Известия НАН Армении. Математика, 39, № 5, 2004, 79-89

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА $L_1(\mathbf{R})$ ФУНКЦИОНАЛЬНЫМИ РЯДАМИ С АБСОЛЮТНО СХОДЯЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ар. А. Вагаршакян

Ереванский государственный университет
E-mail : armensci@yahoo.com

Резюме. В теории всплесков проблема представления пространства функциональными рядами обычно ставится для пространства $L_2(\mathbf{R})$. В этой статье мы ставим задачу для пространства $L_1(\mathbf{R})$, что существенно меняет ситуацию. В частности, пространство $L_1(\mathbf{R})$ не обладает безусловным базисом, и, следовательно, рассматриваемые представления не обладают свойством единственности.

§1. ВВЕДЕНИЕ И НЕОБХОДИМЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В настоящей статье мы рассматриваем проблему представления функций из пространства $L_1(\mathbf{R})$ функциональными рядами с абсолютно сходящимися коэффициентами. Сначала мы представляем некоторые классические результаты, непосредственно связанные с этой проблемой : теорема Винера о полных системах в пространстве $L_1(\mathbf{R})$ и результат С. Я. Хавинсона [6], обеспечивающий условия для представления элементов из Банаховых пространств рядами с абсолютно сходящимися коэффициентами. После этого мы рассматриваем некоторые представления пространства $L_1(\mathbf{R})$ системами, порожденными сдвигами и сжатиями данной функции. Полученные результаты мы сравниваем с условиями полноты. Пусть M является подмножеством $L_1(\mathbf{R})$. Обозначим через I_M замыкание множества всех функций, допускающих представление в виде конечной суммы

$$\sum c_{k,n} f_k(x + x_{k,n}),$$

где $f_k(x)$ принадлежат M, а $c_{k,n}, x_{k,n}$ – произвольные действительные числа.

Теорема 1 (Н. Винер). Равенство $I_M = L_1(\mathbf{R})$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует точки x_0, где преобразования Фурье всех функций из M обращаются в нуль.

Замечание 1. Если существует лишь конечное множество точек $x_1, ..., x_n$, где преобразования Фурье семейства M обращаются в нуль, то

$$I_M = \{f(x) \in L_1(-\infty, \infty) : \Im f(x_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где через $\Im$ обозначен оператор преобразования Фурье.

Замечание 2. Из теоремы Малявина (см. [1], стр. 70), можно сделать заключение, что существует некоторое закрытое множество $E \subset R$ и соответствующее множество функций $M \subset L_1(\mathbf{R})$ такое, что преобразование Фурье всех функций семейства M обращается в нуль только в точках множества E, но

$$I_M \neq \{f(x) \in L_1(-\infty, \infty) : \Im f(x) = 0,\ x \in E\}.$$

Замечание 3. Если функция $\varphi \in L_1(\mathbf{R})$ и числовая последовательность λ_n таковы, что

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx \neq 0,$

2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty,$

то семейство функций $M = \{\varphi(\lambda_k \cdot x),\ k = 1, 2, \ldots\}$ удовлетворяет условию теоремы 1.

Определение 1. Последовательность элементов $\varphi_k \in X$ называется усиленно полной в Банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$, если для любого $f \in X$ и $\epsilon > 0$ существуют некоторые числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\| < \epsilon \tag{2}$$

и одновременно $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |c_k| \leq \|f\|$.

Теорема 2 (С. Я. Хавинсон). Пусть X - Банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Тогда последовательность $\{\varphi_k, k = 1, 2, \ldots\} \subset X$ усиленно полна тогда и только тогда, когда для произвольного функционала $l \in X^*$ из условий

$$|l(\varphi_k)| \leq 1, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \textit{следует, что} \quad \|l\|_{X^*} \leq 1.$$

Лемма 1. Если последовательность $\varphi_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$ ограничена и усиленно полна, то для любого $\epsilon > 0$ и $f \in X$ существуют числа $c_1, c_2, \ldots$ такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \right\| = 0 \tag{3}$$

и одновременно $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k| \le (1+\epsilon)\|f\|$.

Доказательство : Достаточно доказать наше предложение для случая $f \neq 0$. Согласно теореме 2 существуют числа $c_1^{(1)}, \ldots, c_{m_1}^{(1)}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)}\varphi_k \right\| < \frac{\epsilon}{2}\|f\|$$

и одновременно

$$\sum_{k=1}^{m_1} |c_k^{(1)}| \le \|f\|.$$

Применяя теорему 2 к функции

$$f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)}\varphi_k,$$

получаем, что существуют числа $c_1^{(2)}, \ldots, c_{m_2}^{(2)}$ такие, что

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)}\varphi_k - \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)}\varphi_k \right\| < \frac{\epsilon}{4}\|f\| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{m_2} |c_k^{(2)}| \le \frac{\epsilon}{2}\|f\|.$$

Продолжая этот процесс бесконечно, мы строим последовательности

$$c_k^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, m_j$$

такие, что для любого $N = 1, 2, \ldots$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{m_1} c_k^{(1)}\varphi_k - \sum_{k=1}^{m_2} c_k^{(2)}\varphi_k - \ldots - \sum_{k=1}^{m_N} c_k^{(N)}\varphi_k \right\| < \frac{\epsilon}{2^N}\|f\| \tag{4}$$

и одновременно

$$\sum_{k=1}^{m_N} |c_k^{(N)}| \le \frac{\epsilon}{2^{N-1}}\|f\|,$$

и для удобства предположим, что $c_k^{(N)} = 0, \quad k = m_N + 1, \ldots$.

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_k^{(j)}\right| \le \|f\| + \frac{\epsilon}{2}\|f\| + \frac{\epsilon}{4}\|f\| + \ldots = (1+\epsilon)\|f\|.$$

Значит, ряд

$$c_k = \sum_{j=1}^{\infty} c_k^{(j)}$$

сходится для любых $k = 1, 2, \ldots$, и

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left|c_k^{(j)}\right| \le (1+\epsilon)\|f\|.$$

Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что

$$\lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(1)}\varphi_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(2)}\varphi_k - \ldots - \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(N)}\varphi_k \right\| =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left\| f - \sum_{k=1}^{\infty}(c_k^{(1)} + \ldots + c_k^{(N)})\varphi_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k \right\|$$

так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} c_k^{(j)} \right)\varphi_k \right\| \le \sup_k \|\varphi_k\| \sum_{j=N+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|c_k^{(j)}\right|.$$

§2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определение 2. Точка $x_0 \in (-\infty, \infty)$ называется точкой Лебега функции $h(x) \in L_1(\mathbf{R})$, если

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}|h(x) - h(x_0)|dx = 0. \tag{5}$$

Хорошо известно, что для любой функции $h(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ почти все точки $x \in (-\infty, \infty)$ являются точками Лебега.

Лемма 2. Пусть $\varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx = 1$. Пусть, далее, $h(x) \in L_\infty(-\infty, \infty)$ и x_0 является точкой Лебега для $h(x)$. Если λ_n и x_n, $n = 1, 2, \ldots$ являются действительными последовательностями такими, что

1. $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty$;
2. $\limsup_{n\to\infty}\lambda_n|x_n - x_0| < \infty$,

то из неравенства

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\lambda_n\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\lambda_n(x_n - x_0))h(x)dx\right| \le 1$$

следует, что $|h(x_0)| \le 1$.

Доказательство : Без потери общности, можем считать, что $x_0 = 0$. Мы можем также считать, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = C$ существует и конечен. Очевидно,

$$\left|\left|\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n(x - x_n))h(x)dx\right| - \left|\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n x - C)h(x)dx\right|\right| \le$$

$$\le \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|\,|\varphi(\lambda_n(x - x_n)) - \varphi(\lambda_n x - C)|\,dx \le$$

$$\le \operatorname{supess}|h(x)|\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda_n(x - x_n)) - \varphi(\lambda_n x - C)|\,dx =$$

$$= \operatorname{supess}|h(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x - \lambda_n x_n) - \varphi(x - C)|\,dx.$$

Хорошо известно, что последний интеграл стремится к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_n x - C)h(x)dx\right| \le 1.$$

С другой стороны, очевидно, что

$$|h(0)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(0)\lambda_n \varphi(\lambda_n x - C)dx\right| \le \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\lambda_n\varphi(\lambda_n x - C)dx\right| +$$

$$+\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot |\varphi(\lambda_n x - C)|\,dx.$$

Значит, чтобы завершить доказательство, достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot |\varphi(\lambda_n x - C)|\,dx = 0.$$

Для данного $\epsilon > 0$ найдем число A такое, что

$$\int_{|x|>A} |\varphi(x - C)|\,dx < \epsilon,$$

и число N, для которого

$$\int_{E(N)} |\varphi(x - C)|\,dx < \epsilon,$$

где

$$E(N) = \{x : x \in [-A, A],\ |\varphi(x - C)| \ge N\}.$$

Тогда

$$\lambda_n \int_{-\infty}^{\infty} |h(x) - h(0)| \cdot |\varphi(\lambda_n x - C)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)|\, dx =$$

$$= \int_{|x| \geq A} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)|\, dx + \int_{E(N)} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)|\, dx +$$

$$+ \int_{[-A,A] \setminus E(N)} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| |\varphi(x - C)|\, dx \leq 2\|h(x)\|_\infty \int_{|x| \geq A} |\varphi(x - C)|\, dx +$$

$$+ 2\,\|h(x)\|_\infty \int_{E(N)} |\varphi(x - C)|\, dx + N \int_{-A}^{A} \left| h\left(\frac{x}{\lambda_n}\right) - h(0) \right| dx \leq$$

$$\leq 4\epsilon\,\|h(x)\|_\infty + 2NA \frac{\lambda_n}{2A} \int_{-A/\lambda_n}^{A/\lambda_n} |h(x) - h(0)|\, dx,$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$.

Замечание 4. Если функция $h(x)$ непрерывна в точке x_0, то вместо условия 2 в лемме 2 достаточно потребовать, чтобы $\lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$.

Замечание 5. Применяя лемму 2 к функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty,$$

получаем следующий результат, который следует также из хорошо известной теоремы Фату :

Пусть $x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots$ – последовательность в верхней полуплоскости ($y_n > 0$), такая, что $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, и пусть для почти всех точек $t_0 \in (-\infty, +\infty)$ можно выбрать подпоследовательность $x_{n_k} + iy_{n_k}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую условию $\sup\limits_k y_{n_k}^{-1} |t_0 - x_{n_k}| < \infty$. Если функция $h(t) \in L_\infty(\mathrm{R})$ такова, что

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y_n}{(x_n - t)^2 + y_n^2} h(t) dt \right| \leq 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

тогда $\|h(t)\|_\infty \leq 1$.

Теорема 3. Пусть функция $\varphi(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = c \neq 0,$$

и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ – действительные последовательности, удовлетворяющие условиям

1. $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$, *2. для почти всех $x_0 \in R$ существует подпоследовательность x_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что*

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda_{n_k} |x_{n_k} - x_0| < \infty.$$

Тогда для любых $\epsilon > 0$ и функции $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ имеет место представление

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \varphi(\lambda_n (x - x_n)),$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \frac{1+\epsilon}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx.$$

Доказательство : Без потери общности мы можем предположить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1.$$

Для того, чтобы проверить удовлетворяются ли условия теоремы 2, предположим, что $l \in L_1^*(-\infty, \infty)$. Тогда, по теореме Рисса существует функция $h(x) \in L_\infty(\mathbf{R})$ такая, что для каждого $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ имеем

$$l(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) h(x) dx,$$

и $||l||_{L_1^*} = supess_x |h(x)|$. Если для всех $n = 1, 2, \ldots$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \lambda_n \varphi(\lambda_n (x - x_n)) dx \right| = |l(\lambda_n \varphi(\lambda_n (x - x_n)))| \leq 1,$$

то из условий теоремы следует, что для почти всех точек Лебега x_0 функции $h(x)$ существуют подпоследовательности λ_{n_k} и x_{n_k} такие, что

1. $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k} = +\infty$,
2. $\limsup_{k\to\infty} \lambda_{n_k} |x_{n_k} - x_0| < \infty$

и

$$\limsup_{k\to\infty} \left| \lambda_{n_k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda_{n_k} (x_{n_k} - x_0)) h(x) dx \right| \leq 1.$$

Из леммы 2 мы заключаем, что $|h(x_0)| \leq 1$. Следовательно, $||l||_{L_1^*} = ||h(x)||_\infty \leq 1$.

Замечание 6. Представление в теореме 3 не является единственным : в противном случае функциональные ряды $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, являлись бы безусловным базисом в пространстве $L_1(\mathbf{R})$, что невозможно (см. [3]). Это замечание подчеркивает существенное различие между теорией всплесков и нашим подходом к представлениям.

Замечание 7. Условие $\lim_{n\to\infty}\lambda_n = +\infty$ из теоремы 3 не может быть опущено. Ниже мы докажем, что для любой функции $\varphi(x) \in L_1(-\infty,\infty)$ и для любых последовательностей $0 < \lambda_n < \lambda < +\infty$, $n = 1,2,\ldots$ и x_n, $n = 1,2,\ldots$ семейство функций

$$\varphi_n(x) = \lambda_n\varphi(\lambda_n(x - x_n)), \quad n = 1,2,\ldots,$$

не может быть усиленно полным в пространстве $L_1(\mathbf{R})$. Более того, существует такая функция $f \in L_1(\mathbf{R})$, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k(x)\right| dx = 0$$

влечет

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n| = \infty.$$

Доказательство : Предположим, что верно обратное утверждение, т.е. для любой функции $f(x) \in L_1(\mathbf{R})$ существует последовательность чисел $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k - f\right\| = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| < \infty.$$

Тогда ограниченный оператор $\chi \in BL(l_1, L_1(\mathbf{R}))$

$$\chi(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$$

является сюръективным. Кроме того, заметим, что множество $Ker(\chi) = \{c \in l_1 : \chi(c) = 0\}$ замкнуто в l_1. Следовательно, оператор χ индуцирует ограниченный, линейный и инъективный оператор

$$\chi_0 : l_1/Ker(\chi) \to L_1(\mathbf{R}).$$

Применяя теорему Банаха об ограниченности обратного оператора для χ_0, мы заключаем, что χ_0^{-1} ограничен. Следовательно, для любой константы $C > \|\chi_0^{-1}\|$ и для любой $f \in L_1(\mathbf{R})$ существует числовая последовательность $\{c_k; k = 1,2,\ldots\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\| = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}|c_k| \le C\|f\|.$$

Поэтому, для любых $f \in L_1(\mathbf{R})$ и $\epsilon > 0$ существуют числа c_k, $k = 1,2,\ldots,N$ такие, что

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k\right\| < \epsilon \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{N}|c_k| \le C\|f\|.$$

Согласно теореме Хавинсона, это условие эквивалентно утверждению, что для любого $l \in L_1^*$ условия $\{|l(\varphi_k)| \leq 1,\ k = 1, 2, \ldots\}$ влекут $\|l\|_{L_1^*} \leq C$.

Покажем, что последнее утверждение не верно. Заметим, что существует функция $\delta(\epsilon)$ такая, что из $m(E) \leq \delta$ следует

$$\int_E |\varphi(x)| dx \leq \epsilon.$$

Для функционалов

$$l_n(f) = n \int_0^{\frac{1}{\lambda}\delta\left(\frac{1}{n}\right)} f(t)dt,$$

действующих на пространстве $L_1(\mathbf{R})$, имеем

$$|l_n(\varphi_k)| = \left| n \int_0^{\frac{1}{\lambda}\delta\left(\frac{1}{n}\right)} \varphi_k(t)dt \right| \leq n \int_0^{\frac{1}{\lambda}\delta\left(\frac{1}{n}\right)} |\varphi_k(t)|dt =$$

$$= n \int_{-\lambda_k \cdot x_k}^{\frac{\lambda_k}{\lambda}\delta\left(\frac{1}{n}\right) - \lambda_k \cdot x_k} |\varphi(t)|dt \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1, \quad n, k = 1, 2, \ldots,$$

так как $\frac{\lambda_k}{\lambda}\delta\left(\frac{1}{n}\right) \leq \delta\left(\frac{1}{n}\right)$. Следовательно, $|l_n(\varphi_k)| \leq 1$ $(n, k = 1, 2, \ldots)$ хотя $\|l_n\| = n \to \infty$, т.е. получаем противоречие, что и завершает доказательство.

Теорема 4. Пусть $\varphi(x) = 1/2$ *для* $-1 \leq x \leq 1$ *и* $\varphi(x) = 0$ *вне сегмента* $[-1, 1]$. *Далее, пусть* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ *и* $\{x_n, n = 1, 2, \ldots\}$ *- произвольная последовательность действительных чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны :*

1. последовательность

$$\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n)), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

полна в $L_1(\mathbf{R})$,

2. последовательность $\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \ldots$ *усиленно полна в* $L_1(\mathbf{R})$,

3. множество $R_1 \setminus \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} \Delta_k$, *где*

$$\Delta_n = \operatorname{supp}\left(\lambda_n \varphi(\lambda_n(x - x_n))\right) = \left[\lambda_n x_n - \frac{1}{\lambda_n}, \lambda_n x_n + \frac{1}{\lambda_n}\right],$$

имеет нулевую Лебегову меру.

Доказательство : Сначала докажем, что $1 \Rightarrow 3$. Предположим, что обратное утверждение верно, т.е.

$$m\left(\mathbf{R} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k\right) > 0,$$

хотя последовательность (6) полна. Тогда существует $n_0 \in N$ такое, что

$$m\left(\mathbf{R} \setminus \bigcup_{k>n_0} \Delta_k\right) > 0. \tag{7}$$

Обозначим через

$$F = \mathbf{R} \setminus \bigcup_{k>n_0} \Delta_k \quad \text{и} \quad L_F = \{f \in L_1(\mathbf{R}) : f(x) = 0,\, x \notin F\}$$

и заметим, что только конечное число носителей функций $\lambda_n\varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \ldots$, пересекается с F. С другой стороны, согласно (7), подпространство L_F является бесконечномерным. Отсюда, последовательность $\lambda_n\varphi(\lambda_n(x - x_n))$ не полна в L_F.

Чтобы доказать, что $3 \Rightarrow 2$, заметим, что при условии 3 последовательность $\lambda_n\varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию теоремы Хавинсона. Действительно, предположим, что $h(x) \in L_\infty(\mathbf{R})$ такова, что

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\lambda_n\varphi(\lambda_n(x - x_n))dx\right| \le 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Очевидно, что для каждой точки $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$ существует подпоследовательность интервалов Δ_{k_n} такая, что $x_0 \in \Delta_{k_n}$ для любого $n \in N$. Обозначая через δ_n наименьшее положительное число, для которого $\Delta_{k_n} \subset [x_0 - \delta_n; x_0 + \delta_n]$, легко заметить, что

$$\delta_n < 2 \cdot m(\Delta_{k_n}) < \frac{4}{\lambda_{k_n}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Если x_0 – Лебегова точка для $h(x)$ и $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$, то

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\lambda_{k_n}\varphi(\lambda_{k_n}(x - x_{k_n}))\,dx - h(x_0)\right| = \left|\frac{1}{m(\Delta_{k_n})}\int_{\Delta_{k_n}} (h(x) - h(x_0))\,dx\right| \le$$
$$\le \frac{2}{\delta_n}\int_{x_0-\delta_n}^{x_0+\delta_n} |h(x) - h(x_0)|dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Принимая во внимание (8), мы получаем, что если x_0 есть Лебегова точка для функции $h(x)$, то $|h(x_0)| \le 1$. Согласно условию 3, почти все $x_0 \in R$ принадлежат множеству $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Delta_k$ и одновременно являются точками Лебега для $h(x)$. Следовательно, $\|h\|_\infty \le 1$. Таким образом, последовательность $\lambda_n\varphi(\lambda_n(x - x_n))$, $n = 1, 2, \ldots$ удовлетворяет условиям теоремы Хавинсона. Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что $2 \Rightarrow 1$.

Замечание 8. Утверждение 3 теоремы 4 означает, что почти все точки покрываются бесконечным числом интервалов Δ_n.

Abstract. In the wavelet theory the problem of representation of a space by functional series is usually posed for $L_2(\mathbf{R})$. The paper poses the problem for the space $L_1(\mathbf{R})$, and this essentially changes the situation. In particular, the space $L_1(\mathbf{R})$ have no unconditional basis, and hence considered representations do not possess uniqueness property.

ЛИТЕРАТУРА

1. J.-P. Kahane, Series de Fourier Absolument Convergentes, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
2. Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, New-York, 1968.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды, Москва, 1999.
4. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимаций, Москва, 1947.
5. С. Я. Хавинсон, "Теория экстремальных функций", Успехи Мат. Наук, том 18, выпуск 2(110), стр. 25 – 98, 1963.
6. С. Я. Хавинсон, "Понятие полноты", Изв. АН СССР, том 6, no. 1, стр. 221 – 234, 1971.

Поступила 17 сентября 2004