{q d_{ij}^k} \|f_{n,i}\|_q^q \leq C_q \varepsilon^{q(U-i)/3} \|f_{n,i}\|_q^q.$$

Применяя неравенство Гельдера (где $s = \varepsilon^{1/6}$) получаем

$$\begin{aligned} |a_{n,i,3}|^p &= \left| \int_{[\gamma_{n,i}, \beta] \cap J_{n,i}^+} f(t) f_{n,i}(t) dt \right|^p = \\ &= \left| \sum_{i=1}^j s^{(i-j)} s^{(j-i)} \int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} f(t) f_{n,i}(t) dt \right|^p \leq \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^j s^{q(j-i)} \right)^{p/q} \sum_{i=1}^j s^{p(i-j)} \left| \int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} f(t) f_{n,i}(t) dt \right|^p \leq \\ &\leq C_p \sum_{i=1}^j s^{p(i-j)} \int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} |f(t)|^p dt \left(\int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} |f_{n,i}(t)|^q dt \right)^{p/q} \leq \\ &\leq C_p \sum_{i=1}^j s^{p(i-j)} \int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} |f(t)|^p dt \cdot s^{2p(j-i)} \|f_{n,i}\|_q^p = \\ &= C_p \sum_{i=1}^j s^{p(j-i)} \int_{[\gamma_{n,i}, \gamma_{n,i+1}] \cap J_{n,i}^+} |f(t)|^p dt \|f_{n,i}\|_q^p. \end{aligned}$$

Из (a5) и Свойства 3 следует, что

$$\int_{\tilde{V} \cap (J_{n,i}^- \cup J_{n,i}^+)} |f_{n,i}(t)|^q dt \leq C_p \varepsilon^{p d_{n,i}(\tilde{\alpha})} \|f_{n,i}\|_p^p \leq C_p \varepsilon^{p(m+d_{n,i}(\alpha'))} \|f_{n,i}\|_p^p.$$

Комбинируя эти оценки, для фиксированного k , получаем

$$\sum_{n \in T_{-,\infty}^k |d_n(\alpha') = k} \left(\frac{1}{\theta} \right)^{p d_n(V)} |a_{n,3}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_{n,i}^- \cup J_{n,i}^+))}^p \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j \geq 1} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{jk} |a_{n_{k,j},j}|^p \|f_{n_{k,j}}\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq \\
&\leq C_p \sum_{j \geq 1} \varepsilon^{pm} \vartheta^{jk} \|f_{n_{k,j}}\|_p^p \|f_{n_{k,j}}\|_q^p \sum_{i=1}^j \varepsilon^{p(U-i)} \int_{[\gamma_{n_{k,i}}, \gamma_{n_{k,i-1}}]} |f(t)|^p dt \leq \\
&\leq C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{jk} \sum_{j \geq 1} \int_{[\gamma_{n_{k,j}}, \gamma_{n_{k,j-1}}]} |f(t)|^p dt \sum_{j \geq 1} \varepsilon^{p(U-i)} \leq \\
&\leq C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{jk} \sum_{j \geq 1} \int_{[\gamma_{n_{k,j}}, \gamma_{n_{k,j-1}}]} |f(t)|^p dt \leq C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{jk} \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Просуммировав по $k \geq 0$, получаем

$$\sum_{n \in T_{-m}^k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{jd_n(V)} |a_{n,j}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.24)$$

Перейдем к оцениванию части, соответствующей $a_{n,4}$. Можем считать, что $J_n^- \cap V_n^+ \neq \emptyset$. Чтобы оценить $\sup_{t \in V_n^+ \cap J_n^-} |f_n(t)|$, в качестве Δ возьмем интервал линейности функции f_n (с концами из π_n) такой, что $\Delta \cap V_n^+ \cap J_n^- \neq \emptyset$. Ясно, что

$$\text{dist}(\tilde{\beta}, J_n) < \text{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|.$$

Используя Свойство 4, получим

$$\begin{aligned}
\sup_{t \in \Delta} |f_n(t)| &\leq C \varepsilon^{d_n(\Delta)} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\Delta, J_n) + |\Delta|} \leq \\
&\leq C \varepsilon^{d_n(\tilde{\beta})} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n)} \leq C \varepsilon^{m+d_n(\alpha')} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n)}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{t \in V_n^+ \cap J_n^-} |f_n(t)| = \max_{\Delta \cap V_n^+ \cap J_n^- \neq \emptyset} \sup_{t \in \Delta} |f_n(t)| \leq C \varepsilon^{m+d_n(\alpha')} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n)}$$

и

$$\int_{V_n^+ \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \varepsilon^{q(m+d_n(\alpha'))} \frac{|J_n|^{q/2} |V|}{(|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n))^q}.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\begin{aligned}
|a_{n,4}|^p &= \left| \int_{V_n^+ \cap J_n^-} f(t) f_n(t) dt \right|^p \leq \|f\|_p^p \left(\int_{V_n^+ \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q} \\
&\leq C_p \varepsilon^{p(m+d_n(\alpha'))} \frac{|J_n|^{p/2} |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n))^p} \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Следовательно, для фиксированного k имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,1}|^p \|f_n\|_p^p \leq \\
 & \leq C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{pk} \|f\|_p^p |V|^{p-1} \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \frac{|J_n|^{p/2} |J_n|^{1-p/2}}{(|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n))^p} = \\
 & = C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{pk} \|f\|_p^p \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \frac{|J_n| |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n))^p}. \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Для любых фиксированных m и k рассмотрим все $n \in T_{-,m}^k$ со свойством $d_n(\alpha') = k$. Тогда соответствующие интервалы J_n можно сгруппировать также как и мы уже делали выше. Через J_n^r обозначим правую половину интервала J_n . Ясно, что если $t \in J_n^r$, то $|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n) > ||\tilde{\beta}, t||$. Следовательно, из Леммы 3 вытекает, что любая точка $t \neq t_j$ может принадлежать не более, чем 15-ти таким интервалам. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \frac{|J_n| |V|^{p-1}}{(|J_n| + \text{dist}(\tilde{\beta}, J_n))^p} \leq C_p \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \int_{J_n^r} \frac{|V|^{p-1}}{||\tilde{\beta}, t||^p} dt \leq \\
 & \leq C_p \int_{\alpha'}^{\beta} \frac{|V|^{p-1}}{||\tilde{\beta}, t||^p} dt \leq C_p \frac{|V|^{p-1}}{||\tilde{\beta}, \alpha'||^{p-1}} \leq C_p.
 \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и из (5.25) следует, что

$$\sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,1}|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \varepsilon^{pm} \vartheta^{pk} \|f\|_p^p.$$

Просуммировав по k , получаем

$$\sum_{n \in T_{-,m}^k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,1}|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.26)$$

Осталось оценить часть, которая соответствует $a_{n,1}$. Для фиксированных k и n (с $d_n(\alpha') = k$) обозначим через $L_{0,n}, \dots, L_{l,n}$ те интервалы линейности функции f_n , которые содержатся между точкой α' и интервалом J_n (в положительном направлении). Заметим, что если α' не принадлежит разбиению π_n , то $L_{0,n}$ не является интервалом разбиения π_n . Введем следующие обозначения

$$b_{i,n} = \int_{L_{i,n}} f(t) f_n(t) dt.$$

Ясно, что $a_{n,1} = \sum_{i=0}^k b_{i,n}$ для всех n , для которых $d_n(\alpha') = k$. Из неравенства Гельдера вытекает

$$|b_{i,n}|^p = \left| \int_{L_{i,n}} f(t) f_n(t) dt \right|^p \leq C \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \left(\int_{L_{i,n}} |f_n(t)|^q dt \right)^{p/q}$$

Из Свойства 4 имеем

$$\sup_{t \in L_{i,n}} |f_n(t)| \leq C \left(\frac{2}{3} \right)^{k-i} \frac{|J_n|^{1/2}}{|J_n| + |L_{i,n}| + \text{dist}(J_n, L_{i,n})}.$$

Отсюда следует

$$|b_{i,n}|^p \leq C_p \left(\frac{2}{3} \right)^{p(k-i)} \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \frac{|J_n|^{p/2} |L_{i,n}|^{p-1}}{(|J_n| + |L_{i,n}| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^p}. \quad (5.27)$$

Рассмотрим следующую дробь

$$\begin{aligned} & \frac{|J_n|^{p/2} |L_{i,n}|^{p-1}}{(|J_n| + |L_{i,n}| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^p} \frac{|J_n|^{p/2}}{|V|^{p-1}} \leq \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} \frac{(|L_{i,n}| + |J_n|)^{2(p-1)}}{(|J_n| + |L_{i,n}| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^p} \leq \\ & \leq \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} (|L_{i,n}| + |J_n| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, вместе с (5.22) и (5.27) получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|_{L^p(\bar{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq C_p \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{pk} \left(\frac{2}{3} \right)^{p(k-i)} \left(\frac{2}{3} \right)^{p(m+k)} \times \\ & \times \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} (|L_{i,n}| + |J_n| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2} \leq \\ & \leq C_p \vartheta^{pk} \left(\frac{2}{3} \right)^{p(k-i)} \varepsilon^{pm} \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt \frac{|J_n|}{|V|^{p-1}} (|L_{i,n}| + |J_n| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2}. \end{aligned}$$

Для фиксированных k и i , рассмотрим те интервалы $L_{i,n}$, для которых n удовлетворяет условию $d_n(\alpha') = k$. Эти интервалы можно сгруппировать также как и мы уже делали выше.. Интервалы J_n , соответствующие $L_{i,n}$, которые принадлежат одной пачке, можно снова сгруппировать в подпачки так, чтобы они имели бы общий левый конец. Следовательно, они формируют вложенное семейство $J_n \supset \dots \supset J_n'$. Обозначим через J_n' правую половину J_n . Из Леммы 3 получим, что каждая точка $t \neq t_*$ может принадлежать не больше чем 15-ти интервалам J_n' , которые соответствуют $L_{i,n}$ из одной пачки. Более того, обозначив через u^* общий левый конец интервала $L_{i,n}$ из одной пачки, для $t \in J_n'$ мы получаем

$$|L_{i,n}| + |J_n| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}) \geq \|u^*, t\|.$$

Напомним, что $p < 2$, $L_{i,n}^*$ является максимальным интервалом пачки и $J_n \subset [\alpha', \beta]$, то получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in \text{пачке}} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq \\ & \leq C_p \frac{\vartheta^{pk} \varepsilon^{pm}}{|V|^{p-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \sum_{n \in \text{пачке}} \int_{L_{i,n}} |f(t)|^p dt (|L_{i,n}| + |J_n| + \text{dist}(J_n, L_{i,n}))^{p-2} \leq \\ & \leq C_p \frac{\vartheta^{pk} \varepsilon^{pm}}{|V|^{p-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \sum_{n \in \text{пачке}} \int_{L_{i,n}^*} |f(t)|^p dt \int_{J_n^*} |[u^*, t]|^{p-2} dt \leq \\ & \leq C_p \frac{\vartheta^{pk} \varepsilon^{pm}}{|V|^{p-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \int_{L_{i,n}^*} |f(t)|^p dt \int_{u^*}^{\beta} |[u^*, t]|^{p-2} dt \\ & \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \int_{L_{i,n}^*} |f(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Так как для фиксированных k и i максимальные интервалы $L_{i,n}^*$ раздельны, то имеем

$$\sum_{\text{по пачкам с } d_n(\alpha')=k} \int_{L_{i,n}^*} |f(t)|^p dt \leq \|f\|_p^p.$$

Следовательно,

$$\sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \|f\|_p^p. \quad (5.28)$$

Для n таких, что $d_n(\alpha') = k$ и $s = \sqrt{2/3}$, по неравенству Гельдера получаем

$$|a_{n,1}|^p = \left| \sum_{i=0}^k b_{i,n} \right|^p = \left| \sum_{i=0}^k s^{(k-i)} s^{(i-k)} b_{i,n} \right|^p \leq C_p \sum_{i=0}^k s^{p(i-k)} |b_{i,n}|^p.$$

Следовательно, из (5.28) получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_{n,1}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq \\ & \leq C_p \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} \sum_{i=0}^k s^{p(i-k)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p = \\ & = C_p \sum_{i=0}^k s^{p(i-k)} \sum_{n \in T_{-,m}^k; d_n(\alpha')=k} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |b_{i,n}|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq \\ & \leq C_p \sum_{i=0}^k s^{p(i-k)} \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \left(\frac{2}{3}\right)^{p(k-i)} \|f\|_p^p \leq C_p \vartheta^{pk} \varepsilon^{pm} \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Просуммировав по k получим

$$\sum_{n \in T_{-,m}^5} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq C_p \epsilon^{pm} \|f\|_p^p.$$

Из последнего неравенства и неравенств (5.23), (5.24) и (5.26) получаем

$$\sum_{n \in T_{-,m}^5} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n))}^p \leq C_p \epsilon^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.29)$$

Случай 6 : Для n , удовлетворяющих условиям $\bar{\beta} \in J_n$, $|J_n \cap [\beta, \bar{\beta}]| > |V|$ и $J_n \not\subset [\beta, \bar{\beta}]$, обозначим

$$T_-^6 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$T_{-,m}^6 = \left\{ n \in T_-^6 : \#(\pi_n \cap [\beta, \bar{\beta}]) = m \right\}.$$

$$S_-^6 = \left\{ n : \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt > \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \right\},$$

$$S_{-,m}^6 = \left\{ n \in S_-^6 : \#(\pi_n \cap \tilde{V}_+^c) = m \right\}.$$

Ясно, что множества $S_{-,m}^6$ и $T_{-,m}^6$ конечны. Если $n \in T_{-,m}^6$, то $d_n(\beta) = m \geq d_n(V)$, а если $n_0 < n_1 < \dots < n$, суть элементы множества $T_{-,m}^6$, то $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset \dots \supset J_n$, причем эти интервалы имеют общий конец. Из оценок $\|f_n\|_p^p$ и Свойства 3 для $n \in T_{-,m}^6$ имеем

$$\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^-} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \epsilon^{qm} |V| |J_n|^{-q/2}.$$

Поэтому из (5.11) получаем

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \epsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Заметим, что из определения множеств $T_{-,m}^6$ следует, что $|J_{n_i}| \geq |V|$. Следовательно, по Свойству 6 имеем

$$\sum_{n \in T_{-,m}^6} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_i}|^{1-p} \leq C_p |V|^{1-p},$$

и поэтому

$$\sum_{n \in T_{-,m}^6} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \vartheta^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.31)$$

Если $n \in S_{-,m}^6$, то $d_n(\alpha) = m \geq d_n(V)$, а если $n_0 < n_1 < \dots < n$, суть элементы множества $S_{-,m}^6$, то $J_{n_0} \supset J_{n_1} \supset \dots \supset J_n$, причем они имеют общий правый конец. Следовательно, для $n \in S_{-,m}^6$ из оценок $\|f\|_p^p$ и Свойства 3 имеем

$$\|f_n\|_p^p \sim |J_n|^{1-p/2} \quad \text{и} \quad \int_V |f_n(t)|^q dt \leq 2 \int_{V \cap J_n^+} |f_n(t)|^q dt \leq C_q \epsilon^{qm} |V| |J_n|^{-q/2}.$$

Последнее неравенство вместе с (5.11) дают

$$|a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \epsilon^{pm} |V|^{p-1} |J_n|^{1-p} \|f\|_p^p.$$

Из определения множеств $S_{-,m}^6$ следует, что $|J_n| \geq |V|$. Следовательно, из Свойства 6 получим, что

$$\sum_{n \in S_{-,m}^6} |J_n|^{1-p} \sim |J_{n_0}|^{1-p} \leq C_p |V|^{1-p},$$

и поэтому

$$\sum_{n \in S_{-,m}^6} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_p^p \leq C_p \vartheta^{pm} \|f\|_p^p. \quad (5.31)$$

Для завершения доказательства заметим, что просуммировав неравенства (5.10), (5.14), (5.15), (5.16), (5.18), (5.20), (5.21), (5.29)–(5.31) по $m \geq 0$, получаем

$$\sum_{n \geq n(V)} \left(\frac{1}{\vartheta}\right)^{pd_n(V)} |a_n|^p \|f_n\|_{L^p(\tilde{V} \cap (J_n^- \cup J_n^+))}^p \leq C_p \|f\|_p^p.$$

5.2. Доказательства Теорем 2 и 3. Мы приведем наброски доказательств, так как они почти во всем совпадают с доказательствами аналогичных теорем из [11].

Доказательство Теоремы 2 : Для того, чтобы доказать, что система Франклина является безусловным базисом, докажем следующее неравенство :

$$c_p \|Pf\|_p \leq \|f\|_p \leq C_p \|Pf\|_p. \quad (5.32)$$

Введем обозначения

$$E_l = \{t \in (0, 1) : Pf(t) > l\}, \quad B_l = \{t \in (0, 1) : \mathbb{M}\chi_{B_l}(t) > 1/4\}.$$

Из свойств функции $\mathbb{M}$ следует, что

$$|B_l| \leq C|E_l| \quad \text{и} \quad B_l = \bigcup_k V_k,$$

где $V_k = (\alpha_k, \beta_k)$ суть непересекающиеся интервалы со свойством :

$$\mathbb{M}\chi_{E_1}(\alpha_k) \leq \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \mathbb{M}\chi_{E_1}(\beta_k) \leq \frac{1}{4}.$$

Будем считать, что множество Γ_k , соответствующая множеству V_k как и в Лемме 4. Имеем

$$\bar{\Gamma} = \bigcup_k \Gamma_k, \quad \bar{\Lambda} = N \setminus \bar{\Gamma}, \quad \varphi_1 = \sum_{n \in \bar{\Gamma}} a_n f_n, \quad \varphi_2 = \sum_{n \in \bar{\Lambda}} a_n f_n.$$

Из неравенства (5.1) в Леммы 4 получаем

$$\int_{B_1^*} \sum_{n \in \bar{\Gamma}} |a_n f_n(t)| dt \leq C \int_{B_1} P f(t) dt.$$

Используя последнее неравенство и $P f(t) \leq l$, для $t \notin E_1$, получаем

$$\begin{aligned} \psi_1(l) &= |\{t \in (0, 1) : S^* \varphi_1(t) > \lambda/2\}| \leq |B_1| + \frac{2}{l} \int_{B_1^*} S^* \varphi_1(t) dt \\ &\leq |B_1| + \frac{C}{l} \int_{B_1} P f(t) dt \leq |B_1| + C|B_1 \setminus E_1| + \frac{C}{l} \int_{E_1} P f(t) dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi_1(l) \leq C \left(|E_1| + \frac{1}{l} \int_{E_1} P f(t) dt \right). \quad (5.33)$$

Так как для $t \notin E_1$ мы имеем $P f(t) \leq l$, из неравенства (5.2) следует, что

$$P \varphi_2(t) \leq Cl, \quad \text{где} \quad t \in (0, 1). \quad (5.34)$$

Так как $S^* g \leq C \tilde{\mathbb{M}} g$ и функция $\tilde{\mathbb{M}}$ имеет вид (2.2), то

$$\psi_2(l) = \left| \left\{ t \in (0, 1) : S^* \varphi_2(t) > \frac{l}{2} \right\} \right| \leq \frac{C}{l^2} \|\tilde{\mathbb{M}} \varphi_2\|_2^2 \leq \frac{C}{l^2} \|\varphi_2\|_2^2 = \frac{C}{l^2} \|P \varphi_2\|_2^2.$$

Это неравенство вместе с (5.34) дают

$$\psi_2(l) \leq C \left(|E_1| + \frac{1}{l^2} \int_{B_1^*} (P f(t))^2 dt \right). \quad (5.35)$$

Из неравенств (5.33) и (5.35) следует

$$\psi(l) = |\{t \in (0, 1) : S^* f(t) > l\}| \leq \psi_1(l) + \psi_2(l) \leq$$

$$\leq C \left(|E_l| + \frac{1}{l} \int_{E_l} P f(t) dt + \frac{1}{l^2} \int_{E_l} (P f(t))^2 dt \right).$$

Так как $1 < p < 2$, то имеем

$$\|S^* f\|_p^p = p \int_0^\infty l^{p-1} \psi(l) dl \leq C_p \|P f\|_p^p.$$

Из этого неравенства следует правостороннее неравенство (5.32). Перейдем к доказательству левостороннего неравенства в (5.32). Для этого достаточно показать, что для каждого p ($1 < p < 2$) функция P имеет слабый тип (p, p) . Поэтому нам нужно доказать, что для любого фиксированного p ($1 < p < 2$) и любой функции $f \in L^p[0, 1]$ имеет место

$$|\{t \in (0, 1) : P f(t) \geq l\}| \leq \frac{C_p}{l^p} \|f\|_p^p,$$

где $l > 0$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\|f\|_p = 1$ и $l > 1$. Обозначая

$$G_l = \{t \in (0, 1) : P f(t) > l\},$$

получаем

$$|G_l| \leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p} \quad \text{и} \quad G_l = \bigcup_k V_k, \quad (5.38)$$

где $V_k = (\alpha_k, \beta_k)$ суть непересекающиеся интервалы. Кроме того, $|G_l| = \sum_k |V_k|$, и

$$|f(t)| \leq l \quad \text{п.в. на} \quad G_l^c \quad \text{и} \quad \int_{V_k} |f(t)| dt \leq l |V_k|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

Через $T_V f$ обозначим проекцию функции $f \chi_V$ на пространство линейных функций. Если $\int_V |f(t)| dt \leq l |V|$, то

$$\|T_V f\|_2^2 \leq 4l^2 |V| \quad \text{и} \quad \|T_V f\|_p \leq C_p \|f\|_{L^p(V)}.$$

Введем обозначения

$$h = f \chi_{G_l^c} + \sum_k T_{V_k} f, \quad g = f - h$$

и оценим части, соответствующие $P h$ и $P g$.

Используя неравенства (5.38), (5.39) и свойства оператора T_V получим, что

$$\|h\|_2^2 = \int_{G_l^c} f^2(t) dt + \sum_k \int_{V_k} (T_{V_k} f)^2(t) dt \leq l^{2-p} \int_{G_l^c} f^p(t) dt + 4l^2 |G_l| \leq C_p l^{2-p} \|f\|_p^p.$$

Отсюда имеем

$$\left| \left\{ t \in (0, 1) : Ph(t) > \frac{l}{2} \right\} \right| \leq \frac{4}{l^2} \|Ph\|_2^2 = \frac{4}{l^2} \|h\|_2^2 \leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p}, \quad (5.40)$$

Остается оценить часть, соответствующую Pg . Так как при $p < 2$, то

$$(Pg(t))^p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(g)^2 f_n^2(t) \right)^{p/2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p.$$

Пусть $\tilde{V}_k = (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k)$, где $\tilde{\alpha}_k = \alpha_k - 2|V_k|$, $\tilde{\beta}_k = \beta_k + 2|V_k|$ и $\tilde{G}_I = \cup_k \tilde{V}_k$. Тогда очевидно, что $|\tilde{G}_I| \leq 5|G_I|$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \left\{ t \in (0, 1) : Pg(t) > \frac{l}{2} \right\} \right| &\leq |\tilde{G}_I| + \frac{2^p}{l^p} \int_{\tilde{G}_I} (Pg)^p(t) dt \leq \\ &\leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p} + \frac{2^p}{l^p} \sum_n \int_{\tilde{G}_I} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p dt. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Из определения функции g имеем

$$\|g\|_p^p = \sum_k \int_{V_k} |f(t) - T_{V_k} f(t)|^p dt \leq C_p \sum_k \int_{V_k} |f(t)|^p dt \leq C_p \|f\|_p^p. \quad (5.42)$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\sum_n \int_{\tilde{G}_I} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p dt \leq C_p \|g\|_p^p. \quad (5.43)$$

Для этого, обозначим $g_k = g \chi_{V_k}$ и заметим, что $\|g\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_p^p$ и $g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$, где под равенством понимаем сходимость к функции g в $L^p[0, 1]$. Более того, для каждого $n \geq 1$ имеем $a_n(g) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n(g_k)$. Из определения T_{V_k} следует, что $a_n(g_k) = 0$ для $n < n(V_k)$. Применяя неравенство Гельдера с $\vartheta = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}$, получаем

$$\begin{aligned} |a_n(g)|^p &= \left| \sum_{k:n \geq n(V_k)} a_n(g_k) \right|^p \leq \left(\sum_{k:n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{d_n(V_k)} |a_n(g_k)| \vartheta^{d_n(V_k)} \right)^p \\ &\leq \left(\sum_{k:n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{pd_n(V_k)} |a_n(g_k)|^p \right) \left(\sum_{k:n \geq n(V_k)} \vartheta^{qd_n(V_k)} \right)^{p/q} \end{aligned}$$

Если $n \geq n(V_k)$, то V_k имеет по крайней мере одну точку из разбиения π_n . Поэтому, для каждого $s \geq 1$ существуют не более двух значений k , для которых $n \geq n(V_k)$ и $d_n(V_k) = s$. Следовательно,

$$\left(\sum_{k: n \geq n(V_k)} \vartheta^{s d_n(V_k)} \right)^{p/q} \leq C_p.$$

Из предыдущих неравенств следует

$$|a_n(g)|^p \leq C_p \sum_{k: n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V_k)} |a_n(g_k)|^p.$$

Заметим, что $\text{supp } g_k \subset V_k$. Следовательно, используя последнее неравенство и Лемму 5, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tilde{G}_i^c} |a_n(g)|^p |f_n(t)|^p dt &\leq C_p \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k: n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V_k)} \int_{\tilde{G}_i^c} |a_n(g_k)|^p |f_n(t)|^p dt \\ &\leq C_p \sum_k \sum_{n \geq n(V_k)} \left(\frac{1}{\vartheta} \right)^{p d_n(V_k)} |a_n(g_k)|^p \int_{\tilde{V}_k^c} |f_n(t)|^p dt \leq C_p \sum_k \|g_k\|_p^p = C_p \|g\|_p^p, \end{aligned}$$

т.е. неравенство (5.43). Из (5.43), (5.41) и (5.42) имеем

$$\left| \left\{ t \in (0, 1) : P g(t) > \frac{l}{2} \right\} \right| \leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p}. \quad (5.44)$$

Так как $f = g + h$, из (5.40) и (5.44) следует

$$|\{t \in (0, 1) : P f(t) > l\}| \leq C_p \frac{\|f\|_p^p}{l^p},$$

т.е. P имеет слабый тип (p, p) для каждого p ($1 < p < 2$). Следовательно, в силу интерполяционной теоремы Марцинкевича, если P имеет тип $(2, 2)$, то P имеет тип (p, p) для каждого p ($1 < p < 2$), т.е. левая часть неравенства в (5.32) доказана. Доказательство завершено.

Доказательство Теоремы 3 : С. В. Конягин и В. Н. Тсмляков [15] доказали, что нормированный базис $x = (x_n, n \geq 0)$ в банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ является греди-базисом тогда и только тогда, когда он является "демократическим" и безусловным базисом. "Демократичность" означает, что для любых конечных подмножеств A и B таких, что $\#A = \#B$ имеем

$$\left\| \sum_{n \in A} x_n \right\| \sim \left\| \sum_{n \in B} x_n \right\|. \quad (5.45)$$

Поэтому, достаточно проверить, что $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ демократична в $L_p[0,1]$, где $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ – общая периодическая система Франклина, нормированная в L_p . Допустим $\chi_{J_{n,p}} = |J_n|^{-1/p} \chi_{J_n}$. Так как система $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ является нормализованным безусловным базисом, то из Свойства 4 и максимального неравенства Феффермана-Стейна (Теорема 1, Глава II из [14]) вытекает, что для любой последовательности чисел $\{u_n, n \geq 1\}$ имеет место

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n f_{n,p} \right\|_p^p \sim \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n f_{n,p}(t)|^2 \right)^{p/2} dt \sim \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n \chi_{J_{n,p}}(t)|^2 \right)^{p/2} dt.$$

Заметим, что для любой функции $f \in L_p[0,1]$ ($1 < p < \infty$) имеет место $\|\mathbf{M}f\|_p \sim \|f\|_p$. Кроме того, из Свойства 6 следует

$$\left(\sum_{i=1}^m |\chi_{J_{n_i,p}}(t)|^2 \right)^{p/2} \sim (|J_{n_m}|^2)^{p/2} \sim \sum_{i=1}^m |\chi_{J_{n_i,p}}(t)|^p$$

для любого t и любых индексов $n_1 < n_2 < \dots < n_m$. Следовательно,

$$\left\| \sum_{i=1}^m f_{n_i,p} \right\|_p^p \sim \int_0^1 \sum_{i=1}^m |\chi_{J_{n_i,p}}(t)|^p dt,$$

что и доказывает демократичность $\{f_{n,p}; n \geq 1\}$ в $L_p[0,1]$. Из метода доказательства следует, что постоянные, участвующие в доказательстве, не зависят от T .

Abstract. A general Franklin periodic system corresponding to an everywhere dense in $[0,1]$ sequence of points $T = (t_n, n \geq 0)$ is defined to be a sequence of orthonormalised, piecewise linear (with finite set of knots $t_0, \dots, t_n \in T$), continuous functions with period 1. The main result of the paper states that any general, periodic Franklin system is an unconditional and greedy basis in the spaces $L^p[0,1]$, $1 < p < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ph. Franklin, "A set of continuous orthogonal functions", Math. Ann., vol. 100, pp. 522 – 528, 1928.
2. A. Haar, "Theorie der orthogonalen Functionensysteme", Math. Ann., vol. 10, pp. 331 – 371, 1910.
3. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.
4. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.

5. S. V. Bochkarev, "Some inequalities for the Franklin series", *Anal. Math.*, vol. 1, pp. 249 – 257, 1975.
6. P. Wojtaszczyk, "The Franklin system is an unconditional basis in H^1 ", *Ark. Mat.*, vol. 20, pp. 293 – 300, 1982.
7. Z. Ciesielski, "Bases and approximation by splines", *Proc. of the Intern. Congr. of Math., Vancouver*, pp. 47 – 51, 1974.
8. Z. Ciesielski, A. Kamont, "Projections onto piecewise linear functions", *Funct. Approx. Comment. Math.*, vol. 25, pp. 129 – 143, 1997.
9. G. G. Gevorgyan, A. Kamont, "On general Franklin systems", *Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne)*, vol. 374, pp. 1 – 59, 1998.
10. Г. Г. Геворкян, А. А. Саакян, "Безусловное базисное свойство общих систем Франклина", *Изв. АН Армении, серия Математика*, том 35, № 4, стр. 7 – 25, 2000.
11. G. G. Gevorgyan, A. Kamont, "Unconditionality of general Franklin system in $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$ ", *Studia Math.*, vol. 164, pp. 161 – 204, 2004.
12. Б. Кашян, А. Саакян, *Ортогональные Ряды*, Наука, Москва, 1984.
13. М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в R^n* , Москва, Мир, 1978.
14. E. Stein, *Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality and Oscillatory Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993.
15. S.V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", *East J. on Approx.*, vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.

Поступила 20 января 2005