Известия НАН Армении. Математика, **39**, *№ 6, 2004, 17-28*

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ С НЕКОТОРЫМИ СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

С. А. Акопян

Ереванский государственный университет
E-mail : sarhak@ysu.am

Резюме. В работе показывается, что обращающее ядро преобразования типа Ватсона-Джрбашяна с ядрами ${}_1F_0(z,\rho,\mu)$ и $\nu_\rho(z)$ является целой функцией $\Phi_{\rho,\mu}(z)$, введенной М.М. Джрбашяном и Р. А. Багияном в связи с новым интегральным представлением целой функции типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z,\mu)$.

В работе [1] мы построили интегральные преобразования типа Ватсона-Джрбашяна с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями или обобщенными функциями типа Вольтерра. В настоящей работе мы показываем, что для специальных частных случаев этих преобразований, когда в качестве ядер берутся значения функций

$$ {}_1F_0(z,\rho,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)}{k!}z^k \quad \text{и} \quad \nu_\rho(z)=\int_0^\infty\frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{\rho}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\tau+\frac{1}{2}\right)}z^\tau d\tau \qquad (\rho>1)$$

на определенных лучах комплексной плоскости, тогда обращающие ядра являются сужениями на определенные лучи целой функции $\Phi_{\rho,\mu}(z)$, введенной М. М. Джрбашяном и Р. А. Багияном [2] в их совместной работе по интегральным представлениям целой функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_\rho(z,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}+\mu\right)}.$$

Функция $\Phi_{\rho,\mu}(z)$ определена посредством формулы

$$\Phi_{\rho,\mu}(z)=\frac{\rho}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\beta)}e^{\zeta^\rho-z\zeta}\zeta^{\rho(1-\mu)}d\zeta, \quad \rho>1,$$

где контур интегрирования $\gamma(\varepsilon,\beta)$ состоит из двух лучей

$$L^{(\pm)}(\varepsilon,\beta) = \{\zeta : |\zeta| \geq \varepsilon, \arg\zeta = \pm\beta\}$$

и дуги окружности

$$l(\varepsilon,\beta) = \{\zeta : |\zeta| = \varepsilon, |\arg\zeta| \leq \beta\} \quad \left(\varepsilon > 0, \quad \frac{\pi}{2\rho} < \beta \leq \frac{\pi}{\rho}\right).$$

Направление обхода контура $\gamma(\varepsilon,\beta)$ таково, что точка $\zeta = 0$ остается слева. Функция $\Phi_{\rho,\mu}(z)$ имеет порядок $\lambda = \frac{\rho}{\rho-1}$ и тип $\sigma = \left(1-\frac{1}{\rho}\right)\rho^{-\frac{1}{\rho-1}}$ и разлагается в ряд Тейлора–Маклорена

$$\Phi_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\sin\pi\left(\mu - \frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!} z^k.$$

Целая функция ${}_1F_0(z,\rho,\mu)$ того же порядка λ и типа σ, удовлетворяет соотношению

$$\Phi_{\rho,\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{e^{i\pi(\mu-\frac{1}{\rho})}\,{}_1F_0\left(ze^{i\frac{\pi}{\lambda}},\rho,\frac{1}{\rho}+1-\mu\right) - \right.$$
$$\left. -e^{-i\pi(\mu-\frac{1}{\rho})}\,{}_1F_0\left(ze^{-i\frac{\pi}{\lambda}},\rho,\frac{1}{\rho}+1-\mu\right)\right\}$$

и имеет интегральное представление

$${}_1F_0(z,\rho,\mu) = \rho\int_0^{\infty} e^{-t^{\rho}}t^{\mu\rho-1}e^{zt}dt \quad (\mu > 0).$$

1°. Выделим один частный случай из результатов, полученных в работе [1]. Рассмотрим в комплексной плоскости s $(s = \tau + it)$ мероморфные функции

$$\mathcal{K}(s,\rho,\mu,\alpha) = \lambda e^{i\lambda(s+\frac{1}{2}-\mu)(\pi-\alpha)}\Gamma\left(\lambda\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)\right)\Gamma\left(\mu-\frac{\lambda}{\rho}\left(s+\frac{1}{2}-\mu\right)\right),$$

где $\rho > 1$, $\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho}$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2\lambda}, 2\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right]$ и

$$\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta) = e^{i\vartheta s}\frac{\Gamma\left(1+\lambda\left(s-\frac{3}{2}+\mu\right)\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(s-\frac{3}{2}+\mu\right)\right)}, \quad \vartheta \in \left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$$

В работе [1] рассмотрены функции

$$\mathcal{H}^{(+)}(s,\rho,\mu) \equiv \mathcal{H}\left(s,\rho,\mu,\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad \mathcal{H}^{(-)}(s,\rho,\mu) \equiv \mathcal{H}\left(s,\rho,\mu,-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (1)$$

и доказаны утверждения :

а) при $\frac{1}{\rho} < \mu < 1$ и $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2\lambda}, 2\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right]$ имеем

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{K}\left(\frac{1}{2} + it, \rho, \mu, \alpha\right)\right| < +\infty, \tag{2}$$

б) при $\mu > \frac{1}{\rho}$ имеем

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{H}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2} + it, \rho, \mu\right)\right| < +\infty. \tag{3}$$

Обозначая $\mathcal{K}^{(+)}(s, \rho, \mu) \equiv \mathcal{K}\left(s, \rho, \mu, \frac{\pi}{2\lambda}\right)$ и $\mathcal{K}^{(-)}(s, \rho, \mu) \equiv \mathcal{K}\left(s, \rho, \mu, 2\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right)$, имеем на всей комплексной плоскости s тождество :

$$e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\mathcal{K}^{(+)}(s, \rho, \mu)\mathcal{H}^{(-)}(1-s, \rho, \mu) + e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\mathcal{K}^{(-)}(s, \rho, \mu)\mathcal{H}^{(+)}(1-s, \rho, \mu) \equiv 2\pi\lambda. \tag{4}$$

По теореме Меллина ([3], [4]) существуют пределы в среднем :

$$\frac{k(x, \rho, \mu, \alpha)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{K}(s, \rho, \mu, \alpha)}{1-s} x^{-s} ds \in L^2(0, \infty),$$

$$\frac{h^{(\pm)}(x, \rho, \mu)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a\to+\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{H}^{(\pm)}(s, \rho, \mu)}{1-s} x^{-s} ds \in L^2(0, \infty).$$

По лемме 3 работы [1] для функции $k(x, \rho, \mu, \alpha)$ имеем явное представление :

$$k(x, \rho, \mu, \alpha) = \int_0^x {}_1F_0\left(e^{i\alpha}t^{\frac{1}{\lambda}}, \rho, \mu\right) t^{\frac{1}{2}-\mu} dt, \quad \frac{1}{\rho} < \mu < 1, \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{2\lambda}, 2\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right].$$

Тождество (4) и формулы (2), (3) дают возможность построения преобразования Ватсона–Джрбашяна с ядрами $k^{(+)}(x, \rho, \mu) \equiv k\left(x, \rho, \mu, \frac{\pi}{2\lambda}\right)$, $k^{(-)}(x, \rho, \mu) \equiv k\left(x, \rho, \mu, 2\pi - \frac{\pi}{2\lambda}\right)$ и $h^{(\pm)}(x, \rho, \mu)$.

Теперь установим связь между функциями $h^{(\pm)}(x, \rho, \mu)$ и $\Phi_{\rho,\mu}(z)$. Нетрудно убедиться, что при условии $\mu > \frac{1}{\rho}$ функция $\mathcal{H}(s, \rho, \mu, \vartheta)$ ($|\vartheta| \le \frac{\pi}{2}$) не имеет полюсов на прямой Re $s = \frac{1}{2}$. Пользуясь формулой

$$|\Gamma(\tau + it)| \sim \sqrt{2\pi}|t|^{\tau-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}, \quad t \to \pm\infty$$

(см. [5]), получим

$$\left|\mathcal{H}\left(\frac{1}{2} + it, \rho, \mu, \vartheta\right)\right| \sim \rho^{\frac{1}{2}+\lambda(\mu-1)}e^{-\vartheta t-\frac{\pi}{2}|t|}, \quad t \to \pm\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} \left|\mathcal{H}\left(\frac{1}{2} + it, \rho, \mu, \vartheta\right)\right| < +\infty, \quad |\vartheta| \le \frac{\pi}{2},$$

и по теореме Меллина существует предел в среднем :

$$\frac{h(x,\rho,\mu,\vartheta)}{x} = \frac{1}{2\pi i}\,\underset{a\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds \in L^2(0,\infty). \tag{5}$$

Лемма 1. *Если* $\rho > 1$, $\mu > \frac{1}{\rho}$ *и* $|\vartheta| \le \frac{\pi}{2}$, то

$$h(x,\rho,\mu,\vartheta) = \frac{1}{\lambda}e^{i\vartheta(\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho}-\mu)}\int_0^x \Phi_{\rho,\mu}\left((e^{-i\vartheta}t)^{\frac{1}{\lambda}}\right)t^{\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}}dt. \tag{6}$$

Доказательство : При $\mu > \frac{1}{\rho}$ мероморфная функция

$$\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta) = e^{i\vartheta(1-s)}\frac{\Gamma\left(1+\lambda\left(\mu-\frac{1}{2}-s\right)\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{\lambda}{\rho}\left(\mu-\frac{1}{2}-s\right)\right)}$$

не имеет полюсов на прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$, а полюсы, лежащие на полуплоскости $\mathrm{Re} s > \frac{1}{2}$, простые и совпадают с точками $s_k = \frac{k+1}{\lambda} + \mu - \frac{1}{2}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$, причем

$$\begin{aligned}\mathrm{res}_{s=s_k}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1} &= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi\lambda}e^{-i\vartheta(\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{3}{2})}\times\\ &\times\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!\left(\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{1}{2}\right)}x^{\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{3}{2}},\ k=0,1,2,\ldots\end{aligned} \tag{7}$$

Пусть $R_n = \mu-\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\left(n+\frac{3}{2}\right)$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, а L_n обозначает контур области D_n, являющейся пересечением круга $|s| < R_n$ и полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$. Функция $\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}$ голоморфна всюду в D_n, кроме точек $s_k = \frac{k+1}{\lambda} + \mu - \frac{1}{2}$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, где имеет простые полюсы с вычетами (7). Поэтому, для $x \in (0,+\infty)$ по теореме Коши, имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_n}\frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s}x^{s-1}ds = -\frac{e^{-i\vartheta(\mu-\frac{3}{2})}}{\pi\lambda}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}\frac{(e^{-i\vartheta}x)^{\frac{k+1}{\lambda}}}{\frac{k+1}{\lambda}+\mu-\frac{1}{2}}x^{\mu-\frac{3}{2}} = -\frac{e^{-i\vartheta(\mu-\frac{3}{2})}}{\pi\lambda x}\times$$

$$\times\int_0^x\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\sin\pi\left(\mu-\frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}(e^{-i\vartheta}t)^{\frac{k+1}{\lambda}}\right\}t^{\mu-\frac{3}{2}}dt. \tag{8}$$

Пусть $\frac{1}{2} + iR_n^*$ – точки пересечения окружности $|s| = R_n$ с прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. Очевидно, что $R_n^* = \sqrt{R_n^2 - \frac{1}{4}}$. Поэтому $\lim_{n\to\infty} R_n^* = +\infty$, а C_{R_n} – дуга окружности $\{|s| = R_n, \mathrm{Re}\, s \ge \frac{1}{2}\}$. Напишем формулу (8) в развернутом виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*} \frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s} x^{s-1}ds =$$

$$= \frac{e^{-i\vartheta(\mu-\frac{3}{2})}}{\pi\lambda x}\int_0^x \left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{\sin\pi\left(\mu - \frac{k+1}{\rho}\right)\Gamma\left(1-\mu+\frac{k+1}{\rho}\right)}{k!}(e^{-i\vartheta})^{\frac{k+1}{\lambda}}\right\} t^{\mu-\frac{3}{2}}dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_n}} \frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s} x^{s-1}ds. \tag{9}$$

Согласно формуле дополнения для гамма-функции, имеем равенство

$$\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta) = e^{i\vartheta(1-s)} \frac{\sin\pi\left(\mu + \frac{\lambda}{\rho}\left(\mu - \frac{1}{2} - s\right)\right)}{\sin\pi\lambda\left(s + \frac{1}{2} - \mu\right)} \frac{\Gamma\left(1 - \mu + \frac{\lambda}{\rho}\left(s + \frac{1}{2} - \mu\right)\right)}{\Gamma\left(\lambda\left(s + \frac{1}{2} - \mu\right)\right)}.$$

Согласно лемме 8 работы [6] при $n \ge n_0$ на дуге C_{R_n} имеем

$$\left|\frac{\sin\pi\left(\mu + \frac{\lambda}{\rho}\left(\mu - \frac{1}{2} - s\right)\right)}{\sin\pi\lambda\left(s + \frac{1}{2} - \mu\right)}\right| \le \begin{cases} 2\sqrt{2}\, e^{-\pi R_n|\sin\varphi|}, & \frac{\pi}{4} \le |\varphi| \le \frac{\pi}{2}, \\ e^{\frac{\pi}{\rho}\lambda R_n|\sin\varphi|}, & |\varphi| \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Пользуясь также обобщенной формулой Стирлинга [5]

$$\ln\left|\Gamma(a + Re^{i\varphi})\right| = \left(R\cos\varphi + a - \frac{1}{2}\right)\ln R - R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) + O(1), \quad R \to +\infty, \tag{10}$$

где $\delta > 0$ и $a \in (-\infty, \infty)$ – произвольные числа, а величина $O(1)$ равномерно ограничена для всех значений $|\varphi| \le \pi - \delta$, приходим к следующей оценке :

$$\left|\mathcal{H}(1 - R_n e^{i\varphi}, \rho, \mu, \vartheta)\right| \le \begin{cases} C_1 R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}, & \frac{\pi}{4} \le |\varphi| \le \frac{\pi}{2}, \\ C_2 R_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma e^{\frac{7}{2}+\frac{\pi\lambda}{\rho}}}{R_n}\right)^{R_n\cos\varphi}, & 0 \le |\varphi| \le \frac{\pi}{4}, \end{cases} \quad n \ge n_0.$$

С помощью этой оценки легко доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty}\int_{C_{R_n}} \frac{\mathcal{H}(1-s,\rho,\mu,\vartheta)}{s} x^{s-1}ds = 0 \quad (x > 0).$$

Переходя к пределу в (9) при $n \to \infty$, приходим к равенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-iR_n^*}^{\frac{1}{2}+iR_n^*} \frac{\mathcal{H}(s,\rho,\mu,\vartheta)}{1-s} x^{-s}ds = \frac{e^{-i\vartheta\left(\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}\right)}}{\lambda x}\int_0^x \Phi_{\rho,\mu}\left((e^{-i\vartheta}t)^{\frac{1}{\lambda}}\right) t^{\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}}dt,$$

которое остается в силе, когда числа R_n^* в его левой части заменяются числами a_n, удовлетворяющимися условиям $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ и $\lim a_n = +\infty$. При $\vartheta = \pm\frac{\pi}{2}$ из (6) следует, согласно (1) и (5), что

$$h^{(\pm)}(x,\rho,\mu) = \frac{1}{\lambda} e^{\mp i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho})} \int_0^x \Phi_{\rho,\mu}\left((e^{\mp i\frac{\pi}{2}}t)^{\frac{1}{\lambda}}\right) t^{\mu-\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}} dt.$$

Следовательно, теорема 1 работы [1] для настоящего специального случая имеет следующую формулировку.

Теорема 1. *Пусть параметры ρ и μ удовлетворяют условиям $\rho > 1$, $\frac{1}{\rho} < \mu < 1$ и $\lambda = \frac{\rho}{\rho-1}$. Тогда*

а) для любой функции $g(y) \in L^2(0,\infty)$ функции

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k^{(\pm)}(xy,\rho,\mu)}{y} g(y)dy$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ и $f^{(\pm)}(x) \in L^2(0,\infty)$. При этом, если

$$f_a^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_0^a {}_1F_0\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right)(xy)^{\frac{1}{2}-\mu} g(y)dy,$$

то $f^{(\pm)}(x) = \mathrm{l.i.m.}_{a\to\infty} f_a^{(\pm)}(x)$. Формула обращения

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \Bigg\{ e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(+)}(xy,\rho,\mu)}{x} f^{(-)}(x)dx + \\ + e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(-)}(xy,\rho,\mu)}{x} f^{(+)}(x)dx \Bigg\}$$

также имеет место почти всюду на $(0,\infty)$, при этом, если

$$g_a(y) = \frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi\lambda}} \Bigg\{ e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}}\right) f^{(-)}(x)dx + \\ + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}}\right) f^{(+)}(x)dx \Bigg\},$$

то $g(y) = \mathrm{l.i.m.}_{a\to\infty} g_a(y)$. Справедливы также равенства,

$$\int_0^\infty \left|f^{(\pm)}(x)\right|^2 dx \le \frac{M_1}{2\pi\lambda} \int_0^\infty |g(y)|^2 dy,$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^2 dy \le \frac{M_2}{\pi\lambda} \left\{ \int_0^\infty \left|f^{(+)}(x)\right|^2 dx + \int_0^\infty \left|f^{(-)}(x)\right|^2 dx \right\},$$

где

$$M_1 = \sup_{-\infty<t<+\infty}\left|\mathcal{K}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu\right)\right|^2,\quad M_2 = \sup_{-\infty<t<+\infty}\left|\mathcal{H}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\rho,\mu\right)\right|^2.$$

б) Обратно, для любой функции $f(x)\in L^2(0,\infty)$ функции

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy,\rho,\mu)}{x}f(x)dx$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ и $g^{(\pm)}(y)\in L^2(0,\infty)$. При этом, если

$$g_a^{(\pm)}(y) = \frac{e^{\mp i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2})}}{\lambda\sqrt{2\pi\lambda}}\int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}}\right)(xy)^{\mu-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}}f(x)dx,$$

то $g^{(\pm)}(y) = \text{l.i.m.}_{a\to\infty}g_a^{(\pm)}(y)$. Формула обращения также имеет место почти всюду на $(0,\infty)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k^{(-)}(xy,\rho,\mu)}{y}g^{(+)}(y)dy+\right.$$

$$\left.+e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k^{(+)}(xy,\rho,\mu)}{y}g^{(-)}(y)dy\right\},$$

при этом, если

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\int_0^a {}_1F_0\left(e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right)g^{(+)}(y)dy+\right.$$

$$\left.+e^{-i\frac{\pi}{2}(\mu-\frac{1}{2})}\int_0^a {}_1F_0\left(e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}(xy)^{\frac{1}{\lambda}},\rho,\mu\right)g^{(-)}(y)dy\right\},$$

то $f(x) = \text{l.i.m.}_{a\to\infty}f_a(x)$. Справедливы неравенства,

$$\int_0^\infty \left|g^{(\pm)}(y)\right|^2 dy \le \frac{M_2}{2\pi\lambda}\int_0^\infty |f(x)|^2dx,$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^2dx \le \frac{M_1}{\pi\lambda}\left\{\int_0^\infty \left|g^{(+)}(y)\right|^2dy + \int_0^\infty \left|g^{(-)}(y)\right|^2dy\right\}.$$

2^0. Перейдем теперь к рассмотрению интегральных преобразований с ядрами $\nu_\rho(z)$.

Рассмотрим следующие функции комплексного переменного $s = \tau + it$:

$$\mathcal{K}(s,\vartheta) = e^{-i\vartheta s}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\mu + \frac{s-1}{\rho}\right)}, \quad \rho > 1, \quad |\vartheta| \le \frac{\pi}{2\lambda}, \quad \frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho},$$

$$\mathcal{H}^{(+)}(s,\vartheta) = \begin{cases} -2\pi i e^{-i\vartheta s}\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma(1-s)}, & \operatorname{Im} s > 0, \quad \vartheta \le -\frac{\pi}{2\lambda}, \\ 0, & \operatorname{Im} s < 0, \end{cases}$$

$$\mathcal{H}^{(-)}(s,\vartheta) = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} s > 0, \\ 2\pi i e^{-i\vartheta s}\frac{\Gamma\left(\mu-\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma(1-s)}, & \operatorname{Im} s < 0, \quad \vartheta \ge \frac{\pi}{2\lambda}. \end{cases}$$

Выбирая $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$, на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$, получим

$$\left|\mathcal{K}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right|^2 = e^{2\vartheta t}\left|\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+it\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{t}{\rho}\right)}\right|^2 = e^{2\vartheta t}\frac{\cosh\frac{\pi t}{\rho}}{\cosh \pi t} < 2e^{2\vartheta t - \frac{\pi}{\lambda}|t|},$$

$$\left|\mathcal{H}^{(+)}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right|^2 = 4\pi^2 e^{2\vartheta t}\frac{\cosh \pi t}{\cosh\frac{\pi t}{\rho}} \le 4\pi^2 e^{2\vartheta t + \frac{\pi}{\lambda}t}, \quad t > 0, \quad \vartheta \le -\frac{\pi}{2\lambda},$$

$$\left|\mathcal{H}^{(-)}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right|^2 = 4\pi^2 e^{2\vartheta t}\frac{\cosh \pi t}{\cosh\frac{\pi t}{\rho}} \le 4\pi^2 e^{2\vartheta t - \frac{\pi}{\lambda}t}, \quad t < 0, \quad \vartheta \ge \frac{\pi}{2\lambda}.$$

Откуда следует

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\mathcal{K}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right| \le \sqrt{2}, \quad |\vartheta| \le \frac{\pi}{2\lambda},$$

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|\mathcal{H}^{(\pm)}\left(\frac{1}{2}+it,\vartheta\right)\right| \le 2\pi.$$

Обозначая

$$\mathcal{K}^{(\pm)}(s) = \mathcal{K}\left(s, \pm\frac{\pi}{2\lambda}\right), \quad \mathcal{H}^{(\pm)}(s) = \mathcal{H}^{(\pm)}\left(s, \mp\frac{\pi}{2\lambda}\right),$$

легко проверить, что на прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$

$$e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\mathcal{K}^{(+)}(s)\mathcal{H}^{(-)}(1-s) + e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\mathcal{K}^{(-)}(s)\mathcal{H}^{(+)}(1-s) = 2\pi.$$

Лемма 2. *Если* $\rho > 1$, $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$ *и* $\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho}$, то

$$\text{а)} \quad \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{K}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds = \frac{1}{x}\int_0^x \Phi_{\rho,\mu}(te^{i\vartheta})dt, \quad |\vartheta| \le \frac{\pi}{2\lambda},$$

$$\text{б)} \quad \frac{1}{2\pi i}\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty}\int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia}\frac{\mathcal{H}^{(+)}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds = \frac{1}{x}\int_0^x \nu_\rho\left(te^{i\vartheta}\right)\left(te^{i\vartheta}\right)^{-\frac{1}{2}}dt, \quad \vartheta \le -\frac{\pi}{2\lambda},$$

(11)

в) $$\frac{1}{2\pi i}\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\int_{\frac12-ia}^{\frac12+ia}\frac{\mathcal{H}^{(-)}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=\frac{1}{x}\int_0^x\nu_\rho\left(te^{i\vartheta}\right)\left(te^{i\vartheta}\right)^{-\frac12}dt,\quad \vartheta\geq\frac{\pi}{2\lambda}. \tag{12}$$

Доказательство : утверждение а) доказывается аналогично лемме 1. Для доказательства б), рассмотрим область

$$D_a^{(-)}=\left\{s:|s|<a,-\frac{\pi}{2}<\arg s<0\right\}$$

и обозначим ее границу через L_a. Функция

$$h^{(+)}(s)\equiv\frac{\Gamma\left(\frac{s}{\rho}+\frac12\right)}{\Gamma\left(s+\frac12\right)}\frac{e^{i\vartheta(s-\frac12)}}{s+\frac12}x^{s-1},\quad x>0,\quad \vartheta\leq-\frac{\pi}{2\lambda},$$

голоморфна в $D_a^{(-)}$, поэтому, по теореме Коши имеем

$$\int_{L_a}h^{(+)}(s)ds=\int_a^0h(\tau)d\tau+\int_{C_a^{(-)}}h(s)ds+\int_0^{-ia}h(s)ds=0, \tag{13}$$

где $C_a^{(-)}$ – дуга окружности $s=ae^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq0$. Пользуясь формулой (10), на $C_a^{(-)}$ получим оценку

$$\left|h^{(+)}(s)\right|=O\left(e^{a(\frac{\varphi}{\lambda}-\vartheta)\sin\varphi}\left(\frac{xe^{\frac1\lambda}}{a^{\frac1\lambda}\rho^{\frac1\rho}}\right)^{a\sin\varphi}\right),\quad x>0.$$

Учитывая, что $0\leq-\frac{\pi}{2\lambda}-\vartheta\leq\frac{\varphi}{\lambda}-\vartheta\leq-\vartheta$ $\left(\vartheta\leq-\frac{\pi}{2\lambda}\right)$ и выбирая a так, чтобы $xe^{1/\lambda}a^{-1/\lambda}\rho^{-1/\rho}<e^{-1}$, получаем, что

$$\left|\int_{C_a^{(-)}}h^{(+)}(s)ds\right|\leq C_1\int_0^{\frac\pi2}e^{-a\cos\varphi}d\varphi<\frac{C_2}{a}\longrightarrow0\quad\text{при}\quad a\to+\infty. \tag{14}$$

Написав (13) в виде

$$\int_0^a\frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{\rho}+\frac12\right)}{\Gamma\left(\tau+\frac12\right)}\frac{e^{i\vartheta(\tau-\frac12)}}{\tau+\frac12}x^{\tau-\frac12}d\tau-\int_{C_a^{(-)}}h^{(+)}(s)ds+$$
$$+\int_{\frac12}^{\frac12+ia}\frac{\Gamma\left(\frac12-\frac{s-1}{\rho}\right)}{\Gamma(1-s)}\frac{e^{-i\vartheta s}}{1-s}x^{-s}ds=0,$$

или в виде

$$\frac1x\int_0^x\left\{\int_0^a\frac{\Gamma\left(\frac{\tau}{\rho}+\frac12\right)}{\Gamma\left(\tau+\frac12\right)}e^{i\vartheta(\tau-\frac12)}t^{\tau-\frac12}d\tau\right\}dt-$$
$$-\int_{C_a^{(-)}}h^{(+)}(s)ds-\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-ia}^{\frac12+ia}\frac{\mathcal{H}^{(+)}(s,\vartheta)}{1-s}x^{-s}ds=0.$$

и переходя к пределу при $a \to +\infty$, в силу (14) получаем (11). Утверждение в) устанавливается аналогично, при рассмотрении

$$D_a^{(+)} \equiv \left\{ s : |s| < a, \ 0 < \arg s < \frac{\pi}{2} \right\}$$

вместо $D_a^{(-)}$ и интегрировании функции

$$h^{(-)}(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{\rho} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)} \frac{e^{i\vartheta(s-\frac{1}{2})}}{s + \frac{1}{2}} x^{s-\frac{1}{2}}, \quad \vartheta \geq \frac{\pi}{2\lambda},$$

вдоль границы $D_a^{(+)}$. В этом случае на части $C_a^{(+)} = \{s : s = ae^{i\varphi}, \ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$ границы области $D_a^{(+)}$ имеем

$$|h^{(-)}(s)| = O\left(e^{a \sin\varphi(\frac{\varphi}{\lambda} - \vartheta)} \left(\frac{xe^{\frac{1}{\lambda}}}{a^{\frac{1}{\lambda}} \rho^{\frac{1}{\rho}}} \right)^{a\cos\varphi} \right) \quad \left(-\vartheta \leq \frac{\varphi}{\lambda} - \vartheta \leq \frac{\pi}{2\lambda} - \vartheta \leq 0 \right).$$

В частности, из (11) и (12) получаем равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty} \int_{\frac{1}{2}-ia}^{\frac{1}{2}+ia} \frac{\mathcal{H}^{(\pm)}(s)}{1-s} x^{-s} ds =$$
$$= \frac{1}{x} \int_0^x \nu_\rho\left(te^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}\right) \left(te^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}\right)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{x} \int_0^x \nu_\rho\left(te^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}\right) t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Следующая теорема является частным случаем теоремы 3 работы [1].

Теорема 2. *Пусть* $\rho > 1$, $\mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\rho}$ *и* $\frac{1}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\rho}$, *тогда*

а) *для любой функции* $g(y) \in L^2(0,\infty)$, *функции*

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{k^{(\pm)}(xy)}{y} g(y) dy$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ *и* $f^{(\pm)}(x) \in L^2(0,\infty)$. *Если*

$$f_a^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\lambda}} xy\right) g(y) dy,$$

то $f^{(\pm)}(x) = \operatorname{l.i.m.}_{a\to\infty} f_a^{(\pm)}(x)$. *Почти всюду на* $(0,\infty)$ *имеет место формула обращения*

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(+)}(xy)}{x} f^{(-)}(x) dx + \right.$$
$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{h^{(-)}(xy)}{x} f^{(+)}(x) dx \right\},$$

и $\text{l.i.m.}_{a\to\infty} g_a(y) = g(y)$, *где*

$$g_a(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2}\mu}\int_0^a \nu_\rho(xye^{-i\frac{\pi}{2\lambda}})(xy)^{-\frac{1}{2}}f^{(-)}(x)dx + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2}\mu}\int_0^a \nu_\rho\left(xye^{i\frac{\pi}{2\lambda}}\right)(xy)^{-\frac{1}{2}}f^{(+)}(x)dx\right\}.$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^\infty |f^{(\pm)}(x)|^2dx \le \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |g(y)|^2dy,$$

$$\int_0^\infty |g(y)|^2dy \le 4\pi\left\{\int_0^\infty |f^{(+)}(x)|^2dx + \int_0^\infty |f^{(-)}(x)|^2dx\right\}.$$

б) Обратно, для любой функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$ *функции*

$$g^{(\pm)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{h^{(\pm)}(xy)}{x}f(x)dx$$

определены почти всюду на $(0,\infty)$ *и* $g^{(\pm)}(y) \in L^2(0,\infty)$. *Если*

$$g_a^{(\pm)}(y) = \frac{e^{\pm i\frac{\pi}{2}(1-\mu)}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a \nu_\rho\left(e^{\mp i\frac{\pi}{2\lambda}}xy\right)(xy)^{-\frac{1}{2}}f(x)dx,$$

то $\text{l.i.m.}_{a\to\infty} g_a^{(\pm)}(y) = g^{(\pm)}(y)$. *Почти всюду на* $(0,\infty)$ *имеет место формула обращения :*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k^{(-)}(xy)}{y}g^{(+)}(y)dy + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k^{(+)}(xy)}{y}g^{(-)}(y)dy\right\},$$

и $\text{l.i.m.}_{a\to\infty} f_a(x) = f(x)$, *где*

$$f_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{-i\frac{\pi}{2\lambda}}xy\right)g^{(+)}(y)dy + \right.$$

$$\left. + e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\int_0^a \Phi_{\rho,\mu}\left(e^{i\frac{\pi}{2\lambda}}xy\right)g^{(-)}(y)dy\right\}.$$

Справедливы неравенства

$$\int_0^\infty \left|g^{(\pm)}(y)\right|^2dy \le 2\pi\int_0^\infty |f(x)|^2dx,$$

$$\int_0^\infty |f(x)|^2dx \le \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^\infty \left|g^{(+)}(y)\right|^2dy + \int_0^\infty \left|g^{(-)}(y)\right|^2dy\right\}.$$

Abstract. It is shown that the inversion kernel for the Watson-Djrbashian's type integral transforms with the kernels ${}_1F_0(z,\rho,\mu)$ and $\nu_\rho(z)$ is the entire function $\Phi_{\rho,\mu}(z)$ introduced by M.M.Djrbashian and R. A. Baghyan in their studies of the integral representations of the function $E_\rho(z,\mu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Акопян. "Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра", Изв. АН Арм. ССР, физ.-мат. науки, том 15, № 1, стр. 13 - 36, 1962.
2. М. М. Джрбашян, Р. А. Багиян, "Об интегральных представлениях и мерах, ассоциированных функциями типа Миттаг-Леффлера", Изв. АН Арм. ССР, Математика, том 10, № 6, стр. 483 - 508, 1975.
3. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Москва–Ленинград, 1948.
4. М. М. Джрбашян, Интегральные представления и представления функций в комплексной области, Наука, Москва, 1966.
5. Е. Титчмарш, Теория функций, Наука, Москва, 1980.
6. М. М. Джрбашян, "Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций", Изв. АН СССР, сер. мат., том 19, стр. 133 - 190, 1955.

Поступила 11 октября 2004