Известия НАН Армении. Математика, 39, № 6, 2004, 39–55

НЕПРЕРЫВНЫЕ И ЛИПШИЦЕВЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

А. Р. Хачатрян

Ереванский государственный университет
E-mail : xfile@ freenet.am

Резюме. В статье рассматриваются непрерывные и липшицевые свойства многозначных отображений, заданных с помощью как гладких, так и негладких ограничений типа равенств. Приводится достаточное условие, при выполнении которого пересечение липшицева и выпуклового отображений будет липшицевым.

МОТИВАЦИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. В последнее время параметризованные экстремальные задачи и многозначные отображения все чаще становятся объектом исследования математиков. Это связано с необходимостью изучения таких свойств экстремальных задач, как стабильность, устойчивость и т.п. Кроме того, параметризованные экстремальные задачи возникают при применении методов штрафных функций и параметризации целевой функции, связанных с погружением исходной задачи в класс задач, аппроксимирующих исходную. И наконец, параметризованные задачи возникают и в самой теории экстремальных задач теории двойственности выпуклого и невыпуклого программирования и теории игр [4, 7, 9], и т. п.

Различные классы многозначных отображений и параметризованных экстремальных задач были рассмотрены в работах Б. Н. Пшеничного [9], Е. С. Половинкина [8], Р. Т. Рокфеллара [22], Ж-П. Обена [7], Ф. Кларка [5] и других.

Почти во всех этих работах многозначные отображения задаются с ограничениями типа неравенств, и, следоательно, имеют выпуклые образы. В результате этих исследований методом выпуклого анализа были введены различные характеристики многозначных отображений : селекторы, производные, и т. п. [16, 21]. Однако класс этих многозначных отображений либо вообще не охватывает негладкие ограничения типа равенств, либо многозначные отображения с такими ограничениями задаются линейными или гладкими функциями. Из-за сложности учета негладких ограничений типа равенств возникает необходимость применения теорем о неявных функциях (см. [10], [11]).

В настоящей работе показано, что метод шатров [2, 15] не только является общим методом получения необходимых условий экстремума в задачах с ограничениями, но и удобным аппаратом для изучения непрерывности многозначных отображений с негладкими ограничениями типа равенств. В статье при помощи метода шатров исследуются непрерывные свойства некоторых обратных отображений, которые задаюся гладкими или негладкими ограничениями типа равенства. Рассмотрен и вопрос существования гладких селекций для таких отображений.

Различные аспекты липшицевых свойств многозначных отображений рассматриваются в работах [5, 7, 9, 17, 20, 22]. В работе [9] показано, что выпуклое многозначное отображение с компактным множеством значений является липшицевым. В [22] доказано, что липшицевым будет и так называемое полиэдральное многозначное отображение. При довольно естественных предположениях в [17] показано, что мнозначное отображение вида $a(x) = \{y \in F : f(x, y) \leq 0\}$ является липшицевым. Однако такие многозначные отображения охватывают лишь узкие классы параметризованых экстремальных задач.

В настоящей статье приводится достаточное условие, при котором пересечение липшицева отображения с выпуклым отображением будет липшицевым. Рассматриваются также параметризованные задачи линейного программирования и показывается, с использованием их специфики, что маргинальное отображение в этих задачах является липшицевым сверху отображением.

2. Приведем основные обозначения и определения. Пусть X – метрическое пространство, а Y – нормированное пространство. Обозначим через $B_\varepsilon(x)$ замкнутый шар с радиусом ε и центром в точке x.

Многозначным отображением (м.о.) a из X в Y называется отображение, которое каждому $x \in X$ сопоставляет множество $a(x) \subseteq Y$, т.е. $a : X \to 2^Y$. Селекция для a определяется как однозначное отображение $y(\cdot) : X \to Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Пусть $M \subset R^n$ – выпуклое множество и $x_0 \in M$ – произвольная точка. Тогда множество $K = \{\nu : \nu = \lambda(x - x_0),\ \lambda > 0,\ x \in M\}$ называется *конусом касательных направлений* для M в точке x_0. Множество $K^* = \{\nu^* : \langle \nu^*, u\rangle \geq 0,\ u \in K\}$, где $\langle \nu^*, u\rangle$ – скалярное произведение векторов u и $\nu^* \in R^n$, называется *сопряженным конусом* к конусу K.

Обозначим через $f'(x_0, \overline{x})$ производную в точке x_0 по направлению $\overline{x}$, а через $\partial f(x_0)$ – субдифференциал выпуклой, непрерывной функции f в точке x_0. Обозначим через $Lin\, M$ линейную оболочку множества M. Множество

$$gr\,(a) = \{(x, y) : y \in a(x)\}$$

называется *графиком многозначного отображения* a. Обратное отображение a^{-1} определяется как м.о. из Y в X по правилу $x \in a^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in a(x)$.

Выпуклый конус $K_M(x)$ называется шатром множества M в точке $x \in M$, если существует отображение r, определенное в некоторой окрестности нуля $U(0)$, такое, что $x + \overline{x} + r(\overline{x}) \in M$, если $\overline{x} \subset K_M(x) \cap U(0)$ и $\frac{r(\overline{x})}{\|\overline{x}\|} \to 0$, при $\overline{x} \to 0$ (см. [2]).

Шатер называется гладким, липшицевым или непрерывным, если соответствующими свойствами обладает отображение r.

Напомним некоторые свойства из [4].

Определение 1. Скажем, что м.о. a является H-полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x_0) \subset a(x) + B_\varepsilon(0)$, $\forall x \in U(x_0)$.

Определение 2. Скажем, что м.о. a является H-полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \subset a(x_0) + B_\varepsilon(0)$, $\forall x \in U(x_0)$.

М.о. a называется непрерывным в точке x_0, если оно одновременно H-п.н.св. и H-п.н.сн. в этой точке.

Определение 3. М.о. a называется K-полунепрерывным снизу (п.н.сн.) в точке $x_0 \in X$, если для любой $y_0 \in a(x_0)$ и любой последовательности $\{x_j\}$ такой, что $x_j \to x_0$ при $j \to \infty$, найдутся $y_j \in a(x_j)$ такие, что $y_j \to y_0$ при $j \to \infty$.

Определение 4. М.о. a называется K-полунепрерывным сверху (п.н.св.) в точке $x_0 \in X$, если из того, что $x_j \to x_0$, $\nu_j \in a(x_j)$, $\nu_j \to \nu_0$ следует, что $\nu_0 \in a(x_0)$. М.о. a называется K-непрерывным в точке $x_0 \in X$ если оно одновременно K-п.н.св. и K-п.н.сн.в этой точке.

Определение 5. [7] Скажем, что м.о. a удовлетворяет условию Липшица на множестве $E \subseteq X$, если существует число $L > 0$ такое, что $a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, $\forall x_1, x_2 \in E$.

§ 1. О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Ниже приводятся некоторые достаточные условия, при выполнении которых K-непрерывные многозначные отображения с выпуклыми значениями будут H-непрерывными. Результат теоремы 1.1 существенным образом используется в параграфе 3 при исследовании липшицевых свойств маргинальных отображений в линейных параметризованных задачах оптимизации.

Теорема 1.1. *Пусть $a : R^n \to 2^{R^m}$ есть K-непрерывное в $x_0 \in X$ отображение с выпуклыми замкнутыми значениями. Пусть, далее, $\operatorname{int} a(x_0) \neq \emptyset$ и множество $a(x_0)$ ограничено. Тогда отображение a будет H-непрерывным в x_0.*

Доказательство : Пусть $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$ – произвольная фиксированная точка. Так как отображение a – K-п.н.сн., и, следовательно, (см. теорему 5.9, работы [22], стр. 155) существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $y_0 \in a(x)$, $\forall x \in U(x_0)$. Покажем, что отображение a ограничено в некоторой окрестности x_0. Допустим, что это не так. Тогда существуют некоторые последовательности $x_j \to x_0$ и $y_j \in a(x_j)$ такие, что $\|y_j\| \to \infty$. Положим $h_j = \frac{y_j - y_0}{\|y_j - y_0\|}$. Можно считать, что $h_j \to h_0 \neq 0$. Тогда

$$y_0 + \alpha h_0 \in a(x_0), \quad \forall \alpha \geq 0. \tag{1.1}$$

Действительно, если это не так, то существуют числа $\alpha_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $d(y_0 + \alpha_0 h_0, a(x_0)) \geq \varepsilon$. Отсюда $d(y_0 + \alpha_0 h_j, a(x_j)) \geq \varepsilon/2$ ($j \geq j_0$) в силу полунепрерывности снизу функции $g(h, x) = d(y_0 + \alpha_0 h_0, a(x))$ по (h, x) (так как a полунепрерывна сверху). Полагая $t_j = \frac{\alpha_0}{\|y_j - y_0\|}$ и заметив, что $y_0 + \alpha_0 h_j = t_j y_j + (1 - t_j) y_0$ ($0 < t_j < 1$) для достаточно больших j, получим

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq d(y_0 + \alpha_0 h_j, a(x_j)) \leq d(y_j, a(x_j)) + (1 - t_j) d(y_0, a(x_j)) = 0, \tag{1.2}$$

противоречие, которое доказывает (1.1). Однако, из (1.1) следует также, что множество $a(x_0)$ – неограничено. Таким образом, отображение a ограничено в некоторой окрестности точки x_0. Кроме того, поскольку a является K-непрерывным в x_0, то из теоремы 2.1 из [4] следует, что a – H-непрерывно. Теорема доказана. Рассмотрим пример, имеющий важное значение в линейных параметризованных задачах математического программирования.

Пример. Пусть $a(x) = \{y \in R^m : \langle f_i(x), y\rangle \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$, где $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, p$) – вектор-функции, непрерывные в точке $x_0 \in X$. Пусть система строгих неравенств $\langle f_i(x_0), y\rangle > -b_i < 0$ ($i = 1, 2, \ldots, p$) разрешима и множество $a(x_0)$ есть ограниченный выпуклый многогранник. Тогда из примера 5.10, данного в [22] (стр. 156) следует, что a является K-непрерывным отображением в x_0. Следовательно, согласно теореме 1.1, отображение a является H-непрерывным в x_0.

Расмотрим вопрос непрерывности маргинального отображения

$$a_0(x) = \{y \in a(x) : f(x, y) = \inf_{u \in a(x)} f(x, u)\}.$$

В [7] показано, что если f непрерывна и многозначное отображение a непрерывно и имеет компактное множество значений, то многозначное маргинальное отображение a_0 полунепрерывно сверху. Однако, в выпуклых задачах существуют условия, более слабые, чем непрерывность отображения a, при выполнении которых маргинальное отображение a_0 снова будет полунепрерывным сверху.

Теорема 1.2. *Пусть a – многозначное отображение с выпуклым замкнутым множеством значений и отображение $K^*(x, \nu)$ является K-п.н.св. в точках (x_0, ν)*

($\nu \in a(x_0)$). *Если функция f непрерывна по x и выпукла по y и отображемие a_0 определено в некоторой окрестности x_0, то отображение a_0 является K-п.н.св. в точке x_0.*

Доказательство : Пусть $x_j \to x_0$, $y_j \in a_0(x_j)$, $y_j \to y_0$ $(j \to \infty)$. Нужно показать, что $y_0 \in a_0(x_0)$. Поскольку y_j – точка минимума выпуклой функции $f(x_j, \cdot)$ на замкнутом, выпуклом множестве $a(x_j)$, то она удовлетворяет необходимым и достаточным условиям экстремума в y_j :

$$0 \in \partial f_y(x_j, y_j) - K^*(x_j, y_j). \tag{1.3}$$

Следовательно, существуют некоторые последовательности $u_j^* \in \partial f_y(x_j, y_j)$ и $\nu_j^* \in K^*(x_j, y_j)$ такие, что

$$u_j^* - \nu_j^* = 0. \tag{1.4}$$

Так как отображение $\partial f_y(x, y)$ является H-п.н.св. в (x_0, y_0) (см лемму 4.2 из [4], стр. 210), и множество $\partial f_y(x_0, y_0)$ является выпуклым компактом, то можно предположить, что $u_j^* \to u_0^*$. Так как, м.о. $K^*(x, y)$ – полунепрерывно сверху в (x_0, y_0), то $\nu_j^* \to \nu_0^* \in K^*(x_0, y_0)$ согласно (1.4). Теперь, из (1.3) получим $0 \in \partial f_y(x_0, y_0) - K^*(x_0, y_0)$. Отсюда следует, что $y_0 \in a_0(x_0)$, и доказательство завершено.

Следующий пример показывает, что хотя отображение a не является непрерывным, однако маргинальное отображение a_0 – K-п.н.св.

Пример 1. Пусть $f(x, y) = \|y\|$ $(y \in R^2)$ и $a(x) = \{y \in R^2 : y = (x, \alpha),\ \alpha \geq 1/|x|\}$ для $x \neq 0$ и $a(0) = (0, 1)$. Тогда очевидно, что отображение a – K-п.н.св., но не K-п.н.сн. в нуле. Нетрудно заметить, что $K^*(0, \nu) = R^2$, если $\nu \in a(0)$. Поэтому отображение $K^*(x, \nu)$ $(\nu \in a(x))$ – полунепрерывно сверху в точке $(0, 1)$. Следовательно, по теореме 1.2 отображение $a_0(x)$ является K-полунепрерывным сверху в нуле. Действительно, очевидно, что $a_0(x) = \left\{y : y = \left(x, \frac{1}{|x|}\right)\right\}$, если $x \neq 0$ и $a_0(0) = \{(0, 1)\}$.

Приведем пример, показывающий, что требования теоремы 1.2 являются минимальными.

Пример 2. Пусть $a(\varepsilon) = \{(x_1, x_2) : 0 \le x_1 \le 1,\ x_2 - (1-\varepsilon)x_1 \le 0,\ (1+\varepsilon)x_1 - x_2 \le 0\}$. Задача состоит в минимизации $f(x) = -x_1 - x_2$ на $a(\varepsilon)$. Очевидно, что $K^*(\varepsilon, x) = R^2$ при $x \in a(\varepsilon)$ и $K^*(0, x_0) = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 \le 0\}$, если $x_0 = (1, 1)$. Значит, многозначное отображение $K^*(\varepsilon, x)$ не является полунепрерывным сверху в точке $(0, x_0)$. Легко проверить, что $\arg\min_{x \in a(0)} f(x) = (1, 1)$ и что $\arg\min_{x \in a(\varepsilon)} f(x) = (0, 0)$ для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом, маргинальное отображение a_0 не является K-п.н.св. в точке $(0, x_0)$.

§ 2. О НЕПРЕРЫВНОСТИ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

В этом параграфе при помощи метода шатров исследуется вопрос непрерывности некоторых обратных отображений. Рассмотрим следующее многозначное отображение :

$$F_M^{-1}(\alpha) = \{x \in M : F(x) = \alpha\} = F^{-1}(\alpha) \bigcap M,$$

где $M \subset R^m$, $F : R^m \to R^n$ $(m > n,\ F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ и $\alpha \in R^n$.

Теорема 2.1. *Пусть $x \in F_M^{-1}(0)$ и выпуклый конус $K_M(x)$ является непрерывным шатром для множества M в точке x. Если F непрерывно на R^m, дифференцируемо во всех точках $x \in F_M^{-1}(0)$ и удовлетворяет условию регулярности*

$$F'(x)K_M(x) = R^n, \quad \forall x \in F_M^{-1}(0), \tag{2.1}$$

то м.о. $F_M^{-1}(\alpha) = \{x \in M : F(x) = \alpha\}$ является K-п.н.сн. в нуле.

Доказательство : Пусть $x_0 \in F_M^{-1}(0)$ и $U(x_0)$–окрестность точки x_0. Тогда из (2.1) следует, что существует симплекс $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}] \subset R^n$, содержащий 0 в качестве внутренней точки и такой, что $[z_1, z_2, \dots, z_{n+1}] \subset F'(x_0)K_m(x_0)$. Отсюда следует, что существуют векторы $\overline{x}_j \in K_M(x_0)$ $(j = 1, 2, \dots, n+1)$ такие, что

$$z_j = F'(x_0)\overline{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n+1. \tag{2.2}$$

Векторы $z_j - z_1$ $(j = 1, 2, \dots, n+1)$ образуют базис в R^n, поэтому определим линейное отображение $L : R^n \to R^m$ следующим образом :

$$L(z_j - z_1) = \overline{x}_j - \overline{x}_1, \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Если

$$z = \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j z_j + \sum_{j=2}^{n+1} (1-\beta_j) z_1, \qquad \text{то положим} \quad \varphi(z) = L(z - z_1) + \overline{x}_1.$$

Здесь отображение $\varphi(z)$ есть непрерывное отображение симплекса $[z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}]$ в множество $conv\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n+1}\}$. Действительно, имеем

$$\varphi(z) = L(z - z_1) + \overline{x}_1 = L\left(\sum_{j=2}^{n+1} \beta_j z_j + \left(1 - \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j\right) z_1 - z_1\right) + \overline{x}_1 =$$

$$= L\left(\sum_{j=2}^{n+1} \beta_j (z_j - z_1)\right) + \overline{x}_1 = \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j L(z_j - z_1) + \overline{x}_1 = \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j (\overline{x}_j - \overline{x}_1) + \overline{x}_1 =$$

$$= \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j \overline{x}_j + \left(1 - \sum_{j=2}^{n+1} \beta_j\right) \overline{x}_1 \in conv\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n+1}\}.$$

Так как $K_M(x_0)$ является непрерывным шатром для M в точке x_0, то существует непрерывное отображение $\psi(\overline{x}) = \overline{x} + r(\overline{x})$, $r(\overline{x})/\|\overline{x}\| \to 0$ такое, что $x_0 + \psi(\overline{x}) \in M$ для $\overline{x} \in K_M(x_0) \bigcap B_\varepsilon(0)$. Для $\delta \in (0,1)$ определим непрерывное отображение Φ_δ^α из $\delta[z_1, \ldots, z_{n+1}]$ в R^n следующим образом :

$$\Phi_\delta^\alpha(y) = y - F(x_0 + \Psi(L(y - \delta\,\overline{z}_1) + \delta\,\overline{x}_1)) - \alpha, \quad y \in \delta[\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_{n+1}]. \tag{2.3}$$

При малых $\delta > 0$ имеем $\delta\,\mathrm{conv}\{\overline{x}_1, ..., \overline{x}_{n+1}\} \subset B_\varepsilon(0)$ и, следовательно, $\delta\varphi(z) \in K_M(x_0) \bigcap B_\varepsilon(0)$. Из (2.2) и (2.3) следует, что $\Phi_\delta^\alpha(y) = -o(x_0, \delta\varphi(z)) - \alpha$ для всех α ($\|\alpha\| \le \beta_0$). Отсюда следует, что существуют $\delta_0 > 0$ и $\beta_0 > 0$ такие, что $\Phi_\delta^\alpha(y) \in \delta_0[z_1, \ldots, z_{n+1}]$ при всех α, $\|\alpha\| \le \beta_0$. Таким образом, для любого фиксированного α ($\|\alpha\| \le \beta_0$) непрерывное отображение $\Phi_\delta^\alpha(y)$ отображает выпуклое, компактное множество $\delta_0[z_1, \ldots, z_{n+1}]$ в себя. Согласно теореме Бауэра существует неподвижная точка отображения $\Phi_\delta^\alpha(y)$, т.е. существует элемент $y_\alpha \in \delta_0[z_1, \ldots, z_{n+1}]$ ($y_\alpha = \delta_0 z_\alpha$) такой, что $\Phi_\delta^\alpha(y_\alpha) = y_\alpha$. Отсюда следует, что $F(x_0 + \psi(\delta_0\varphi(z_\alpha)) = \alpha$ при $x_0 + \psi(\delta_0\varphi(z_\alpha)) \in U(x_0)$, и теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $M = \{x \in R^m : g(x) = 0\}$, где $g(x)$ –локально липшицевая функция, и пусть для любого $x \in M$ имеют место следующие предположения :

1) $0 \neq \partial^0 g(x)$ – субдифференциал Кларка [5],

2) если $y^* \in Lin\, \partial^0 g(x)$ $(y^* \neq 0)$, то векторы $y^*, f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x)$ – линейно независимы.

Тогда м.о. $F_M^{-1}(\alpha)$ является K-п.н.сн. в нуле.

Доказательство : В работе [15] показано, что при выполнении условия 1), выпуклый конус $K_M(x) = \{\overline{x} : g^0(x, \overline{x}) \leq 0,\ g^0(x, -\overline{x}) \leq 0\}$, где $g^0(x, \overline{x}) = \max_{x^* \in \partial^0 g(x)} \langle x^*, \overline{x} \rangle$ является непрерывным шатром для M в точке $x \in M$. Отсюда $K_M(x) = \{\overline{x} \in R^m : \langle y^*, \overline{x} \rangle = 0,\ \forall y^* \in \partial^0 g(x)\}$.

Пусть $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*$ – система векторов, принадлежащих множеству $\partial^0 g(x)$ и образующих базис в подпространстве $Lin\, \partial^0 g(x)$. Очевидно, что $K_M(x) = \{\overline{x} : \langle y^*, \overline{x} \rangle = 0,\ i = 1, 2, \dots, k\}$. Так как система векторов $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^*,\ f_j'(x),\ (j = 1, \dots, n)$ – линейно независима в R^m, и, следовательно, для любого $y \in R^n$ система линейных уравнений $F'(x)\overline{x} = y,\ y, \langle y_i^*, \overline{x} \rangle = 0,\ (i = 1, 2, \dots, n)$ разрешима, т.е. условие (2.1) справедливо. Значит, м.о. F_M^{-1} является K-п.н.сн.

Следствие 2. Пусть $M = \{x \in R^m : g(x) \leq 0\}$, где $g(x)$ выпукла и непрерывна, и для для любого $x \in M$ имеет место

1) $0 \notin \partial g(x)$,

2) если $y^* \in \partial g(x)$, то векторы $y^*, f_1'(x), f_2'(x), \dots, f_n'(x)$ линейно независимы.

Тогда м.о. F_M^{-1} является K-п.н.сн. в нуле.

Доказательство : Сначала покажем, что из соотношения

$$(Ker\, F'(x))^{\perp} \bigcap K_M^*(x) = \{0\} \tag{2.4}$$

следует (2.1). Пусть это не так. Тогда $(F'(x)K_M(x))^* \neq \{0\}$. Следовательно, существует ненулевой вектор y^* такой, что $\langle y^*, F'(x)\overline{x} \rangle \geq 0,\ \forall \overline{x} \in K_M(x)$, т.е. $\langle (F'(x))^* y^*, \overline{x} \rangle \geq 0$, а это означает, что

$$z^* \equiv (F'(x))^* y^* \in K_M^*(x). \tag{2.5}$$

Покажем, что этот вектор ненулевой. Действительно, если $z^* = 0$, то $F'(x) \circ (F'(x))^* y^* = 0$, и $rank\, F'(x) = n$ в силу условия 2). Следовательно, матрица $F'(x) \circ (F'(x))^*$ обратима, и поэтому $y^* = 0$, что является противоречием.

Известно [1], что $\mathrm{Im}\,(F'(x))^* = (Ker\, F'(x))^{\perp}$. Следовательно, из (2.5) следует, что $(Ker\, F'(x))^{\perp} \bigcap K^*_M(x) \neq \{0\}$, что противоречит соотношению (2.4). Далее, известно [9], что при выполнении условия 1), выпуклый конус $K_M(x) = \{\overline{x} \in R^m : g'(x, \overline{x}) \leq 0\}$ является непрерывным шатром для M в точке x и,

$$K^*_M(x) = -con\, \partial g(x) \quad \text{и}$$

$$(Ker\, F'(x))^{\perp} = \left\{ y : y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i'(x),\ \alpha_i \in R,\ i = 1, 2, \ldots, n \right\}.$$

Поэтому, из условия 2) следует соотношение (2.4), и, следовательно, (2.1).

§ 3. ЛИПШИЦЕВЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

Теорема 3.1. *Пусть* $a(x) = \{y \in R^m : \langle f_i(x), y\rangle \leq b_i,\ i = 1, \ldots, p\}$, *где функции* $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, p)$ *являются липшицевыми в точке* $x_0 \in X$. *Пусть далее* $a(x) \neq \emptyset$ *и* $\mathrm{Im}\, a = \bigcup_{x \in U(x_0)} a(x)$ *ограничено. Тогда отображение* a *– липшицево сверху в точке* x_0, *т.е. существует окрестность* $U(x_0)$ *точки* x_0 *и постоянная* $L > 0$ *такие, что*

$$a(x) \subseteq a(x_0) + L\|x - x_0\| B_1(0), \quad \forall x \in U(x_0).$$

Доказательство : В работе [14] (лемма 1.12, стр. 54) показано, что существует число $\beta > 0$ такое, что $d(y, a(x_0)) \leq \beta \max_{1 \leq i \leq p}\{\langle f_i(x_0), y\rangle - b_i\}$ для любого $y \notin a(x_0)$. Так как множество $\mathrm{Im}\, a$ ограничено и функции f_i – липшицевы в точках x_0, то существуют числа $m > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\|f_i(x) - f_i(x_0)\| \leq c\|x - x_0\| \quad (1 \leq i \leq p, \quad \forall x \in U(x_0)) \quad \text{и} \quad \|y\| \leq m \quad (\forall y \in \mathrm{Im}\, a).$$

Пусть $L = \beta c m$. Тогда из $y \in a(x)$ следует, что существует индекс i_0 такой, что

$$d(y, a(x_0)) \leq \beta(\langle f_{i_0}(x_0), y\rangle > -b_{i_0}) \leq \beta(\langle f_{i_0}(x_0), y\rangle - \langle f_{i_0}(x), y\rangle) \leq$$

$$\leq \beta \max_{1 \leq i \leq p} \|f_i(x_0) - f_i(x)\| \cdot \|y\| \leq L\|x - x_0\|,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ в точке x_0 удовлетворяют условию Липшица и существует вектор $\overline{y}$ такой, что $\langle f_i(x_0), \overline{y}\rangle - b_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Пусть множество $a(x_0) = \{y : \langle f_i(x_0), y\rangle \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots p\}$ ограничено, тогда м.о. $a(x) = \{y : \langle f_i(x), y\rangle \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p\}$ в точке x_0 удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство : Согласно теореме 1.1, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что множество $\operatorname{Im} a = \bigcup_{x\in U(x_0)} a(x)$ ограничено, т.е. существует выпуклый компакт F такой, что $\operatorname{Im} a \subseteq F$. Следовательно, в силу теоремы 3.1 отображение a – липшицево сверху в точке x_0. Докажем теперь, что a – липшицево снизу в точке x_0, т.е. существует число $L > 0$ и окрестность $N(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$a(x_0) \subseteq a(x) + L\|x - x_0\|B_1(0), \quad \forall x \in N(x_0).$$

Положим $\varphi(x, y) = \max_{1\le i\le p}\{\langle f_i(x), y\rangle - b_i\}$. Очевидно, что для фиксированного x $\varphi(x, y)$ выпукла по y, и для фиксированного y удовлетворяет условию Липшица в точке x_0, т.е. существует число $L_1 > 0$ такое, что

$$\|\varphi(x, y) - \varphi(x_0, y)\| \le L_1\|x - x_0\|, \quad \forall x \in U(x_0), \quad \forall y \in F.$$

Кроме того, из условий теоремы следует, что окрестность $U(x_0)$ можно выбрать настолько малой, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $\varphi(x, \overline{y}) < 0$. Проводя доказательство аналогично доказательству теоремы 2 из [17], получим требуемый результат.

Рассмотрим маргинальное отображение

$$a_0(x) = \{y \in a(x) : \langle f_0(x), y\rangle = \min_{u\in a(x)} \langle f_0(x), u\rangle\}.$$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены все условия теоремы 3.2, и функция $f_0(x)$ удовлетворяет условию Липшица в точке x_0, тогда маргинальное отображение $a_0(x)$ – липшицево сверху в точке x_0.*

Доказательство : Положим $W(x, y) = \langle f_0(x), y\rangle$ и $V(x) = \min_{y\in a(x)}\langle f_0(x), y\rangle$. Очевидно существует число $l > 0$ такое, что

$$|W(x, y_1) - W(x_0, y_2)| \le l(\|x - x_0\| + \|y_1 - y_2\|), \quad x \in U(x_0), \quad y_1, y_2 \in F.$$

Так как отображение a удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой c, то согласно предложению 24 работы [7] (стр. 126), маргинальная функция тоже удовлетворяет условию Липшица с константой $c(l+1)$, и, очевидно, что

$$a_0(x) = \{y : \langle f_i(x), y\rangle \le b_i,\ i = 1, 2, \ldots, p,\ \langle f_0(x), y\rangle >= V(x)\}.$$

Пусть $y \notin a_0(x_0)$, тогда в силу леммы 1.12 из [14] существует число $\beta > 0$ такое, что

$$d(y, a_0(x_0)) \le \beta \max\left\{\max_{1\le i\le p} \{\langle f_i(x_0), y\rangle - b_i\},\ \langle f_0(x_0), y\rangle - V(x_0)\right\}.$$

Теперь, если $y \in a_0(x)$, то либо существует индекс i_0 такой, что $d(y, a(x_0)) \le f_{i_0}(x_0) - b_{i_0}$, либо $d(y, a(x_0)) \le \langle f_0(x_0), y\rangle - V(x_0)$. Первый случай рассмотрен в теореме 3.1. Рассмотрим второй случай. Имеем

$$\begin{aligned} d(y, a(x_0)) &\le \langle f_0(x_0), y\rangle - V(x_0) \le \|f_0(x) - f_0(x_0)\| \cdot \|y\| + \langle f_0(x), y\rangle - V(x_0) \le \\ &\le \|f_0(x) - f_0(x_0)\| \cdot \|y\| + V(x) - V(x_0) \le l_1\|x - x_0\| + l(c+1)\|x - x_0\| \le \\ &\le L\|x - x_0\|, \end{aligned}$$

где $L = l_1 + l(c+1)$. Теорема доказана.

Теорема 3.4. *Пусть X и Y – банаховы пространства и м.о. $a_1 : X \to 2^Y$ с выпуклыми, компактными значениями удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x_0 \in X$. Пусть $a_2 : X \to 2^Y$ – замкнутое, выпуклое отображение такое, что $x_0 \in \operatorname{int} dom\, a_2$ и $0 \subseteq \operatorname{int}\{a_1(x_0) - a_2(x_0)\}$, тогда м.о. $a(x) \equiv a_1(x) \cap a_2(x)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки x_0.*

Доказательство : Сначала заметим, что множество значений м.о. $a_1 - a_2$ выпукло и замкнуто, и $a_1 - a_2$ является H-п.н.сн. в точке x_0. Поэтому, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $\tau B_1(0) \subseteq a_1(x) - a_2(x)$, $\forall x \in U(x_0)$. Далее, так как $a_2(x)$ – выпуклое, замкнутое отображение и $x_0 \in \operatorname{int} dom\, a_2$, $y_0 \in a_2(x_0)$, то существует число $\gamma > 0$ такое, что для любого $z \in B_\gamma(x_0)$ и для любого $y \in \operatorname{Im} a_2$ имеет место неравенство

$$d(y, a_2(z)) \le \frac{1}{\gamma} d(z, a_2^{-1}(y))\,(1 + \|y - y_0\|) \tag{3.1}$$

(см. [7], теорема1, стр. 136). Положим $L = a_1(z)$, $M = a_2(z)$ $(\forall z \in B_\gamma(x_0))$ и $F(u) = M - u$ $(u \in L)$. Очевидно $\tau B_1(0) \subseteq F(L)$ $(\forall z \in B_\gamma(x_0))$. Рассуждая как при доказательстве предложения 8 (см. [7], стр. 139), установим, что существует число $c_1 > 0$, независящее от z и такое, что для любого $u \in L$ и любого $\nu \in B_r(0)$ имеем $d(u, F^{-1}(\nu)) \leq c_1 d(\nu, F(u))$. Положим $\nu = 0$, и так как $F^{-1}(0) = M \cap L$, то получим

$$d(u, M \cap L) \leq c_1 d(0, F(u)) = c_1 d(u, M). \tag{3.2}$$

Пусть теперь w – произвольная точка из Y. Из (3.2) следует, что

$$d(w, M \cap L) \leq \|w - u\| + d(u, M \cap L) \leq \|w - u\| + c_1 d(u, M)$$

для любого $u \in L$. Отсюда получаем, что $d(w, M \cap L) \leq d(w, L) + c_1 d(u, M) \leq d(w, L) + c_1(\|w - u\| + \|w - \nu\|)$, где $\nu \in M$. Следовательно,

$$d(w, M \cap L) \leq (c_1 + 1)(d(w, M) + d(w, L)). \tag{3.3}$$

Пусть $z' \in B_\gamma(x_0)$ и $y \in a(z')$. Подставляя $w = y$ в (3.3) и используя (3.1), получим

$$d(y, a(z)) \leq (c_1 + 1)(d(y, a_1(z)) + \frac{c_2}{\gamma} d(z, z'), \text{ где } c_2 = \sup_{y \in \mathrm{Im}\ a} \{\|y - y_0\| + 1\}. \tag{3.4}$$

Так как м.о. a_1 удовлетворяет условию Липшица, то из (3.4) следует, что существует число $R > 0$ такое, что $d(y, a(z)) \leq R\|z - z'\|$. И так как y – произвольная точка из $a(z')$, то из неравенства следует утверждение теоремы.

§ 4. О СУЩЕСТВОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ СЕЛЕКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ТИПА РАВЕНСТВ

В этом параграфе методом шатров исследуется вопрос существования дифференцируемых селекций для некоторых многозначных отображений, заданных при помощи гладких и негладких ограничений типа неравенств.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о неявных функциях для негладкого случая.

Теорема 4.1. *Пусть* $b(x) = \{y \in R^m : F(x,y) = g(y) = 0\}$, *где* $F(x,y) : R^n \times R^m \to R^k$ *- гладкое отображение и* $g : R^m \to R$ *- выпуклая, непрерывная функция,* $x_0 \in R^m$ *- произвольная точка,* $y_0 = b(x_0)$. *Если для любого* $y^* \in Lin\,\partial g(y_0)$ $(y^* \neq 0)$ *система векторов* y^*, $F'_y(x_0,y_0)$ *линейно независима, то тогда существует отображение* $y(x)$, *определенное в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *и дифференцируемое в этой точке, такое, что* $y(x) \in b(x)$, $\forall x \in U(x_0)$ *и* $y(x_0) = y_0$.

Доказательство : Пусть $z = (x,y) \in R^n \times R^m$,

$$M_1 = \{(x,y) \in R^n \times R^m : g(y) = 0\} \quad \text{и} \quad M_2 = \{(x,y) \in R^n \times R^m : F(x,y) = 0\}.$$

Известно (см.[16]), что подпространство

$$H_1 = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in R^n \times R^m : g'(y_0, \overline{y}) \leq 0,\ g'(y_0, -\overline{y}) \leq 0\}$$

является Липшицевым шатром для множества M_1 в точке y_0, а

$$H_2 = \{(\overline{x}, \overline{y}) \in R^n \times R^m : F'_x(x_0,y_0)\overline{x} + F'_x(x_0,y_0)\overline{y} = 0\}$$

является гладким шатром для M_2 в точке (x_0, y_0). Поэтому существуют липшицевые отображения $r_i(\overline{z})$ $(i = 1,2)$ такие, что $\|\overline{z}\|^{-1} r_i(\overline{z}) \to 0$ и $z_0 + \overline{z} + r_i(\overline{z}) \in M_i$ при достаточно малых $\overline{z} \in H_i$.

Пусть $\Lambda_1 = F'_x(x_0,y_0)$ и $\Lambda_2 = F'_y(x_0,y_0)$. Покажем, что подпространство $H = H_1 \cap H_2$ является непрерывным шатром для $M = M_1 \cap M_2 = gr\,(b)$ в точке (x_0,y_0). Сначала покажем, что $H_1 + H_2 = Z$ (где $Z = R^n \times R^m$). Действительно,

$$H_1 + H_2 = Z \Longleftrightarrow H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} = \{0\}, \tag{4.1}$$

где

$$H_1^{\perp} = \{(0, y^*) : y^* \in Lin\,\partial g(y_0)\} \quad H_2^{\perp} = \{(x^*, y^*) : x^* = \Lambda_1^* \alpha,\ y^* = \Lambda_2^* \alpha,\ \alpha \in R^k\}.$$

Следовательно, в силу условий теоремы, соотношение (4.1) имеет место. Значит, существуют линейные, непрерывные отображения $P_1 : Z \to H_1$ и $P_2 : Z \to H_2$ такие, что любой вектор представим в виде $z = P_1 z + P_2 z$.

Расмотрим теперь систему уравнений

$$\varphi(\overline{z}, u) \equiv \psi_1(\overline{z} + P_1 u) - \psi_2(\overline{z} - P_2 u) = 0, \quad \text{где} \quad \psi_i(\overline{z}) = z_0 + \overline{z} + r_i \overline{z}) \quad (i = 1, 2).$$

Имеют место следующие условия :

а) $\varphi : Z \times Z \to Z$ – непрерывное отображение, и $\varphi(0, 0) = 0$,

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдутся число $\delta > 0$ и окрестность нуля $U(0)$ такие, что из условия $\overline{z} \in U(0)$ и неравенств $\|u'\| < \delta$, $\|u''\| < \delta$ следует неравенство $\|\varphi(\overline{z}, u') - \varphi(\overline{z}, u'') - (u' - u'')\| < \varepsilon$.

В силу теоремы о неявной функции (см.[1], стр. 161) найдутся число $C > 0$, окрестность нуля $U(0)$ и непрерывное отображение $u : U(0) \to Z$ такие, что

$$\varphi(\overline{z}, u(\overline{z})) = 0 \quad \text{и} \quad \|u(\overline{z})\| \le C\|\varphi(\overline{z}, 0)\|. \tag{4.2}$$

Пусть $\psi(\overline{z}) \equiv \psi_1(\overline{z} + P_1 u(\overline{z})) = z_0 + \overline{z} + r(\overline{z})$, где $r(\overline{z}) = P_1 u(\overline{z}) + r_1(\overline{z} + P_1 u(\overline{z}))$. Из соотношения (4.2) следует, что $r(\overline{z})/\|\overline{z}\| \to 0$ при $\overline{z} \to 0$. Положим $\nu_1(\overline{z}) = \overline{z} + P_1 u(\overline{z})$ и $\nu_2(\overline{z}) = \overline{z} - P_2 u(\overline{z})$. Так как H_1 и H_2 – подпространства, то $\nu_1(\overline{z}) \in H_1$ и $\nu_2(\overline{z}) \in H_2$ для любого $\overline{z} \in H_1 \cap H_2$. Таким образом, согласно определению шатра, $\psi(\overline{z}) \in M_1 \cap M_2$ для достаточно малых $\overline{z} \in H_1 \cap H_2$.

Покажем, что существует линейный, непрерывный оператор $A : R^n \to R^m$ такой, что $(\overline{x}, A(\overline{x})) \in H_1 \cap H_2$ для любого $\overline{x} \in R^n$. Действительно, если $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_p^*$ – максимальная, линейно независимая система векторов в $Lin\, \partial g(y_0)$, то для любого фиксированного $\overline{x}$ система уравнений

$$F'_y(x_0, y_0)\overline{y} = -F'_x(x_0, y_0)\overline{x}, \quad \langle y_i^*, \overline{y} \rangle = 0 \quad (i = 1, 2) \tag{4.3}$$

имеет решение $\overline{y}$, поскольку по предположению система векторов $F'_y(x_0, y_0)$, y_1^*, y_2^*, ..., y_p^* линейно независима. Следовательно, существует линейный оператор $A : R^n \to R^m$ такой, что для любого $\overline{x}$ вектор $\overline{y} = A\overline{x}$ является решением системы (4.3), т.е. $(\overline{x}, A\overline{x}) \in H_1 \cap H_2$. Таким образом, $\psi(\overline{z}) = (\psi_1(\overline{x}, \overline{y}), \psi_2(\overline{x}, \overline{y}))$ и $\psi'_{1x}(0, 0) = I_x$, $\psi'_{1y}(0, 0) = 0$, $\psi'_{2x}(0, 0) = 0$, $\psi'_{2y}(0, 0) = I_y$, поскольку $Z = X \times Y$. Покажем, что для системы уравнений $g(\overline{x}, \alpha) = \psi_1(\overline{x} + \alpha, A(\overline{x} + \alpha)) - \overline{x} = 0$ выполнены все условия теоремы 5.1.1 работы [9] (теорема о неявной функции).

Действительно, функция g непрерывна и $g(0,0)=0$. Кроме того, имеем $\|g(\overline{x},\alpha)-\alpha\| \le o\left(\sqrt{\|\overline{x}\|^2+\|\alpha\|^2}\right)$. Поэтому система уравнений $g(\overline{x},\alpha)=0$ разрешима относительно $\overline{x}$, причем существует такое решение $\alpha(\overline{x})$, что $\lim_{\overline{x}\to 0}\alpha(\overline{x})/\|\overline{x}\|=0$. Обозначим $z(\overline{x})=(\overline{x}+\alpha(\overline{x}), A\overline{x}+A\alpha(\overline{x}))$. Тогда имеем $z(\overline{x})\in H\equiv H_1\cap H_2$ при достаточно малых $\overline{x}$. Следовательно, $z_0+\psi(z(\overline{x}))\in gr(b)$. Так как $\psi(z(\overline{x}))=(\psi_1(z(\overline{x})),\psi_2(z(\overline{x})))=(\overline{x},\psi_2(z(\overline{x})))$, то $y_0+\psi_2(z(\overline{x}))\in b(x_0+\overline{x})$. Следовательно, отображение $y(x)\equiv y_0+A(x-x_0)+o(x-x_0)$ дифференцируемо в точке x_0 и $y(x)\in b(x)$, $y(x_0)=y_0$. Теорема доказана.

Abstract. The paper is mainly devoted to investigation of continuity and Lipschitz properties of multivalued mappings given by smooth or non-smooth restrictions of equality type. A sufficient condition under which the intersection of a Lipschitz and a convex mappings is a Lipschitz mapping is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Москва, Наука, 1979.
2. В. Г. Болтянский. Метод шатров в теории экстремальных задач, УМН, том 30, № 6, стр. 3 – 55, 1979.
3. В. Ф. Демьянов, В. Н. Малоземов, Введение в минимакс, Москва, Наука, 1972.
4. В. Ф. Демьянов, Л. В. Васильев, Недифференцируемая оптимизация, Москва, Наука, 1981.
5. Ф. Кларк, Оптимизация и негладкий анализ, Москва, Наука, 1988.
6. И. И. Еремин, Н. Н. Астафьев, Введение в теорию линейного и выпуклого программирования, Москва, Наука, 1976.
7. Ж.-П. Обен, И. Экланд, Прикладной нелинейный анализ, Москва, Мир, 1988.
8. Е. С. Половинкин, Теория многозначных отображений, Уч. пос., Москва, 1983.
9. Б. Н. Пшеничный, Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Москва, Наука, 1982.
10. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, “Ограничения типа равенства в негладких задачах оптимизации”, Докл, АН СССР, том 287, № 3, стр. 553 – 556, 1982.
11. Б. Н. Пшеничный, Р. А. Хачатрян, “О необходимых условиях экстремума для негладких функций”, Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 18, № 4, стр. 318 – 325, 1983.
12. Б. Н. Пшеничный, “Теоремы о неявных функциях для многозначных отображений”, Кибернетика, № 6, стр. 60 – 73, 1976.
13. Б. Ш. Мордухович, Методы аппроксимации в задачах оптимизации и управления, Москва, Наука, 1988.

14. В. В. Федоров, Численные методы Максимина, Москва, Наука, 1980.
15. Р. А. Хачатрян, "О пересечении шатров в гильбертовом пространстве и необходимых условиях экстремума для негладких функций", Изв. АН Арм.ССР, Математика, том 23, № 2, стр. 149 – 122, 1988.
16. Р. А. Хачатрян, "О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 2, стр. 65 – 76, 2002.
17. А. Р. Хачатрян, Р. А. Хачатрян, "О непрерывности мнозначных отображений", Уч. зап. ЕГУ, № 2, стр. 3 – 13, 2003.
18. Р. А. Хачатрян, Р. А. Аветисян, А. Р. Хачатрян, "Непрерывность множеств ε-оптимальных стратегий", Изв. НАН Армении, Математика, том 38, № 1, стр. 69 – 82, 2003.
19. А. Р. Хачатрян, "О непрерывности некоторых многозначных отображений", Докл. НАН Армении, сер. математика, том 104, № 2, стр. 90 – 93, 2004.
20. А. Р. Хачатрян, "Представление липшицевых многозначных отображений", Изв. НАН Армении, Математика, том 39, № 3, стр. 38 - 48, 2004.
21. E. Michael, "Continuous selections", Ann. of Math., vol. 63, pp. 281 – 361, 1956.
22. R. T. Rockfellar, J.-B. Wets. Roger. Variational analysis. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Поступила 21 сентября 2004