Известия НАН Армении. Математика, **39**, № 6, 2004, 29–38

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Т. Н. Арутюнян и В. В. Нерсесян

Ереванский государственный университет

Резюме. В работах Трубовица были доказаны теоремы единственности в обратной задаче Штурма-Лиувилля, где в качестве спектральных данных вместе со спектром брались некоторые "новые" последовательности $\{l_n\}$, удобные при исследовании "четного случая". Мы доказываем аналогичные теоремы единственности для тех двух случаев краевых условий, которые остались нерассмотренными в работах Трубовица.

§1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Обозначим через $L(q,\alpha,\beta)$ краевую задачу Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \mu y, \quad x \in (0,\pi), \quad \mu \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi], \tag{1.2}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0, \quad \beta \in [0,\pi), \tag{1.3}$$

где q – действительная функция из $L^2[0,\pi]$ (будем писать $q \in L^2_R[0,\pi]$). Известно, (см. [1], [2]), что собственные значения $\mu_n = \mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n = 0,1,2,\ldots$ этой задачи действительные, простые и образуют последовательность, стремящуюся к $+\infty$ при $n \to \infty$. Через $h_n(x) = h_n(x,q,\alpha,\beta)$ будем обозначать нормированные собственные функции, сответствующие μ_n, $n = 0,1,2,\ldots$.

Обратные задачи для $L(q,\alpha,\beta)$ ставились и решались в различных постановках (см., например, [3] – [12]). В работе [6], вместе с собственными значениями $\mu_n = \mu_n(q,\alpha,\beta)$, $n = 0,1,2,\ldots$, в качестве спектральных данных рассмотрены

величины[1]

$$l_n(q,\alpha,\beta) \equiv \log\left[(-1)^n \frac{h_n(\pi,q,\alpha,\beta)}{h_n(0,q,\alpha,\beta)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots, \quad \sin\alpha \neq 0, \quad \sin\beta \neq 0$$

и доказана теорема единственности :

Теорема 1 [6]. *Если* $\mu_n(q_1,\alpha_1,\beta_1) = \mu_n(q_2,\alpha_2,\beta_2)$ *и* $l_n(q_1,\alpha_1,\beta_1) = l_n(q_2,\alpha_2,\beta_2)$ *для всех* $n = 0,1,2,\ldots$, *то* $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$ *и* $q_1(x) = q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

В [5] рассмотрена "задача Дирихле" $L(q,\pi,0)$ (т.е. случай $\sin\alpha = 0$, $\sin\beta = 0$), и вместе с собственными значениями $\mu_n(q,\pi,0)$, в качестве спектральных данных рассмотрены величины

$$l_n(q,\pi,0) = k_n(q) \equiv \log\left[(-1)^{n+1} \frac{h_n'(\pi,q)}{h_n'(0,q)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots$$

Доказана теорема единственности, которую можно сформулировать так :

Теорема 2. *Если* $\mu_n(q_1) = \mu_n(q_2)$ *и* $k_n(q_1) = k_n(q_2)$ *для всех* $n = 0,1,2,\ldots$, *то* $q_1(x) = q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Целью данной работы является доказательство аналогичных теорем единственности в двух оставшихся нерассмотренными случаях : $\sin\alpha = 0$ и $\sin\beta \neq 0$, т.е.задачи $L(q,\pi,\beta)$, и $\sin\alpha \neq 0$, $\sin\beta = 0$, т.е. задачи $L(q,\alpha,0)$. Здесь вопрос в том, что брать в качестве дополнительных к спектру $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ спектральных данных. Положим

$$l_n(q,\pi,\beta) = l_n(q,\beta) \equiv \log\left[(-1)^n \frac{h_n(\pi,q,\beta)}{h_n'(0,q,\beta)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots. \tag{1.4}$$

Теорема 3. *Если* $\mu_n(q_1,\pi,\beta_1) = \mu_n(q_2,\pi,\beta_2)$, $l_n(q_1,\beta_1) = l_n(q_2,\beta_2)$ *при* $n = 0,1,2,\ldots$, *то* $\beta_1 = \beta_2$ *и* $q_1(x) = q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Рассмотрим также задачу $L(q,\alpha,0)$, $\sin\alpha \neq 0$. Положим

$$l_n(q,\alpha,0) = l_n(q,\alpha) \equiv \log\left[(-1)^{n+1} \frac{h_n'(\pi,q,\alpha)}{h_n(0,q,\alpha)}\right], \quad n=0,1,2,\ldots$$

Теорема 4. *Если* $\mu_n(q_1,\alpha_1,0) = \mu_n(q_2,\alpha_2,0)$ *и* $l_n(q_1,\alpha_1) = l_n(q_2,\alpha_2)$ *при* $n = 0,1,2,\ldots$, *то* $\alpha_1 = \alpha_2$ *и* $q_1(x) = q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Обозначим через $y = \varphi(x,\mu)$ решение задачи Коши

$$-y'' + q(x)y = \mu y,$$

[1] В работах [5] – [8] задача $L(q,\alpha,\beta)$ рассматривается на интервале $[0,1]$, тогда как мы рассматриваем задачу на $[0,\pi]$.

$$y(0,\mu)=0, \quad y'(0,\mu)=1.$$

Собственные значения $\mu_n(q,\beta)$ задачи $L(q,\pi,\beta)$ суть нули функции

$$D(\mu)=\frac{\varphi(\pi,\mu)\cos\beta+\varphi'(\pi,\mu)\sin\beta}{\sin\beta}=\varphi(\pi,\mu)\cot\beta+\varphi'(\pi,\mu), \tag{1.5}$$

а функции $\varphi(x,\mu_n(q,\beta))=\varphi(x,\mu_n)$ есть собственные функции, соответствующие собственным значениям $\mu_n=\mu_n(q,\beta)$, $n=0,1,2,\ldots$. Величины

$$a_n=a_n(q,\pi,\beta)=\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n)dx$$

называются *нормировочными постоянными*. Известную теорему единственности В.А. Марченко ([3], стр. 375) в случае задачи $L(q,\pi,\beta)$ можно сформулировать так :

Если $\mu_n(q_1,\pi,\beta_1)=\mu_n(q_2,\pi,\beta_2)$ *и* $a_n(q_1,\pi,\beta_1)=a_n(q_2,\pi,\beta_2)$ *для всех* $n=0,1,2,\ldots$, *то* $\beta_1=\beta_2$ *и* $q_1(x)=q_2(x)$ *почти всюду на* $[0,\pi]$.

Теорема 3 и теорема Марченко эквивалентны, ибо согласно нижеследующей лемме 2.1

$$a_n=(-1)^{n+1}\exp[l_n]\dot{D}(\mu_n(\beta)),$$

где величины $\dot{D}(\mu_n)$ однозначно определяются только множеством собственных значений $\mu_0,\mu_1,\mu_2,\ldots$.

Приводимое нами доказательство теоремы 3 основано на контурном интегрировании (см. также [5], [6]) и не использует операторы преобразования, на которых основано доказательство теоремы Марченко. Поэтому приведенное доказательство можно рассматривать также как альтернативное доказательство теоремы Марченко в указанном случае и указанной формулировке.

§2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 3 И 4

Для собственных значений $\mu_n(q,\beta)$ известна асимптотика ([3], [4]) :

$$\mu_n(q,\beta)=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2}{\pi}\cot\beta+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(t)\,dt+r_n(\beta), \tag{2.1}$$

где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r_n^2(\beta)<\infty$. Кроме того, аналогично тому, как это делается в [3], можно доказать, что функцию $D(\mu)$ можно представить в виде произведения

$$D(\mu)=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n(q,\beta)-\mu}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем, производную по μ будем обозначать точкой, т.е. $\dot{D}(\mu)=\frac{\partial D(\mu)}{\partial\mu}$ и $\dot{\varphi}(x,\mu)=\frac{\partial\varphi(x,\mu)}{\partial\mu}$, и т.д.,.

Лемма 2.1. *Имеет место равенство :*

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n(\beta))\,dx = -\varphi(\pi,\mu_n(\beta))\dot{D}(\mu_n). \tag{2.3}$$

Доказательство : Запишем тождество

$$-\varphi''(x,\mu) + q(x)\varphi(x,\mu) \equiv \mu\varphi(x,\mu) \tag{2.4}$$

и продифференцировав его по μ, получим

$$-\dot{\varphi}''(x,\mu) + q(x)\dot{\varphi}(x,\mu) \equiv \varphi(x,\mu) + \mu\dot{\varphi}(x,\mu). \tag{2.5}$$

Далее, умножив (2.4) на $\dot{\varphi}(x,\mu)$, а (2.5) на $\varphi(x,\mu)$ и, отняв полученные тождества, получим[2]

$$\frac{d}{dx}\left[\varphi'\dot{\varphi} - \dot{\varphi}'\varphi\right] \equiv \varphi^2(x,\mu). \tag{2.6}$$

Поскольку функция $\varphi(x,\mu)$ удовлетворяет начальным условиям $\varphi(0,\mu) \equiv 0$ и $\varphi'(0,\mu) \equiv 1$ при всех $\mu \in \mathbb{C}$, то

$$\dot{\varphi}(0,\mu) \equiv 0, \quad \dot{\varphi}'(0,\mu) \equiv 0. \tag{2.7}$$

Проинтегрировав тождество (2.6) по x от 0 до π и приняв во внимание (2.7), получим

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu)\,dx = \varphi'(\pi,\mu)\dot{\varphi}(\pi,\mu) - \dot{\varphi}'(\pi,\mu)\varphi(\pi,\mu). \tag{2.8}$$

Поскольку собственные значения μ_n есть корни уравнения

$$D(\mu) \equiv \varphi(\pi,\mu)\cot\beta + \varphi'(\pi,\mu) = 0, \tag{2.9}$$

то при $\mu = \mu_n(\beta)$[3]

$$\frac{\varphi'(\pi,\mu_n)}{\varphi(\pi,\mu_n)} = -\cot\beta,$$

следовательно, из (2.8) при $\mu = \mu_n$ имеем

$$\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n)\,dx = \varphi(\pi,\mu_n)\left[\frac{\varphi'(\pi,\mu_n)}{\varphi(\pi,\mu_n)}\dot{\varphi}(\pi,\mu_n) - \dot{\varphi}'(\pi,\mu_n)\right] =$$

$$= -\varphi(\pi,\mu_n)[\dot{\varphi}(\pi,\mu_n)\cot\beta + \dot{\varphi}'(\pi,\mu_n)] = -\varphi(\pi,\mu_n)\dot{D}(\mu_n).$$

---

[2]Замену порядка дифференцирования по x и по μ можно обосновать так, как это делается в [5].

[3]Заметим, что $\varphi(\pi,\mu_n) \neq 0$ при $\sin\beta \neq 0$.

Лемма 2.1 доказана.

Из представления (2.2) нетрудно получить, что

$$\dot{D}(\mu_n) = -\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \prod_{\substack{m\neq n\\ m=0}}^{\infty} \frac{\mu_m-\mu_n}{\left(m+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Поскольку $\mu_0 < \mu_1 < \cdots$, то легко заметить, что $sgn\ \dot{D}(\mu_n) = (-1)^{n+1}$. Отсюда и из (2.3) следует, что

$$sgn[\varphi(\pi,\mu_n)] = (-1)^n. \tag{2.10}$$

Обозначим через $||f||$ L^2-норму функции $f \in L^2[0,\pi]$, т.е. $||f||^2 = \int_0^\pi |f(x)|^2\, dx$. Поскольку

$$h_n(x) = \frac{\varphi(x,\mu_n)}{||\varphi(\cdot,\mu_n)||}, \quad h_n'(x) = \frac{\varphi'(x,\mu_n)}{||\varphi(\cdot,\mu_n)||},$$

то

$$\frac{h_n(\pi)}{h_n'(0)} = \frac{\varphi(\pi,\mu_n)}{\varphi'(0,\mu_n)} = \frac{\varphi(\pi,\mu_n)}{1},$$

Поэтому, $(-1)^n \frac{h_n(\pi)}{h_n'(0)} = (-1)^n\varphi(\pi,\mu_n)$. Из (2.10) следует, что определение (1.4) корректно.

Лемма 2.2. ***Имеет место равенство***

$$\varphi(\pi,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\pi,\mu_n) \prod_{m\neq n}^{\infty} \frac{\mu_m-\mu}{\mu_m-\mu_n}, \quad \mu\in\mathbb{C}. \tag{2.11}$$

Доказательство : Рассмотрим следующий контурный интеграл

$$I_N(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=N^2} \frac{\varphi(\pi,\lambda)D(\mu)}{(\lambda-\mu)D(\lambda)}\, d\lambda,$$

где подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n$ ($|\mu_n| < N^2$) и в точке μ. Согласно теореме о вычетах (см., например, [13]), этот интеграл равен сумме вычетов подынтегральной функции в полюсах, лежащих внутри контура $|\lambda| = N^2$. Учитывая (2.2), получаем

$$\operatorname{res} \left.\frac{\varphi(\pi,\lambda)D(\mu)}{(\lambda-\mu)D(\lambda)}\right|_{\lambda=\mu_k} = -\varphi(\pi,\mu_k) \prod_{m\neq k}^{\infty} \frac{\mu_m-\mu}{\mu_m-\mu_k},$$

$$\operatorname{res} \left.\frac{\varphi(\pi,\lambda)D(\mu)}{(\lambda-\mu)D(\lambda)}\right|_{\lambda=\mu} = \varphi(\pi,\mu).$$

Таким образом,

$$I_N(\mu) = \varphi(\pi,\mu) - \sum_{|\mu_k|<N^2} \varphi(\pi,\mu_k) \prod_{m\neq k}^{\infty} \frac{\mu_m-\mu}{\mu_m-\mu_k}.$$

Нетрудно доказать, что подынтегральная функция на контурах $|\lambda| = N^2$, при достаточно больших N не имеет особенностей. Следующие леммы доказываются аналогично леммам 3.1 и E.2 из работы [5].

Лемма 2.3. *Если $z \in \mathbb{C}$ и $\left|z - \left(n - \frac{1}{2}\right)\right| \geq \frac{1}{4}$ для каждого целого n, то*

$$\exp^{|Im z\pi|} < 4|\cos z\pi|. \tag{2.12}$$

Лемма 2.4. *На контурах $|\lambda| = N^2$ имеет место оценка*

$$D(\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\pi\left(1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right). \tag{2.13}$$

Возвращаясь к доказательству леммы 2.2, заметим, что справедлива оценка ([5]) :

$$\varphi(\pi, \lambda) = O\left(\frac{\exp^{|Im\sqrt{\lambda}|\pi}}{|\sqrt{\lambda}|}\right). \tag{2.14}$$

Таким образом, при $|\lambda| = N^2$ из (2.12), (2.13) и (2.14) получаем

$$\left|\frac{\varphi(\pi, \lambda)D(\mu)}{(\lambda - \mu)D(\lambda)}\right| \leq \frac{M|D(\mu)|}{(N^2 - |\mu|)N},$$

где M – некоторая постоянная. Так как μ фиксировано, получаем, что $I_N(\mu) \to 0$ при $N \to \infty$. Лемма 2.2 доказана.

Обозначим через $\psi(x, \mu, \beta)$ решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями

$$\psi(\pi, \mu, \beta) = \sin\beta, \tag{2.15}$$

$$\psi'(\pi, \mu, \beta) = -\cos\beta. \tag{2.16}$$

Очевидно, что $\psi(x, \mu_n(\beta), \beta)$ есть собственные функции задачи $L(q, \pi, \beta)$. Поскольку собственные значения задачи $L(q, \pi, \beta)$ простые, то существуют постоянные c_n такие что

$$\varphi(x, \mu_n(\beta)) = c_n\psi(x, \mu_n(\beta), \beta).$$

Отсюда получаем, согласно (2.15) и (2.16)

$$\varphi(\pi, \mu_n) = c_n \sin\beta, \quad \varphi'(\pi, \mu_n) = -c_n\cos\beta, \quad c_n = \frac{\varphi(\pi, \mu_n)}{\sin\beta},$$

т.е.

$$\psi(x, \mu_n(\beta), \beta) = \frac{1}{c_n}\varphi(x, \mu_n(\beta)) = \frac{\sin\beta}{\varphi(\pi, \mu_n)}\varphi(x, \mu_n) \tag{2.17}$$

Обозначим также через $y_3(x, \mu)$ и $y_4(x, \mu)$ решения уравнения (1.1), удовлетворяющие начальным условиям

$$y_3(\pi, \mu) = 1, \quad y_3'(\pi, \mu) = 0,$$

$$y_4(\pi,\mu)=0, \quad y_4'(\pi,\mu)=1.$$

Для этих решений нетрудно получить асимптотические представления (см., например, [5], [12])

$$y_3(x,\mu)=\cos\sqrt{\mu}(\pi-x)+O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|(\pi-x))}{|\sqrt{\mu}|}\right),$$

$$y_4(x,\mu)=\frac{\sin\sqrt{\mu}(\pi-x)}{\sqrt{\mu}}+O\left(\frac{\exp(|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|(\pi-x))}{|\mu|}\right).$$

Решение $y=\psi(x,\mu,\beta)$ может быть представлено в виде линейной комбинации линейно независимых решений y_3 и y_4 :

$$\psi(x,\mu,\beta)=y_3(x,\mu)\sin\beta-y_4(x,\mu)\cos\beta. \tag{2.18}$$

Теперь перейдем непосредственно к доказательству теоремы 3. Заметим, что из условий теоремы следует, что

$$\mu_n(q_1,\beta_1)=\mu_n(q_2,\beta_2)\equiv\mu_n, \tag{2.19}$$

и

$$l_n(q_1,\beta_1)=l_n(q_2,\beta_2)=\log[(-1)^n\varphi(\pi,\mu_n,q_{1,2})], \tag{2.20}$$

т.е. имеем

$$\varphi(\pi,\mu_n,q_1)=\varphi(\pi,\mu_n,q_2). \tag{2.21}$$

Следовательно, из равенства (2.11) следует, что

$$\varphi(\pi,\mu,q_1)\equiv\varphi(\pi,\mu,q_2) \tag{2.22}$$

при всех $\mu\in\mathbb{C}$. Далее, для решения $\varphi(x,\mu)$ известна асимптотическая формула [5] :

$$\varphi(\pi,\mu,q)=\frac{\sin\sqrt{\mu}\pi}{\sqrt{\mu}}-\frac{\cos\sqrt{\mu}\pi}{2\mu}\int_0^\pi q(t)\,dt+o\left(\frac{1}{\mu}\right) \quad \text{при} \quad \mu\to+\infty. \tag{2.23}$$

Из (2.22) и (2.23) следует, что на последовательности $\lambda_n=n^2$ имеет место равенство

$$\varphi(\pi,\lambda_n,q_1)=\frac{\sin\pi n}{n}-\frac{\cos\pi n}{2n^2}\int_0^\pi q_1(t)\,dt+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\pi n}{n}-\frac{\cos\pi n}{2n^2}\int_0^\pi q_2(t)\,dt+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=\varphi(\pi,\lambda_n,q_2)$$

т.е.

$$\frac{(-1)^n}{2n^2}\left[\int_0^\pi q_2(t)\,dt - \int_0^\pi q_1(t)\,dt\right] = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

или,

$$\int_0^\pi q_2(t)\,dt - \int_0^\pi q_1(t)\,dt = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку левая часть не зависит от n, то получаем

$$\int_0^\pi q_2(t)\,dt = \int_0^\pi q_1(t)\,dt. \tag{2.24}$$

Используя (2.1), (2.19) и (2.24), получаем равенство

$$\frac{2}{\pi}(\cot\beta_1 - \cot\beta_2) = r_n(\beta_2) - r_n(\beta_1) = o(1).$$

Откуда следует равенство $\cot\beta_1 = \cot\beta_2$, т.е. $\beta_1 = \beta_2$. Рассмотрим теперь контурный интеграл

$$J_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=n^2} \frac{1}{D(\mu)}[\varphi(x,\mu,q_1) - \varphi(x,\mu,q_2)][\psi(x,\mu,q_1) - \psi(x,\mu,q_2)]\,d\mu. \tag{2.25}$$

Известна оценка (см. [5])

$$\varphi(x,\mu,q) = \frac{\sin\sqrt{\mu}x}{\sqrt{\mu}} + O\left(\frac{\exp|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}x|}{|\mu|}\right). \tag{2.26}$$

Откуда следует

$$\varphi(x,\mu,q_1) - \varphi(x,\mu,q_2) = O\left(\frac{\exp|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|x}{|\mu|}\right).$$

Из (2.18) и оценок для y_3 и y_4 следует, что

$$\psi(x,\mu,q_1) - \psi(x,\mu,q_2) = O\left(\frac{\exp|\mathrm{Im}\sqrt{\mu}|(\pi - x)}{|\sqrt{\mu}|}\right).$$

Учитывая оценку (2.12) и неравенство (2.13), получаем, что для достаточно больших n подынтегральное выражение в (2.25) при $|\mu| = n^2$ есть величина порядка $O\left(\frac{1}{|\mu||\sqrt{\mu}|}\right) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ и поэтому

$$|J_n| = \frac{1}{2\pi}O\left(\frac{1}{n^3}\right)2\pi n^2 = O\left(\frac{1}{n}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

С другой стороны, J_n равен сумме вычетов в простых полюсах подынтегральной функции (т.е. в нулях $D(\mu)$, которые есть μ_n). Учитывая (2.3) и (2.17), получаем

$$J_n = \sum_{|\mu_n|<n^2} \frac{1}{\dot{D}(\mu_n)}[\varphi(x,\mu_n,q_1) - \varphi(x,\mu_n,q_2)][\psi(x,\mu_n,q_1) - \psi(x,\mu_n,q_2)] =$$

$$= -\sum_{|\mu_n|<n^2} \frac{\sin\beta}{\int_0^\pi \varphi^2(x,\mu_n)\,dx}[\varphi(x,\mu_n,q_1)-\varphi(x,\mu_n,q_2)]^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Поскольку все члены неотрицательны, то отсюда следует, что

$$\varphi(x,\mu_n,q_1) \equiv \varphi(x,\mu_n,q_2) = \varphi(x,\mu_n)$$

при всех n. Если это тождество справедливо хотя бы при одном значении $n = n_0$, то из уравнения (1.1) следует, что

$$[q_1(x)-q_2(x)]\varphi(x,\mu_{n_0}) = 0,$$

почти всюду на $[0,\pi]$, и поскольку $\varphi(x,\mu_{n_0})$ есть собственная функция (т.е. отличная от нуля почти всюду), то $q_1(x) \equiv q_2(x)$ почти всюду. Теорема 3 доказана.

Для доказательства теоремы 4 заметим, что собственные значения задач $L(q,\alpha,\beta)$ и $L(q^*,\pi-\beta,\pi-\alpha)$ (где $q^*(x) = q(\pi-x)$) совпадают (см., например, [6]) и собственные функции этих задач связаны соотношением

$$h_n(x,q^*,\pi-\beta,\pi-\alpha) = h_n(\pi-x,q,\alpha,\beta), \quad n = 0,1,\ldots$$

Отсюда получаем, что $\mu_n(q,\pi,\beta) = \mu_n(q^*,\pi-\beta,0)$ и

$$l_n(q,\pi,\beta) = \log\left[(-1)^n\frac{h_n(\pi,q,\pi,\beta)}{h_n'(0,q,\pi,\beta)}\right] = \log\left[(-1)^n\left(-\frac{h_n(0,q^*,\pi-\beta,0)}{h_n'(\pi,q^*,\pi-\beta,0)}\right)\right] =$$

$$= -\log\left[(-1)^{n+1}\frac{h_n'(\pi,q^*,\pi-\beta,0)}{h_n(0,q^*,\pi-\beta,0)}\right] = -l_n(q^*,\pi-\beta,0).$$

Таким образом, доказательство теоремы 4, по существу, следует из доказательства теоремы 3.

Abstract. In the uniqueness theorems for the Sturm–Liouville inverse problem proved by Trubowitz along with the spectrum as the spectral data some "new" sequences $\{l_n\}$ were used convinient for investigation of the "even case". We prove similar uniqueness theorems for the two cases of boundary conditions not considered by Trubowitz.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения, Наукова Думка, Киев, 1977.
2. Б. М. Левитан, И. С. Саргсян, Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака, Наука, Москва, 1988.
3. В. А. Марченко, "Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, I", Труды ММО, том I, стр. 327 – 420, 1952.
4. Б. М. Левитан, М. Г. Гасымов, "Определение дифференциального уравнения по двум спектрам", УМН, том 19, стр. 1 – 63, 1964.
5. J. Pöschel, E. Trubowitz, Inverse Spectral Theory, Acad. Press, 1987.
6. E. L. Isaacson, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem, I", Com. Pure and Appl. Math., vol. 36, pp. 767 – 783, 1983.
7. E. L. Isaacson, H. P. McKean, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem, II", Com. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 1 – 11, 1984.
8. B. E. I. Dahlberg, E. Trubowitz, "The inverse Sturm-Liouville problem, III", Com. Pure and Appl. Math., vol. 37, pp. 255 – 267, 1984.
9. J. R. McLaughlin, "On uniqueness theorems for second order inverse eigenvalue problems", J. of Math. Anal. and Appl., vol. 118, pp. 38 – 41, 1986.
10. J. R. McLaughlin, W. Rudnell, "A uniqueness theorem for an inverse Sturm-Liouville problem", J. Math. Phys., vol. 28, no. 7, pp. 1471 – 1472, 1987.
11. J. R. McLaughlin, "Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data", SIAM Review, vol. 28, no. 1, pp. 53 – 72, 1986.
12. N. Lewinson "The inverse Sturm-Liouville Problem", Matematisk Tidsskrift, B, pp. 25 – 30, 1949.
13. Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон, Курс современного анализа, I. Москва, 1963

Поступила 7 Мая 2004