Известия НАН Армении. Математика, 39, № 6, *2004, 77–90*

БЫСТРАЯ АППРОКСИМАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ И ЛЕБЕГА

С. В. Самарчян

Ереванский государственный университет
E-mail : samarchyan@yahoo.com

Резюме. В настоящей работе изучена быстрая аппроксимация функций пространств Харди и Лебега классическими линейными многообразиями. Получены аналитические описания подклассов этих пространств, аппроксимируемых некоторыми классическими системами быстрее скорости геометрической прогрессии.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с 1930-ых годов, когда А. Н. Колмогоров [1] предложил в качестве средств аппроксимации рассматривать всевозможные линейные многообразия заданной конечной размерности, одной из центральных задач в теории конструктивной аппроксимации остается вопрос нахождения некоторой системы функций $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, конечные линейные комбинации которых хорошо аппроксимируют функции наперед заданного класса (см. [2], гл. 13–14, [3] и [4]).

В задачах, рассмотренных в настоящей работе, основным вопросом является сравнение скорости этой аппроксимации со скоростью геометрической прогрессии.

Задача 1. Требуется построить систему функций $e_k : E \to \mathbb{C}$, $E \subset [0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$ так, чтобы для каждой функции $f \in H^\infty$ существовала последовательность полиномов $\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k(x)$ такая, что

$$\sqrt[n]{\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k(x) \right|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x \in E. \tag{1}$$

При выполнении условия (1) будем говорить, что система $e_k : E \to \mathbb{C}$, $E \subset [0,1)$, $k = 1, 2, \ldots$ аппроксимирует функции класса H^∞ быстрее скорости геометрической прогрессии.

Например, если $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – система Хаара или Франклина, или тригонометрическая система $\{e^{2\pi ikx}\}_{k=-\infty}^\infty$, или система $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ на отрезке $E = [0,1)$, то условие (1) не выполняется. Особый интерес представляет случай $e_k = x^k$, $k = 0, 1, \ldots$ на "узких" множествах E.

Пусть $\gamma(E)$ – логарифмическая емкость множества E (см., например, [2], стр. 603).

Теорема 1. *Пусть $E \subset [0,1)$ – компактное множество. Для того, чтобы каждой функции $f \in H^\infty$ соответствовала последовательность полиномов $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$, удовлетворяющая условию*

$$\sqrt[n]{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \right|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad x \in E,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\gamma(E) = 0$.

Задача 2. Пусть D – некоторое подмножество открытой левой полуплоскости и пусть $F = L^2(0,\infty) \cap \Im$, где $\Im$ – класс целых функций экспоненциального типа, индикаторные диаграммы которых лежат в D. Требуется построить систему функций $e_k \in L^2(0,\infty)$, $k = 1, 2, \ldots$ так, чтобы для каждой функции $f \in F$ существовала последовательность полиномов $\sum_{k=1}^n a_k^{(n)} e_k$ такая, что

$$\sqrt[n]{\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k \right\|_{L^2(0,\infty)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

В случае, когда $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ – система из экспонент, аппроксимация со скоростью геометрический прогрессии обеспечена теоремой В. Х. Мусояна [5]. С другой стороны, в работе [6] показано, что аппроксимация экспонентами быстрее скорости геометрической прогрессии невозможна, если D имеет положительную меру. В настоящей работе получено, что если D – компактное множество положительной логарифмической емкости, то результат [6] остается в силе.

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность различных комплексных чисел, выбранных из некоторого компактного подмножества открытой правой полуплоскости, D – компактное множество положительной логарифмической* *емкости из открытой левой полуплоскости и* $-\overline{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\overline{\lambda} \in D\}$. *Тогда для некоторого* $\lambda \in (-\overline{D})$ *функция* $f_\lambda(z) = e^{-\lambda z}$ *удовлетворяет условию*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f_\lambda)} > 0,$$

где

$$E_n(f) = \inf_{P \in H_n} \|f - P\|_{L^2(0,\infty)}, \quad H_n = \left\{ P : P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-\lambda_k x} \right\}.$$

§1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим вопрос описания класса функций, аппроксимируемых конечными линейными комбинациями системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ со скоростью быстрее скорости геометрической прогрессии.

Пусть X – локально выпуклое топологическое векторное пространство с топологией, индуцированой разделяющим семейством полунорм $\{p\}$. Далее, пусть $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ – бесконечная треугольная матрица векторов из X, L_n – линейная оболочка конечной системы $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$, a $q \in (0, \infty)$.

Определение 1. Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется *q-ограниченной снизу*, если для любой последовательности полинимов $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k^{(n)} \in L_n$ имеет место неравенство

$$\sup_{p\in\{p\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p(P_n)} \ge q \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\le k\le n} |a_k^{(n)}|}.$$

Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется 0-ограниченной снизу, если она q-ограничена снизу для некоторого $q \in (0, \infty)$.

Определение 2. Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется *q-ограниченной сверху*, если

$$\sup_{p\in\{p\}} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\le k\le n} p(e_k^{(n)})} \le q.$$

Матрица $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ называется ∞-ограниченной сверху, если она q-ограничена сверху для некоторого $q \in (0, \infty)$.

Систему $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем отождествлять с бесконечной треугольной матрицей $(e_k^{(n)})_{k\le n}$, n-ая строка которой состоит из первых n членов системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 3. *Пусть система* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *0-ограничена снизу и* ∞*-ограничена сверху. Для функции* $f \in X$ *существует последовательность полиномов* $P_n =$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{(n)} e_k$, *удовлетворяющая условию* $\sqrt[n]{p(f - P_n)} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *для всех полунорм* $p \in \{p\}$, *тогда и только тогда, когда в топологии* X *имеет место представление*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad \text{где} \quad \sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Легко заметить, что ортонормальная система в гильбертовом пространстве 1-ограничена снизу и 1-ограничена сверху. Для биортогональных систем справедлива

Теорема 4. *Если системы* $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *и* $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *биортогональны при всех* $n \in \mathbb{N}$, *и матрица* $(\varphi_k^{(n)})_{k\le n}$ q*-ограничена сверху в нормированном пространстве* Y, *то матрица* $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ $1/q$*-ограничена снизу в сопряженном пространстве* Y^*.

Обратное утверждение неверно. Это можно легко проверить в гильбертовом пространстве на примере ортонормальной системы $e_k^{(n)} = e_k$, $n = 1, 2, \ldots$, $k \le n$, используя большой произвол выбора биортогональной матрицы $(\varphi_k^{(n)})_{k\le n}$. Но если в гильбертовом пространстве потребовать, чтобы линейные оболочки систем $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ совпадали для всех $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ и $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ порождали друг друга (см. [7]), то получим также обратный результат.

Теорема 4А. *Пусть* $\{\varphi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *и* $\{e_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ *– порожденные биортогональные системы в гильбертовом пространстве* H *при всех* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда матрица* $(\varphi_k^{(n)})_{k\le n}$ q*-ограничена сверху тогда и только тогда, когда матрица* $(e_k^{(n)})_{k\le n}$ $1/q$*-ограничена снизу.*

В работах [7] – [10] В. Х. Мусояном и М. С. Мартиросяном получены явные представления порожденных биортогональных систем для экспонент и простейших рациональных дробей в пространствах Лебега $L^p(0,\infty)$ и Харди H^p, H_+^p $(1 < p < \infty)$. В результате получаем эффективное приложение теоремы 4.

Пусть $\Lambda(K)$ есть множество бесконечных треугольных матриц комплаксных чисел $(\lambda_{kn})_{k\le n}$, выбранных из множества $K \subset \mathbb{C}$ и

$$d(K) = \inf\{2M : K \subset \{z : |z| \le M\}\}.$$

Теорема 5. *а) Пусть* K *– компакт положительной логарифмической емкости, содержащийся в открытой правой полуплоскости. Тогда существуют матрицы* $(\mu_{kn})_{k\le n}$ *и* $(\lambda_{kn})_{k\le n} \in \Lambda(K)$ *такие, что матрица* $(e^{-\mu_{kn}x})_{k\le n}$ *не* 0*-ограничена снизу, а* $(e^{-\lambda_{kn}x})_{k\le n}$ *является* $\left(\frac{\gamma(K)}{d(K)}\right)^2$*-ограниченной снизу в пространствах* $L^p(0,\infty)$, $1 \le p \le \infty$.

b) Пусть K – компакт положительной логарифмической емкости, содержащийся в единичном круге. Тогда существуют матрицы $(\mu_{kn})_{k\le n}$ и $(\lambda_{kn})_{k\le n} \in \Lambda(K)$ такие, что матрица $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-\overline{\mu_{kn}}z}\right)_{k\le n}$ не 0-ограничена снизу, а $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-\overline{\lambda_{kn}}z}\right)_{k\le n}$ является $\gamma(K)/2$-ограниченной снизу в пространствах H^p, $1<p<\infty$.

c) Пусть K – компакт положительной логарифмической емкости, содержащийся в открытой верхней полуплоскости. Тогда существуют матрицы $(\mu_{kn})_{k\le n}$ и $(\lambda_{kn})_{k\le n} \in \Lambda(K)$ такие, что матрица $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\mu_{kn}}}\right)_{k\le n}$ не 0-ограничена снизу, а $\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-\overline{\lambda_{kn}}}\right)_{k\le n}$ является $\frac{\gamma(K)}{d(K)}$-ограниченной снизу в пространствах H^p_+, $1<p<\infty$.

d) Если в пунктах a), b) или c) дополнительно предположить, что K – самоподобная фрактальная строка (см. [11]), тогда матрицы $(\lambda_{kn})_{k\le n}$ можно заменить последовательностями $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, выбранными так, чтобы соответствующие системы были 0-ограниченными снизу.

Аналогичная задача решается для системы $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, хотя она находится вне рамок приложений Теоремы 4.

Теорема 6. *Пусть $E \subset \overline{\mathbf{D}}$ – компактное множество положительной логарифмической емкости. Тогда система функций $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является $\frac{1}{4}\gamma(E)$-ограниченной снизу в топологии точечной сходимости на E.*

Для тригонометрической системы можно провести аналогичные рассуждения, предварительно заметив, что функция $e^{2\pi i z}$ переводит самоподобную фрактальную строку отрезка $[0,1)$ на самоподобную фрактальную строку единичной окружности. Пусть $E \subset [0,1)$ и $e^{2\pi i E}$ – компактное множество положительной логарифмической емкости. Тогда система функций $\{e^{2\pi i k x},\ k=0,\pm1,\pm2\dots\}$ $\frac{1}{4}\gamma(e^{2\pi i E})$-ограничена снизу в топологии точечной сходимости на E.

Таким образом, теорему 3 можно применить ко всем рассматриваемым 0-ограниченым снизу системам. Например, применив теорему 3 к системе $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$, получим элементарное доказательство следующей классической теоремы.

Теорема (Бернштейн–Уолш). *Пусть $E \subset \overline{\mathbf{D}}$ – компактное множество положительной логарифмической емкости. Если для функции $f: E \to \mathbb{C}$ существует последовательность полиномов $\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k$ такая, что*

$$\sqrt[n]{\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} z^k\right|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad z\in E,$$

то f можно продолжить до целой функции.

Отметим также, что если в условии (1) рассматривать сходимость в смысле нижнего предела, то удовлетворяющая этому условию система существует.

Теорема 7. *Каждой функции $f \in H(\overline{\mathbf{D}})$ соответствует последовательность полиномов $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k$ такая, что*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} x^k \right|} = 0, \quad x \in [0,1].$$

§2. ОЦЕНКИ ПОЛИНОМОВ С ДАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ КОРНЕЙ

Для данной бесконечной, треугольной матрицы $(x_k^{(n)})_{k\le n} \subset \mathbb{C}$ обозначим

$$f_n(x) = \sqrt[n]{\left|x - x_1^{(n)}\right| \left|x - x_2^{(n)}\right| \cdots \left|x - x_n^{(n)}\right|}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ будем отождествлять с бесконечной треугольной матрицей $(x_k^{(n)})_{k\le n}$, n-ая строка которой состоит из первых n членов последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Лемма 1. *Пусть $E \subset \mathbb{C}$ – компактное множество. Тогда*

$$\inf_{(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n},\ n_k\uparrow\in\mathbb{N}} \ \sup_{x\in E} \overline{\lim_{k\to\infty}} f_{n_k}(x) = \gamma(E),$$

где инфимум достигается для некоторой бесконечной треугольной матрицы $(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n}$ и последовательности $n_k = k$.

Доказательство : Существование бесконечной треугольной матрицы, удовлетворяющей условию $\sup_{x\in E} \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) \le \gamma(E)$ непосредственно следует из теоремы Фекете–Сеге (см. [2], стр. 606). Остается доказать нижнюю оценку. Допустим обратное, существует бесконечная треугольная матрица $(x_\nu^{(n)})_{\nu\le n}$ и возрастающая последовательность $n_k \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\sup_{x\in E} \overline{\lim_{k\to\infty}} f_{n_k}(x) < C < \gamma(E).$$

Обозначим $E_s = \{x \in E : f_{n_k}(x) \le C,\ k \ge s\}$. Тогда E_s являются компактами и $E_s \uparrow E$. Из определения множеств E_s имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sup_{x\in E_s} f_{n_k}(x) \le C$$

и, следовательно, $\gamma(E_s) \le C$. Но поскольку $\gamma(E_s) \uparrow \gamma(E)$, то $\gamma(E) \le C$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого полинома* $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_0 \neq 0$ *существует полином* $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^{n-k}$, $b_0 = 1$ *удовлетворяющий неравенству*

$$|P_n(x)| \geq 4^{-n} \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \cdot |Q_n(x)|, \quad x \in \overline{\mathbf{D}}.$$

Доказательство : Пусть $P_n(x_j) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, и $\max_{0 \leq j \leq n} |a_j| = |a_k|$. Тогда согласно теореме Виета

$$a_0 \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = \pm a_k \quad .$$

Не теряя общности, предположим, что в этой сумме наибольшим по модулю слагаемым является $x_1 x_2 \cdots x_k$. Тогда $C_n^k |a_0 x_1 x_2 \cdots x_k| \geq |a_k|$, поэтому

$$|a_0 x_1 x_2 \cdots x_k| \geq 2^{-n} |a_k|.$$

Предложение 1. *Существует функция* $z : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$, *удовлетворяющая условию*

$$|x - y| \geq \frac{|y|}{2} |x - z(y)|, \quad x \in \overline{\mathbf{D}}, \quad y \in \mathbb{C}.$$

Доказательство : Достаточно выбрать

$$z(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq 2, \\ 0, & |y| > 2. \end{cases}$$

Откуда получим

$$|P_n(x)| = |a_0| \prod_{i=1}^{k} |x - x_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i| \geq 2^{-k} \left| a_0 \prod_{i=1}^{k} x_i \right| \prod_{i=1}^{k} |x - y_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i| \geq$$

$$\geq 4^{-n} |a_k| \prod_{i=1}^{k} |x - y_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i|,$$

где $y_i = z(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Остается выбрать

$$Q_n(x) = \prod_{i=1}^{k} |x - y_i| \prod_{i=k+1}^{n} |x - x_i|.$$

Лемма 2 доказана.

Предложение 2. *Пусть $\pi_n[a,b]$ – количество точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, попавших в отрезок $[a,b]$. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что для любого отрезка $[a,b] \subset [0,1]$ имеем*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\pi_n[a,b]}{n} = 1.$$

Доказательство : Построим последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ так, чтобы при любом $m = 0,1,2,\ldots$ конечная последовательность $y_1, y_2, \ldots, y_{2^m+1}$ являлась множеством точек деления отрезка $[0,1]$ на 2^m равных частей. Выберем $x_k = y_i$, где $i! \le k < (i+1)!$, $i = 1,2,\ldots$. Пусть $[a,b] \subset [0,1]$. Тогда для любого $i_0 \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $i > i_0$ такое, что $y_i \in [a,b]$ и, следовательно, $x_k \in [a,b]$, $i! \le k < (i+1)!$. Таким образом,

$$\frac{\pi_{(i+1)!}[a,b]}{(i+1)!} \ge \frac{(i+1)! - i!}{(i+1)!} = \frac{i}{i+1},$$

и доказательство завершено.

Лемма 3. *Существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0,1]$ такая, что*

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = 0, \quad x \in [0,1].$$

Доказательство : Выберем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию предложения 2. Для любой точки $x \in [0,1]$ и любого отрезка $[a,b]$, содержащего точку x, имеем

$$f_n(x) = \sqrt[n]{|x-x_1||x-x_2|\cdots|x-x_n|} \le (b-a)^{\frac{1}{n}\pi_n[a,b]}.$$

Следовательно, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) \le b-a$. Поэтому $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = 0$, $x \in [0,1]$.

§3. 0-ОГРАНИЧЕННЫЕ СНИЗУ СИСТЕМЫ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3

Доказательство теоремы 3. Неоходимость. При фиксированном k рассмотрим числовой ряд

$$a_k^{(k)} + \left(a_k^{(k+1)} - a_k^{(k)}\right) + \left(a_k^{(k+2)} - a_k^{(k+1)}\right) + \cdots. \tag{3}$$

Так как для любой полунормы $p \in \{p\}$ выполняется

$$\sqrt[n]{p(P_n - P_{n-1})} \le \sqrt[n]{p(P_n - f)} + \sqrt[n]{p(f - P_{n-1})} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

и система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ 0-ограничена снизу, то

$$\sqrt[n]{\max\left\{\left|a_j^{(n)}-a_j^{(n-1)}\right|,\, \left|a_n^{(n)}\right| : j=1,\dots,n-1\right\}} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Тогда для любого положительного числа $\varepsilon < 1$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\max\left\{\left|a_j^{(n)}-a_j^{(n-1)}\right|,\, \left|a_n^{(n)}\right| : j=1,\dots,n-1\right\} \le 2^{-n}\varepsilon^n, \quad n \ge n_0, \tag{4}$$

поэтому ряд (3) абсолютно сходится к сумме $c_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_k^{(n)}$. Согласно оценке (4) имеем

$$|c_k| \le \left|a_k^{(k)}\right| + \sum_{n=k}^{\infty}\left|a_k^{(n+1)}-a_k^{(n)}\right| \le \frac{\varepsilon^k}{2^k} + \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\varepsilon^{n+1}}{2^{n+1}} \le 2\,\frac{\varepsilon^k}{2^k}, \quad k \ge n_0.$$

Следовательно, $\sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 0$.

Пусть $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Достаточно показать, что $P_n - Q_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Зафиксируем полунорму $p \in \{p\}$. В силу ∞-ограниченности сверху системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует константа M, удовлетворяющая условию $p(e_k) \le M^k$. Не теряя общности предположим, что $M > 1$ и выберем $\varepsilon < 1/M$. Тогда, учитывая (4), при $n \ge n_0$ имеем

$$p(Q_n - P_n) \le \sum_{k=1}^{n}\left|c_k - a_k^{(n)}\right| p(e_k) = \sum_{k=1}^{n}\left|\sum_{i=n}^{\infty}\left(a_k^{(i+1)} - a_k^{(i)}\right)\right| M^k \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\varepsilon^{i+1}}{2^{i+1}}\right) M^k \le n\left(\frac{\varepsilon M}{2}\right)^n \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Достаточность. Выберем $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$. Тогда для любой полунормы $p \in \{p\}$ имеем

$$\sqrt[n]{p(f-P_n)} \le \sqrt[n]{\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k| p(e_k)} \le \sqrt[n]{\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k| M^k} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Теорема 3 доказана.

§4. ПРИМЕРЫ 0-ОГРАНИЧЕННЫХ СНИЗУ СИСТЕМ, ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 4, 4А, 5 И 6

Доказательство теоеремы 4. Пусть $X = Y^*$ и $P_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)}$. Тогда

$$\sqrt[n]{\|P_n\|_X} = \sqrt[n]{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)}\right\|_X} = \sqrt[n]{\sup_{\|y\|_Y=1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)},\, y\right)},$$

и, следовательно,

$$\sqrt[n]{\|P_n\|_X} \geq \max_{1\leq k\leq n} \sqrt[n]{\left|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)} e_i^{(n)},\ \frac{\varphi_k^{(n)}}{\max\limits_{1\leq k\leq n} \|\varphi_k^{(n)}\|_Y}\right)\right|} = \frac{\sqrt[n]{\max\limits_{1\leq k\leq n} |a_k^{(n)}|}}{\sqrt[n]{\max\limits_{1\leq k\leq n} \|\varphi_k^{(n)}\|_Y}}.$$

Доказательство теоремы 4А. Пусть

$$\max_{1\leq k\leq n} \|\varphi_k^{(n)}\| = \|\varphi_{j_n}^{(n)}\|, \quad \varphi_{j_n}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} e_k^{(n)}.$$

Тогда

$$\left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n} \|\varphi_k^{(n)}\|}\right]^2 = \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|\varphi_{j_n}^{(n)}\|}\right]^2 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|\varphi_{j_n}^{(n)}\|^2} =$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\varphi_{j_n}^{(n)}, \varphi_{j_n}^{(n)}\right)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left(\varphi_{j_n}^{(n)}, \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} e_k^{(n)}\right)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_{j_n}^{(n)}|} \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n} |c_k^{(n)}|} \leq q\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|\varphi_{j_n}^{(n)}\|} = q\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\max_{1\leq k\leq n} \|\varphi_k^{(n)}\|}.$$

Доказательство теоремы 5. Покажем, что существуют 0-ограниченные снизу матрицы из экспонент и рациональных функций.

Используя теорему Фекете–Сеге, нетрудно убедиться, что существует бесконечная треугольная матрица комплексных чисел $(\lambda_{kn})_{k\leq n} \in \Lambda(K)$, удовлетворяющая условиям $\lambda_{in} \neq \lambda_{jn}$ $(1 \leq i < j \leq n)$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\min_{1\leq m\leq n} \prod_{k=1,\, k\neq m}^{n} |\lambda_{kn} - \lambda_{mn}|} \geq \gamma(K). \tag{5}$$

В силу теоремы 4, q-ограниченность снизу доказывается проверкой $\frac{1}{q}$-ограниченности сверху соответствующих биортогональных систем.

а) Пусть

$$\varphi_k^{(n)}(x) = \frac{1}{B_n'(\lambda_{kn})} \sum_{m=1}^{n} \frac{e^{-\lambda_{mn} x}}{B_n'(\lambda_{mn})(\lambda_{mn} + \overline{\lambda_{kn}})},$$

где

$$B_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_{in}}{\lambda + \overline{\lambda_{in}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда системы $\left\{e^{-\lambda_{kn}x}\right\}_{k=1}^{n}$ и $\left\{\varphi_k^{(n)}(x)\right\}_{k=1}^{n}$ биортогональны при $n=1,2,\ldots$ (см. [7]). Имеем

$$\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q \le Mn\left(\max_{1\le m\le n}\frac{1}{|B_n'(\lambda_{mn})|}\right)^2, \quad k=1,2,\ldots,n,$$

где $\|\cdot\|_q$ – норма пространства $L^q(0,\infty)$, $1\le q\le\infty$, а M – некоторая константа, независящая от n. В силу оценки (5) получаем

$$\varliminf_{n\to\infty}\min_{1\le m\le n}\sqrt[n]{|B_n'(\lambda_{mn})|}=\varliminf_{n\to\infty}\min_{1\le m\le n}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1,\,k\ne m}^{n}|\lambda_{kn}-\lambda_{mn}|}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}|\overline{\lambda_{kn}}+\lambda_{mn}|}}\ge\frac{\gamma(K)}{d(K)},$$

и, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\max_{1\le k\le n}\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q}\le\left(\frac{d(K)}{\gamma(K)}\right)^2.$$

b) Пусть

$$\varphi_k^{(n)}(z)=\frac{B_n(z)}{2\pi}\frac{1}{B_n'(\lambda_{kn})(\lambda_{kn}-z)},$$

где

$$B_n(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_{in}-\lambda}{1-\overline{\lambda_{in}}\lambda}, \quad k=1,2,\ldots,n.$$

Тогда системы $\left\{\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{1-\overline{\lambda_{kn}}z}\right\}_{k=1}^{n}$ и $\left\{\varphi_k^{(n)}(z)\right\}_{k=1}^{n}$ биортогональны при $n=1,2,\ldots$ (см. [9]). Имеем

$$\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q\le M\max_{1\le m\le n}\frac{1}{|B_n'(\lambda_{mn})|}, \quad k=1,\ldots,n,$$

где $\|\cdot\|_q$ – норма пространства H^q, $1<q<\infty$, а M – константа, независящая от n. В силу оценки (5) получим

$$\varliminf_{n\to\infty}\min_{1\le m\le n}\sqrt[n]{|B_n'(\lambda_{mn})|}=\varliminf_{n\to\infty}\min_{1\le m\le n}\frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1,\,k\ne m}^{n}|\lambda_{kn}-\lambda_{mn}|}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}|1-\overline{\lambda_{kn}}\lambda_{mn}|}}\ge\frac{\gamma(K)}{2},$$

и, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\max_{1\le k\le n}\left\|\varphi_k^{(n)}\right\|_q}\le\frac{2}{\gamma(K)}.$$

c) Доказательство аналогично доказательству b) с использованием результатов работы [10] и

$$B_n(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_{in}}{\lambda - \overline{\lambda_{in}}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

d) Достаточно доказать, что если K – самоподобная фрактальная строка, то существует последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Lambda(K)$ такая, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\min_{1\le m\le n} \prod_{k=1,\, k\ne m}^{n} |\lambda_k - \lambda_m|} > 0. \tag{6}$$

Справедливость (6) легко проверяется, когда K – отрезок. Для этого достаточно выбрать $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы при любом $m = 0, 1, 2, \ldots$ конечная последовательность $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2^m+1}$ являлась множеством точек деления данного отрезка на 2^m равных частей. Общий же случай сводится к этому случаю с помощью сюръективного отображения самоподобной фрактальной строки на отрезок, удовлетворяющего условию Липшица с показателем $\alpha \in (0, 1]$. Для простоты изложения докажем существование такого отображения на примере множества Кантора.

Построим сюръективное отображение $\psi : E \longmapsto [0, 1]$ аналогично построению, приведенному в [12] (пример 23, стр. 131-132). Если $x, y \in E$ и I – наименьший канторовый отрезок, содержащий обе точки x и y, то длина отрезка I равна 3^{-n} для некоторого $n \in \mathbb{N}$, а точки $\psi(x)$ и $\psi(y)$ принадлежат интервалу длины 2^{-n}. Следовательно,

$$|\psi(x) - \psi(y)| \le \frac{1}{2^n} = 2\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right)^{\log_3 2} \le 2|x - y|^{\log_3 2}.$$

Заметим, что равномерная распределенность точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ еще не является гарантом 0-ограниченности снизу соответствующей системы.

Теперь построим примеры систем из экспонент и рациональных функций с равномерно распределенной последовательностью $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, но не являющихся 0-ограниченными снизу.

a) Пусть $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ $(\lambda_1 = 1)$ – последовательность различных действительных чисел, равномерно распределенная в отрезке $[1, 2]$. Пусть $\pi_n(a, b) = card\, \{\lambda_k\}_{k=1}^{n} \cap [a, b)$, где $[a, b) \subset [1, 2)$. Тогда (см., например, [13], стр. 116)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi_n(a, b)}{n} = b - a.$$

Рассмотрим новую последоватеьность $\{\lambda_k^*\}_{k=1}^{\infty}$, отличающуюся от $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ лишь при индексах из множества $S := \{2^m / m \in N\}$ подстановкой $\lambda_{2^m}^* = 1 + \left(\frac{1}{2^m}\right)^{2^m}$. Эта последовательность также будет равномерно распределена в отрезке $[1, 2]$.

Пусть $P_n(x)$ - следующая последовательность полиномов из экспонент : $P_n(x) = 0$ при $n \notin S$ и $P_{2^m}(x) = e^{-\lambda_1^* x} - e^{-\lambda_{2^m}^* x}$, $m = 1, 2, \ldots$ Тогда

$$\sqrt[n]{\|P_n\|_p} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Но так как каждый из полиномов P_{2^m} содержит коэффициент, равный единице, то система $\{e^{-\lambda_k^* x}\}_{k=1}^{\infty}$ не является 0-ограниченной снизу в пространствах $L^p(0, \infty)$, $1 \le p \le \infty$.

Аналогичные примеры строятся в случаях b) и c).

Доказательство теоремы 6. Достаточно заметить, что согласно леммам 1 и 2 система $\{z^k\}_{k=0}^{\infty}$ является $\frac{\gamma(E)}{4}$-ограниченной снизу.

§5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ БЕРНШТЕЙНА–УОЛША И ТЕОРЕМ 1, 2, 7

Доказательство теоремы Бернштейна–Уолша. Так как из теорем 3 и 6 следует, что $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ на множестве E, и $\sqrt[k]{|c_k|} \underset{k\to\infty}{\to} 0$, то f продолжима до целой функции.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Сразу вытекает из теоремы Бернштейна–Уолша и теоремы единственности аналитических функций.

Достаточность. В силу леммы 1 можно построить матрицу $(x_\nu^{(n)})_{\nu \le n}$ точек множества E так, чтобы иметь

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|x - x_1^{(n)}\right|\left|x - x_2^{(n)}\right| \cdots \left|x - x_n^{(n)}\right|} = 0, \quad x \in E.$$

Возьмем в качестве $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} x^k$ интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in H^\infty$ с узлами интерполяции $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$. Остается заметить, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} x^k \right| \le \frac{M_n}{n!} \left| \left(x - x_1^{(n)}\right) \left(x - x_2^{(n)}\right) \cdots \left(x - x_n^{(n)}\right) \right|, \quad x \in [0, a],$$

где $a = \max\{x : x \in E\}$, а $M_n = \max_{x\in[0,a]} \left|f^{(n)}(x)\right|$ (см., например, [14], стр. 494-495).

Доказательство теоремы 2. Достаточно воспользоваться леммой 1 в доказательстве теоремы 2.1 работы [6].

Доказательство теоремы 7. Достаточно воспользоваться леммой 3 и рассуждениями, приведенными при доказательстве достаточности теоремы 1.

Автор благодарен профессорам В. Х. Мусояну и Г. Г. Геворкяну за консультации.

Abstract. The paper investigates fast approximation of functions from the Hardy and Lebesgue spaces by classical linear varieties. Some subclasses of these spaces, which may be approximated by several classical systems faster than the rate of the geometric progression, are analytically described.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. N. Kolmogorov, "Ueber die beste Annaherung von Funktionen einer gegebenen Funktionenklasse", Ann. of Math., vol. 37, pp. 107 – 110, 1936.
2. G. G. Lorentz, M. V. Golitschek, Y. Makovoz, Constructive Approximation : Advanced Problems, Springer Verlag, Berlin, 1996.
3. V. N. Temlyakov, "Nonlinear Kolmogorov's widths", Matem. Zametki, vol. 63, pp. 891 – 902, 1998.
4. L. Baratchart, V. A. Prokhorov, E. B. Saff, "On Blaschke products associated with n-widths" (submitted in J. of Approx. Theory).
5. В. Х. Мусоян, "О скорости приближения целых функций полной системой Дирихле", АН СССР, Мат. заметки, том 36, № 6, стр. 857 – 863, 1984.
6. М. С. Мартиросян, С. В. Самарчян, "О скорости аппроксимации целых функций системой экспонент с ограниченной последовательностью показателей" (в печати).
7. В. Х. Мусоян, "Экстремальные свойства полиномов Дирихле" Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 18, № 4, стр. 253 – 270, 1983.
8. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций" Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 21, № 2, стр. 163 – 186, 1986.
9. М. С. Мартиросян, В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполной системе рациональных функций в пространствах H^p $(1 < p < \infty)$", Изв. НАН Армении, Математика, том 32, № 5, стр. 32 – 44, 1997.
10. М. С. Мартиросян "О представлении по неполной системе рациональных функций". Изв. НАН Армении, Математика, том 32, № 6, стр. 30 – 38, 1997.
11. M. L. Lapidus, M. van Frankenhuysen, "Complex dimensions of self-similar fractal strings and Diophantine approximation", Experimental Math., vol. 12, no. 1, pp. 41 – 69, 2003.
12. Б. Гельбаум, Дж. Ольмстед, Контрпримеры в анализе, Мир, 1967.
13. К. Чандрасекхаран, Введение в аналитическую теорию чисел, Москва, 1974.
14. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Наука, Москва, 1974.

Поступила 19 Сентября 2004