Известия НАН Армении. Математика, **40**, № 1, 2005, 5–17

ДВА ЗАМЕЧАНИЯ О КВАЗИ-ГРИДИ БАЗИСАХ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1

Г. Г. Геворкян, А. Камонт

Ереванский Государственный Университет
Институт математики, Сопот, Польша
E-mail : a.kamont@impan.gda.pl

Резюме. Любая полная ортонормированная система, порожденная интегрируемым всплеском и являющейся базисной последовательностью в $L_1(R)$, не является квази-гриди базисом в $L_1(R)$. Классическая система Франклина также не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Начнем с напоминания определения квази-гриди базиса в банаховом пространстве B (см. [1], [2]). Пусть $\{x_n\}$ – нормированный базис в банаховом пространстве B и пусть $\{x_n^*\}$ – биортогональная система к $\{x_n\}$. Для любого $x \in B$ и $m = 1, 2, \ldots$, сумма

$$G_m(x) = \sum_{n \in A} x_n^*(x) x_n$$

определяется по следующему правилу : A есть подмножество натуральных чисел, $card\ A = m$, удовлетворяющее $|x_n^*(x)| \geq |x_k^*(x)|$ при $n \in A$ и $k \notin A$.

Определение 1. Нормированный базис $\{x_n\}$ в банаховом пространстве B называется **квази-гриди базисом**, если для любого $x \in B$ суммы $G_m(x)$ сходятся к x в норме пространства B.

Очевидно, что всякий безусловный базис пространства B является квази-гриди базисом. Однако, для таких пространств как $C[0;1]$ и $L_1[0;1]$, которые не обладают безусловными базисами, существование квази-гриди базиса не очевидно. В

Работа выполнена при финансовой поддержке ANSEF, грант № 05-PS-math-87-65 и Фонд Польской Науки.
Работа выполнена при финансовой поддержке KBN грант № 1 P03A 038 27.

работе [3] доказано, что в пространстве $C[0;1]$ не существует квази-гриди базиса, а также существование квази-гриди базиса в пространстве $L_1[0;1]$, однако еще никому не удавалось построить такой базис. Естественно, что такой базис в первую очередь ищут среди уже известных "хороших" базисов.

Настоящая статья указывает где не следует искать квази-гриди базисы или базисные последовательности для пространств $L_1[0;1]$ и $L_1(R)$.

Замечание 1. Нормированная в пространстве $L_1[0;1]$ система Франклина $\{f_n^{(1)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$.

Напомним, что если $\psi \in L_2(R)$ и система функций $\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k)$, $j,k \in Z$ (Z — множество всех целых чисел) является полной ортонормированной системой в $L_2(R)$, то ψ называется **всплеском**. Известно [4], что если функция ψ и ее производные убывают достаточно быстро, то система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ образует безусловный базис в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$. Войташчик [5] доказал, что при весьма слабых ограничениях на ψ система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ является безусловным базисом в $L_p(R)$, $1 < p < \infty$.

Если даже $\psi \in L_1(R)$, то система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ не может быть базисом в $L_1(R)$. Действительно, не трудно видеть, что $\int_R \psi(t)dt = 0$ и следовательно система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ не может быть полной в $L_1(R)$.

Однако, можно ввести понятие всплеск базиса в $L_1(R)$ при существовании масштабной функции ϕ. Не вдаваясь в подробности, отметим, что в последнем случае для почти всех t выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{0\le j\le J-1}\sum_{k\in Z}\psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(\cdot) + \sum_{k\le K}\psi_{J,k}(t)\psi_{J,k}(\cdot)\right\|_1 \le C, \tag{1.1}$$

где $J \ge 0$ и $K \in Z\cup\{+\infty\}$.

Система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ не нормирована в $L_1(R)$, однако $\psi_{j,k}^{(1)} = 2^j\psi(2^j x - k)$ является почти нормированной системой в $L_1(R)$ в том смысле, что $\|\psi_{j,k}^{(1)}\|_1$ не зависит от j и k.

Замечание 2. Если система $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ порождена интегрируемым всплеском ψ и удовлетворяет (1.1), то система $\{\psi_{j,k}^{(1)}\}_{j,k\in Z}$ не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки.

Отметим, что условие (1.1) может выполняться даже без существования масштабной функции. Например, в работе [6] показано выполнение (1.1) при достаточно быстром убывании функции ψ.

Функция Хаара является простейшим примером всплеска, т.е.

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{для} \quad \frac{1}{2} \le x < 1. \end{cases}$$

Система функций $\{2^{\frac{j}{2}}h(2^jx-k)\}$ обладает многими хорошими свойствами, однако она не является квази-гриди базисом в замыкании своей линейной оболочки. По терминологии [2], система $h_{j,k}=2^jh(2^jx-k)\}$ не является безусловным относительно постоянных коэффициентов, т.е. не существует такой постоянной $C>0$, чтобы для любых $F\subset Z^2$ и $\epsilon_{j,k}=\pm1$ выполнялось бы неравенство

$$\left\|\sum_{(j,k)\in F}\epsilon_{j,k}h_{j,k}\right\|_1\le C\left\|\sum_{(j,k)\in F}h_{j,k}\right\|_1.$$

Действительно, не трудно заметить [7], что

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}h_{j,0}\right\|_1=1,$$

однако

$$\left\|\sum_{j=0}^{m}(-1)^jh_{j,0}\right\|_1\ge\frac{m}{2}.$$

Отметим, что любая система типа Хаара (включая саму систему Хаара) не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$ (см. [8]).

Система Хаара эквивалентна системе Франклина (см. [9]) в пространстве $L_p[0;1]$, $1<p<\infty$ и многим всплеск системам (см. [4], [10]) в пространстве $L_p(R)$, $1<p<\infty$. Следовательно, некоторые результаты, верные для системы Хаара, переносятся на систему Франклина и на всплеск системы. Однако в пространстве $L_1[0;1]$ система Хаара не эквивалентна системе Франклина (см. [11]), а в пространстве $L_1(R)$ система Хаара не эквивалентна всплеск системам (см. [12]). Поэтому из того, что система Хаара не является квази-гриди базисом в L_1 еще не следует, что система Франклина или всплеск система не является базисом в L_1. Ниже доказываются эти замечания.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Пусть $n=2^\mu+\nu$, где $\mu\ge0$. Обозначим

$$s_{n,i}=\begin{cases}\dfrac{i}{2^{\mu+1}} & \text{для}\quad 0\le i\le2\nu,\\[2mm] \dfrac{i-\nu}{2^\mu} & \text{для}\quad 2\nu<i\le n.\end{cases}\tag{2.1}$$

Каждая функция системы Франклина $f_n(t)$, $n\ge2$, непрерывна на $[0;1]$ и линейна на каждом отрезке $[s_{n,i-1};s_{n,i}]$, $i=1,\ldots,n$. Следовательно, $f_n(t)$ однозначно определяется значениями $a_i^{(n)} = f_n(s_{n,i})$. Напомним нужные для дальнейшего использования некоторые оценки для функций f_n и для значений $a_i^{(n)}$, полученные в [13], [14].

Верны следующие интегральные неравенства (см. [14], формулы (64), (39) и (47)) :

$$\int_{s_{n,2\nu-2}}^{s_{n,2\nu}} |f_n(t)|\, dt \geq 2^{-\frac{\mu}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}(\sqrt{2}-1), \tag{2.2}$$

$$\|f_n\|_1 < 5 \cdot 2^{-\frac{\mu}{2}-1}, \tag{2.3}$$

$$\int_{A_n} |f_n(t)|dt < \frac{1}{5}2^{-\frac{\mu}{2}-1}, \tag{2.4}$$

где

$$A_n = [0;1]\setminus[s_{n,2\nu-4}; s_{n,2\nu+2}]. \tag{2.5}$$

Для всех n имеют место (см. [14], формулы (27) и (62))

$$\sqrt{\frac{2}{3}}2^{\frac{\mu}{2}+1} \leq |f_n(s_{n,2\nu-1})| = \left|a_{2\nu-1}^{(n)}\right| \leq 2^{\frac{\mu}{2}+1}. \tag{2.6}$$

Формулы (33) и (44) работы [14] запишем в виде

$$\frac{107}{66}\left|a_{2\nu-2}^{(n)}\right| < \left|a_{2\nu-1}^{(n)}\right| < \frac{98}{60}\left|a_{2\nu-2}^{(n)}\right|, \quad \nu > 1, \tag{2.7}$$

$$\frac{59}{66}\left|a_0^{(2^\mu+1)}\right| < \left|a_1^{(2^\mu+1)}\right| < \frac{9}{10}\left|a_0^{(2^\mu+1)}\right|. \tag{2.8}$$

И наконец (см. [13], Лемма 2), для $\nu > 1$ имеем

$$\left|a_0^{(n)}\right| = \frac{1}{\cosh\alpha(2\nu-2)}\left|a_{2\nu-2}^{(n)}\right|, \tag{2.9}$$

где α – положительное решение уравнения $\cosh x = 2$.

Лемма 3. *Для всех $\nu > 1$ и при $\mu_1, \mu_2 \geq \log_2\nu$ выполняются*

$$\frac{\|f_{2^{\mu_1}+\nu}\|_1\left|a_0^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right|}{\|f_{2^{\mu_2}+\nu-1}\|_1\left|a_0^{(2^{\mu_2}+\nu-1)}\right|} < 1. \tag{2.10}$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\nu > 2$ и отдельно оценим числитель и знаменатель в (2.10). В силу (2.3), (2.6), (2.7) и (2.9) следует, что для любого $\nu \geq 2$ имеют место неравенства

$$\|f_{2^{\mu_1}+\nu}\|_1\left|a_0^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right| < 5\cdot 2^{-\frac{\mu_1}{2}-1}\frac{\left|a_{2\nu-2}^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right|}{\cosh\alpha(2\nu-2)} \leq \frac{66}{107}5\cdot 2^{-\frac{\mu_1}{2}-1}\frac{\left|a_{2\nu-1}^{(2^{\mu_1}+\nu)}\right|}{\cosh\alpha(2\nu-2)} \leq$$

$$\le \frac{66}{107}5\cdot 2^{-\frac{\nu-1}{2}-1}\frac{2^{\frac{\nu-1}{2}+1}}{\cosh\alpha(2\nu-2)} = \frac{330}{107}\frac{1}{\cosh\alpha(2\nu-2)} < \frac{3,1}{\cosh\alpha(2\nu-2)}. \tag{2.11}$$

Применяя (2.2), (2.6), (2.7) и (2.9), для $\nu > 2$ получим

$$\|f_{2^{\nu-2}+\nu-1}\|_1\left|a_0^{(2^{\nu-2}+\nu-1)}\right| \ge 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\left|a_{2\nu-4}^{(2^{\nu-2}+\nu-1)}\right|}{\cosh\alpha(2\nu-4)} \ge$$

$$\ge 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{60}{98}\frac{\left|a_{2\nu-3}^{(2^{\nu-2}+\nu-1)}\right|}{\cosh\alpha(2\nu-4)} \ge$$

$$\ge 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{60}{98}\sqrt{\frac{2}{3}}\,2^{\frac{\nu-2}{2}+1}\frac{1}{\cosh\alpha(2\nu-4)} =$$

$$= \frac{60}{98}\frac{8}{3}\frac{\sqrt{2}-1}{\cosh\alpha(2\nu-4)} > \frac{0,65}{\cosh\alpha(2\nu-4)}. \tag{2.12}$$

Нетрудно проверить, что для любого натурального m

$$\frac{\cosh\alpha m}{\cosh\alpha(m+2)} < \frac{1+e^{-2\alpha}}{e^{2\alpha}} < \frac{1}{10}. \tag{2.13}$$

Из (2.11) – (2.13) следует (2.10) для $\nu > 2$. При $\nu = 2$ опять имеем оценку (2.11). Поэтому применяя (2.2), (2.6) и (2.8) для $\|f_{2^{\nu-2}+1}\|_1\left|a_0^{(2^{\nu-2}+1)}\right|$ получим

$$\|f_{2^{\nu-2}+1}\|_1\left|a_0^{(2^{\nu-2}+1)}\right| \ge 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{10}{9}\left|a_1^{2^{\nu-2}+1}\right| \ge$$

$$\ge 2^{-\frac{\nu-2}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{10}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}\,2^{\frac{\nu-2}{2}+1} > \frac{32}{27}. \tag{2.14}$$

При $\nu = 2$, оценка (2.10) следует из (2.11), (2.14) и равенства $\cosh 2\alpha = 7$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Для любого натурального $N \ge 2$ имеет место*

$$\left\|\sum_{\mu=2}^{N} a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}\right\|_1 > \frac{N}{4\cosh 6\alpha}.$$

Доказательство. В силу (2.2), (2.6), (2.7) и (2.9) при $n = 2^\mu + 4$ следует

$$\left|a_0^{(2^\mu+4)}\right|\int_{s_{n,4}}^{s_{n,6}}|f_n(t)|\,dt \ge \frac{\left|a_6^{(2^\mu+4)}\right|}{\cosh 6\alpha}2^{-\frac{\mu}{2}+1}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right) \ge$$

$$\ge \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{4}{\cosh 6\alpha}\frac{60}{98}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}-1\right) = \frac{80}{49}\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{1}{\cosh 6\alpha} > \frac{0,65}{\cosh 6\alpha}. \tag{2.15}$$

С другой стороны, в силу (2.4), (2.6), (2.7) и (2.9) при $n = 2^\mu + 4$ имеем

$$\left|a_0^{(2^\mu+4)}\right| \int_{A_{2^\mu+4}} |f_n(t)|\,dt \le \frac{\left|a_6^{(2^\mu+4)}\right|}{\cosh 6\alpha}\frac{1}{5}2^{-\frac{\mu}{2}-1} \le$$

$$\le \frac{66}{107}\left|a_7^{(2^\mu+4)}\right| \frac{1}{5\cosh 6\alpha}2^{-\frac{\mu}{2}-1} \le \frac{66}{535\cosh 6\alpha} \le \frac{1}{8\cosh 6\alpha}. \qquad (2.16)$$

Отметим, что если $n_1 = 2^{\mu+1} + 4$ и $n_2 = 2^\mu + 4$, то $s_{n_1,8} < s_{n_2,6}$. Действительно, из (2.1) имеем

$$s_{n_1,8} = \frac{8}{2^{\mu+2}} = \frac{4}{2^{\mu+1}} < \frac{6}{2^\mu + 1} = s_{n_2,6}.$$

Следовательно, отрезки $I_\mu = [s_{2^\mu+4,6}; s_{2^\mu+4,8}]$ попарно не пересекаются. Кроме того, применив (2.1) и (2.5), можно проверить, что если $\mu \ne l$, то $I_\mu \subset A_{2^l+4}$. Поэтому из (2.5), (2.15) и (2.16) следует

$$\left\|\sum_{\mu=2}^N a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}\right\|_1 \ge \sum_{\mu=2}^N \int_{I_\mu} \left|\sum_{l=1}^N a_0^{(2^l+4)} f_{2^l+4}(t)\right| dt \ge$$

$$\ge \sum_{\mu=2}^N \left(\int_{I_\mu} \left|a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}(t)\right| dt - \sum_{l\ne\mu} \int_{I_\mu} \left|a_0^{(2^l+4)} f_{2^l+4}(t)\right| dt\right) \ge$$

$$\ge \sum_{\mu=2}^N \int_{I_\mu} \left|a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}(t)\right| dt - \sum_{\mu=2}^N \int_{A_{2^\mu+4}} \left|a_0^{(2^\mu+4)} f_{2^\mu+4}(t)\right| dt \ge$$

$$\ge \frac{N-1}{\cosh 6\alpha}(0,65 - 0,125) > \frac{N}{4\cosh 6\alpha}.$$

Лемма доказана.

Для измеримого множества $E \subset R$ и $j = 0, 1, \ldots, k \in Z$, положим

$$E_{j,k} = 2^{-j}(E + k) = \{2^{-j}(t + k) : t \in E\}. \qquad (2.17)$$

Для доказательства Замечания 2 нам понадобятся две простые леммы.

Лемма 5. *Пусть $\mu(E) < \infty$ и для фиксированного j обозначим через G_j множество точек, принадлежащих бесконечно многим $E_{j,k}$, т.е.*

$$G_j = \bigcap_{l\ge0} \bigcup_{|k|\ge l} E_{j,k}.$$

Тогда $\mu(G_j) = 0$.

Доказательство. Обозначим $\alpha_k = \mu([k,k+1]\cap E)$. Из $\mu(E) < \infty$ имеем $\sum\limits_{k\in Z}\alpha_k < \infty$. Далее заметим, что для любых j,k и ν

$$\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap E_{j,k}\right) = \frac{1}{2^j}\mu([\nu-k,\nu-k+1]\cap E) = \frac{1}{2^j}\alpha_{\nu-k}.$$

Поскольку $\sum\limits_{k\in Z}\alpha_k < \infty$, то для любых $\nu\in Z$ и $l\geq 0$ имеем

$$\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap G_j\right) \leq \mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap \bigcup_{|k|\geq l} E_{j,k}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{|k|\geq l}\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}\right]\cap E_{j,k}\right) = \frac{1}{2^j}\sum_{|k|\geq l}(\alpha_{\nu-k}+\alpha_{\nu+k}) \to 0 \quad \text{при} \quad l\to\infty.$$

Следовательно, $\mu([\frac{\nu}{2^j},\frac{\nu+1}{2^j}]\cap G_j) = 0$ для любого $\nu\in Z$, и поэтому $\mu(G_j) = 0$.

Лемма 6. *Пусть $\mu(E) > 0$ и $E_j = \bigcup_{k\in Z}E_{j,k}$. Обозначим через D множество точек, принадлежащих бесконечно многим E_j, $j\geq 0$. Тогда $\mu(R\setminus D) = 0$.*

Доказательство : Пусть χ_D характеристическая функция множества D. Для доказательства леммы 6 достаточно доказать, что $\chi_D(t) > 0$ для любой точки Лебега t функции χ_D. Не умаляя общности предположим, что $\mu(E\cap[0,1]) = \alpha > 0$. Тогда, как и при доказательстве Леммы 5, для любого $\nu\in Z$ имеем

$$\mu\left(\left[\frac{\nu}{2^\xi},\frac{\nu+1}{2^\xi}\right]\cap E_\xi\right) \geq \mu\left(\left[\frac{\nu}{2^\xi},\frac{\nu+1}{2^\xi}\right]\cap E_{\xi,\nu}\right) = \frac{\alpha}{2^\xi}. \tag{2.18}$$

Для любых $j,\xi,\xi\geq j$ и $x\in R$ имеем

$$\operatorname{card}\left\{\nu\in Z : \left[\frac{\nu}{2^\xi},\frac{\nu+1}{2^\xi}\right]\subset\left[x-\frac{1}{2^j},x+\frac{1}{2^j}\right]\right\} \geq 2^{\xi-j}. \tag{2.19}$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что для любых x и $\xi\geq j$ имеет место

$$\mu\left(\left[x-\frac{1}{2^j},x+\frac{1}{2^j}\right]\cap E_\xi\right) \geq \frac{\alpha}{2^j}. \tag{2.20}$$

Теперь, обозначая $D_\xi = \bigcup_{\eta\geq\xi}E_\eta$, имеем $D = \bigcap_{\xi\geq 0}D_\xi$. Для любого u, получаем $\chi_D(u) = \lim\limits_{\xi\to\infty}\chi_{D_\xi}(u)$, и последовательность $\chi_{D_\xi}(u)$ убывает. Следовательно, если t – точка Лебега функции χ_D, то

$$\chi_D(t) = \lim_{j\to\infty}2^{j-1}\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t+\frac{1}{2^j}}\chi_D(u)\,du = \lim_{j\to\infty}2^{j-1}\lim_{\xi\to\infty}\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t-\frac{1}{2^j}}\chi_{D_\xi}(u)\,du. \tag{2.21}$$

Но из (2.20) вытекает, что для $\xi > j$ имеем

$$\int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t+\frac{1}{2^j}}\chi_{D_\xi}(u)\,du \geq \int_{t-\frac{1}{2^j}}^{t+\frac{1}{2^j}}\chi_{E_\xi}(u)\,du \geq \frac{\alpha}{2^j}.$$

Поэтому из (2.21) следует, что $\chi_D(t)\geq\frac{\alpha}{2}$ для любой точки Лебега функции χ_D. Следовательно, $\mu(R\setminus D) = 0$. Лемма 6 доказана.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЗАМЕЧАНИЙ

П. Войташчик [2] доказал, что если система $\{x_n\}$ является квази-гриди базисом в банаховом пространстве B, то существует постоянная C_1, зависящая только от системы $\{x_n\}$ такая, что для любого $x \in B$ и любых λ_1, λ_2

$$\left\| \sum_{\lambda_1 \le |a_n| \le \lambda_2} a_n x_n \right\| \le C_1 \|x\|, \quad a_n = x^*(x). \tag{3.1}$$

Доказательство Замечания 1 : Рассмотрим суммы

$$F_N(t) = \sum_{\mu=0}^{N} \sum_{\nu=1}^{2^\mu} f_{2^\mu+\nu}(0) f_{2^\mu+\nu}(t).$$

Так как система Франклина является базисом в $C[0;1]$ с базисной постоянной 3 (см. [15]), то

$$\|F_N\|_1 \le 4 \quad \text{для всех} \quad N. \tag{3.2}$$

Разложим функцию F_N по нормированной в $L_1[0;1]$ системе Франклина $\{f^{(1)}_{2^\mu+\nu}\}$, т.е.

$$F_N(t) = \sum_{\mu=0}^{N} \sum_{\nu=1}^{2^\mu} c_{2^\mu+\nu} f^{(1)}_{2^\mu+\nu}(t), \quad f^{(1)}_n = \frac{f_n}{\|f_n\|_1}. \tag{3.3}$$

Из Леммы 1 следует, что $|c_{2^{\mu_1}+\nu_1}| < |c_{2^{\mu_2}+\nu_2}|$ при $\nu_1 > \nu_2$. Следовательно, если переставить слагаемые в сумме (3.3) в порядке убывания $|c_n|$, то сначала пойдут члены $\{c_{2^\mu+1}\}$ в каком-то порядке, следом за ними члены $\{c_{2^\mu+2}\}$ в каком-то порядке и так далее. Следовательно, сумма

$$\sum_{\mu=2}^{N} c_{2^\mu+4} f^{(1)}_{2^\mu+4}(t) \tag{3.4}$$

будет "куском" в переставленной сумме (3.3). По Лемме 2, норма суммы (3.4) в $L_1[0;1]$ растет вместе с N. Отсюда и из (3.2) доказывается, что $\{f^{(1)}_n\}$ не является квази-гриди базисом в $L_1[0;1]$. Замечание 1 доказано.

Известно (см. [2]), что если $\{x_n\}$ является квази-гриди базисом в банаховом пространстве B, то существует постоянная C, зависящая только от системы $\{x_n\}$ такая, что для любого конечного множества F и любых $\epsilon_n = \pm 1$ имеем

$$\left\| \sum_{n \in F} \varepsilon_n x_n \right\| \le C \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\|. \tag{3.5}$$

Из (3.5), для любого конечного множества F и любого подмножества $G \subset F$ следует

$$\left\|\sum_{n\in G} x_n\right\| \le C\left\|\sum_{n\in F} x_n\right\|. \tag{3.6}$$

Доказательство Замечания 2. Допустим $\{\psi^{(1)}_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ – квази-гриди базисная последовательность с "квази-гриди базисной постоянной" C_1 (см. (3.5)) и базисной постоянной C (см. (1.1)). Поскольку $\|\psi\|_1 > 0$, то существует некоторое $A > 0$ такое, что при любом $\delta > 0$ выполняется

$$\mu\left\{x : \left||\psi(x)| - A\right| < \delta\right\} > 0. \tag{3.7}$$

Для A удовлетворяющего (3.7) и $\delta > 0$, обозначим

$$E = \left\{x : \left||\psi(x)| - A\right| < \delta\right\}. \tag{3.8}$$

Определим множества $E_{j,k}$ по формулам (2.17). Ясно, что $0 < \mu(E) < \infty$. В силу (1.1) и Лемм 5 и 6, существует некоторое t такое, что для всех J и всех $K \in Z \cup \{+\infty\}$

$$\left\|\sum_{0\le j\le J-1}\sum_{k\in Z}\psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(\cdot) + \sum_{k\le K}\psi_{J,k}(t)\psi_{J,k}(\cdot)\right\|_1 \le C, \tag{3.9}$$

и кроме того, для каждого j точка t принадлежит конечному числу множеств $E_{j,k}$, и t принадлежит бесконечному числу $E_{j,k}$. Выберем наименьшее J, для которого

$$\mathrm{card}\left\{(j,k) : j \le J, \quad k \in Z,\ t \in E_{j,k}\right\} > \frac{1}{\delta}.$$

Далее, пусть $K \in Z$ такое, что

$$\mathrm{card}(I_{J,K}) = \left[\frac{1}{\delta}\right], \tag{3.10}$$

где

$$I^0_{J,K} = \left\{(j,k) : 0 \le j < J \text{ или } j = J \text{ и } k < K\right\} \tag{3.11}$$

и

$$I_{J,K} = \{(j,k) : (j,k) \in I^0_{J,K} \text{ и } t \in E_{j,k}\}.$$

Рассмотрим сумму

$$F_1(x) = \sum_{(j,k)\in I^0_{J,K}} \psi_{j,k}(t)\psi_{j,k}(x) = \sum_{(j,k)\in I^0_{J,K}} \psi(2^j t - k)\psi^{(1)}_{j,k}(x) \equiv \sum_{(j,k)\in I^0_{J,K}} a_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(x). \tag{3.12}$$

Из формул (2.17), (3.8) и (3.10) следует, что

$$\operatorname{card}\left\{(j,k): \left||a_{j,k}|-A\right|<\delta\right\}=\left[\frac{1}{\delta}\right]. \tag{3.13}$$

Поскольку $||F_1||_1 \leq C$ (см. (3.9), (3.12) и (3.11)) и $\{\psi^{(1)}_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ является квази-гриди базисом с квази-гриди базисной постоянной C_1, то

$$\left\|\sum_{(j,k)\in I_{J,K}} a_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(x)\right\|_1=\left\|\sum_{A-\delta<|a_{j,k}|<A+\delta} a_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}\right\|_1 \leq C_1C. \tag{3.14}$$

Для $(j,k)\in I_{J,K}$, обозначим $b_{j,k}=A\operatorname{sign}(a_{j,k})$. Тогда в силу (3.13) и (3.14) для

$$F_2(x)=\sum_{(j,k)\in I_{J,K}} b_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(x)$$

имеем

$$||F_2||_1\leq C_1C+||\psi||_1=C_2. \tag{3.15}$$

Возможны два случая :

1) существует такое $j_0\in[0;J]$, что $card\{k:(j_0,k)\in I_{J,K}\}\geq\left[1/\sqrt{\delta}\right]$;

2) $card\{j:$ существует k, для которого $(j,k)\in I_{J,K}\}\geq\left[1/\sqrt{\delta}\right]$.

Покажем, что в обеих случаях существует $D\subset I_{J,K}$ такое, что

$$\left\|\sum_{(j,k)\in D} b_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(\cdot)\right\|_1\geq C_\psi\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right], \tag{3.16}$$

где C_ψ зависит только от ψ и A. При достаточно малых δ, (3.15) и (3.16) доказывают, что система $\{\psi^{(1)}_{j,k}\}$ не является квази-гриди базисом (см. (3.6)).

Возвращаясь к доказательству формулы (3.16), сначала рассмотрим случай 1). Не умаляя общности, допустим, что $j_0=0$. Поскольку $\psi\in L^1(R)$, то существует некоторое число $p\in N$ такое, что

$$\int_{|t|>2^p}|\psi(t)|\,dt<\frac{1}{3}\int_{-2^p}^{2^p}|\psi(t)|\,dt. \tag{3.17}$$

Можно выбрать подмножество $D_2\subset\{k:(0,k)\in I_{J,K}\}$ так, чтобы

$$|k_1-k_2|\geq 2^{p+1}\quad \text{если}\quad k_1,k_2\in D_2\quad \text{и}\quad k_1\neq k_2 \tag{3.18}$$

и

$$card(D)\geq 2^{-p-1}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]. \tag{3.19}$$

Обозначим $D = \{(0,k) : k \in D_2\}$. Тогда в силу (3.17) - (3.19) имеем

$$\left\| \sum_{(j,k)\in D} b_{j,k}\psi^{(1)}_{j,k}(\cdot)\right\|_1 \geq \sum_{k\in D_2}\int_{k-2^p}^{k+2^p}\left|\sum_{(0,m)\in D} b_{0,m}\psi(t-m)\right| dt \geq$$

$$\geq \sum_{k\in D_2}\left(\int_{k-2^p}^{k+2^p}|b_{0,k}\psi(t-k)|\,dt - \sum_{m\neq k,(0,m)\in D}\int_{k-2^p}^{k+2^p}|b_{0,m}\psi(t-m)|\,dt\right) \geq$$

$$\geq \sum_{k\in D_2} A\left(\int_{-2^p}^{2^p}|\psi(t)|\,dt - \int_{|t|>2^p}|\psi(t)|\,dt\right) \geq$$

$$\geq A\cdot 2^{-p-2}\int|\psi(t)|\,dt\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right] \geq C_\psi\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right].$$

Теперь рассмотрим случай 2). Существует подмножество

$$D_2 \subset \left\{ j: \text{ существует некоторое } k, \text{ для которого } (j,k)\in I_{J,K}\right\},$$

удовлетворяющее условиям

$$\text{если} \quad j_1, j_2 \in D_2 \quad \text{и} \quad j_1 \neq j_2, \quad \text{то} \quad |j_1 - j_2| \geq q,$$

$$card(D_2) \geq \frac{1}{q}\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right], \tag{3.20}$$

где q - некоторое натуральное число, которое выберем позже.

Для каждого $j_i \in D_2$ выберем одно k_i для которого $(j_i, k_i) \in I_{J,K}$ и обозначим множество таких пар через D. Рассмотрим сумму

$$F_3(x) = \sum_{i=1}^{m} b_{j_i,k_i}\psi_{j_i,k_i}(x), \quad m = card(D_2).$$

Обозначим

$$B_i = \left[2^{-j_i}(k_i - 2^p); 2^{-j_i}(k_i + 2^p)\right], \tag{3.21}$$

где число p определяется из (3.17). Тогда

$$\|F_3\|_1 \geq \sum_{\nu=1}^{m}\int_{B_\nu\setminus\bigcup_{i=\nu+1}^m B_i}\left|\sum_{i=1}^m b_{j_i,k_i}\psi_{j_i,k_i}(t)\right| dt \geq$$

$$\geq |A|\sum_{\nu=1}^{m}\left(\int_{B_\nu\setminus\bigcup_{i=\nu+1}^m B_i}|\psi_{j_\nu,k_\nu}(t)|\,dt - \int_{B_\nu\setminus\bigcup_{i=\nu+1}^m B_i}\sum_{i\neq\nu}|\psi_{j_i,k_i}(t)|\,dt\right) =$$

$$= |A| \sum_{\nu=1}^{m} (d_\nu - e_\nu). \tag{3.22}$$

Произведя замену переменной, для d_ν получим (см. (3.17), (3.21))

$$d_\nu = \int_{[-2^p;2^p]\setminus B'_\nu} |\psi(t)|\, dt > \frac{3}{4}\|\psi\|_1 - \int_{B'_\nu} |\psi(t)|\, dt,$$

где B'_ν - некоторое множество с $\mu(B'_\nu) < 2^{p-q+1}$. Из интегрируемости ψ следует, что существует некоторое число q, зависящее только от ψ такое, что

$$d_\nu > \frac{2}{3}\|\psi\|_1.$$

Следовательно,

$$\sum_{\nu=1}^{m} d_\nu \geq \frac{2m}{3}\|\psi\|_1. \tag{3.23}$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{\nu=1}^{m} e_\nu \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{R\setminus B_i} |\psi_{j_i,k_i}(t)|\, dt + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\bigcup_{\nu=i+1}^{m} B_\nu} |\psi_{j_i,k_i}(t)|\, dt. \tag{3.24}$$

Аналогично, из (3.23) и (3.24) получим

$$\sum_{\nu=1}^{m} e_\nu \leq \frac{m}{3}\|\psi\|_1. \tag{3.25}$$

Из (3.20), (3.22), (3.23) и (3.25) следует

$$\|F_3\|_1 \geq C_\psi \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right].$$

Замечание 2 доказано.

Abstract. Any complete orthonormal system generated by an integrable wavelet that is a basis sequence in $L_1(R)$ is not a quasi-greedy basis in $L_1(R)$. The classical Franklin system is not a quasi-greedy basis in $L_1[0;1]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1 – 15, 1999.
2. P. Wojtaszczyk, "Greedy algorithm for general systems", J. Approx. Theory, vol. 107, pp. 293 – 314, 2000.

3. S. J. Dilworth, N. J. Kalton, D. Kutzarova, "On the existence of almost greedy bases in Banach spaces", Studia Math., vol. 159, pp. 67 – 101, 2003.
4. Y. Meyer, Wavelets and Operators, Cambridge Univ. Press, 1992.
5. P. Wojtaszczyk, "Wavelets as unconditional bases in $L_p(R)$", J. Fourier Analysis and Appl., vol. 5, no. 1, pp. 73 – 85, 1999.
6. S. E. Kelly, M. A. Kon, L. A. Raphael, "Local convergence for wavelet expansions", J. Func. Analysis, vol. 126, pp. 102 – 138, 1994.
7. P. Wojtaszczyk, "Greedy type bases in Banach spaces", Constructive Theory of Functions, DARBA, Sofia, pp. 136 – 155, 2003.
8. S. Gogyan, "Greedy algorithm with regard to Haar subsystems", East J. on Approx., vol. 11, pp. 221 – 236, 2005.
9. Z. Ciesielski, P. Simon, P. Sjölin, "Equivalence of Haar and Franklin bases in L_p spaces", Studia Math. vol. 60, pp. 195 – 210, 1977.
10. G. G. Gevorkyan, B. Wolnik, "Square functions for wavelet type systems", Bull. Pol. Acad. Sci., vol. 46, no. 2, pp. 155 – 172, 1998.
11. P. Sjölin, "The Haar and Franklin systems are not equivalent bases in L^1", Bull. Acad. Polon. Sci., Sr. Sci. Math. Astronom. Phys., vol. 25, no. 11, pp. 1099 – 1100, 1977.
12. P. Bechler, "Inequivalence of wavelet systems in $L_1(R^d)$ and $BV(R^d)$", Bull. Pol. Acad. Sci. Math., vol. 53, pp. 25 – 37, 2005.
13. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system II", Studia Math., vol. 27, pp. 289 – 323, 1966.
14. Г. Г. Геворкян, "Неограниченность оператора сдвига по системе Франклина в пространстве L^1", Мат. Заметки, том 38, № 4, стр. 523 – 533, 1985.
15. Z. Ciesielski, "Properties of the orthonormal Franklin system", Studia Math., vol. 23, pp. 141 – 157, 1963.

Поступила 10 января 2005