Известия НАН Армении. Математика, 39, № 5, 2004, 67–78

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

Н. Е. Товмасян и А. О. Бабаян

Государственный Инженерный Университет Армении
E-mail : armenak@web.am

Резюме. В работе рассматривается задача Дирихле для эллиптических уравнений и слабо связанных систем второго порядка в полуплоскости. Решение ищется в классе дважды непрерывно дифференцируемых в полуплоскости и непрерывных вплоть до границы функций, имеющих конечный порядок роста на бесконечности. Получены необходимые и достаточные условия существования решения неоднородной задачи и выписываются в явном виде решения соответствующей однородной задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\Pi^+ = \{(x, y) : \ y > 0\}$ – верхняя полуплоскость комплексной плоскости и R – ее граница. В Π^+ рассматривается уравнение

$$A_0 u_{xx} + A_1 u_{xy} + A_2 u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2 такие комплексные постоянные, что для корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения $A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 = 0$ выполняются соотношения $\operatorname{Im}\lambda_1 > 0$ и $\operatorname{Im}\lambda_2 < 0$. На границе R решение $u(x, y)$ уравнения (1) удовлетворяет условию Дирихле

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in R, \tag{2}$$

где $f(x)$ – заданная на R непрерывная функция, допускающая оценку

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|^\alpha), \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ – фиксированное число. Здесь и далее через c обозначаем все постоянные. Решение u задачи (1), (2) ищется в классе B_α дважды непрерывно дифференцируемых Π^+, непрерывных в $\Pi^+ \cup R$ функций, растущих на бесконечности не быстрее r^α :

$$|u(x,y)| \leq c(1+r^\alpha), \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{4}$$

В случае, когда $f(x)$ ограничена и бесконечно дифференцируема, задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в полуплоскости в классе ограниченных функций имеет единственное решение (см.[1]). В настоящей работе эти ограничения существенно ослаблены. В частности, доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $m = [\alpha]$, тогда однородная задача (1), (2) (при $f \equiv 0$) в B_α имеет m линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$P_m(x+\lambda_1 y) - P_m(x+\lambda_2 y),$$

где $P_m(z)$ - произвольный многочлен порядка не выше m.

Теорема 2. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в B_α всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда выполняется

$$\sup_{r\geq 0}\left|\int_{-r}^{r}\frac{f(x)\,dx}{i+x^{\alpha+1}}\right| \leq c.$$

Отметим, что решение неоднородной задачи (1), (2) определяется в явном виде. В §4 мы расмотрим задачу (1), (2) в B_α для слабо связанных эллиптических систем (где A_0, A_1, A_2 – квадратные матрицы порядка n, а $u(x,y)$ – n-мерная вектор-функция), когда характеристическое уравнение этой системы

$$\det(A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2) = 0 \tag{5}$$

имеет только простые корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\mu_1,\ldots,\mu_n$ такие, что $\operatorname{Im}\lambda_k > 0$, $\operatorname{Im}\mu_k < 0$, $k = 1,\ldots,n$. Слабая связанность эллиптической системы второго порядка определена в [2]. В последнем параграфе исследуется задача (1), (2) для уравнений и слабо связанных систем при более сильных ограничениях на рост решения в окрестности бесконечно удаленной точки.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

В этом параграфе мы приведем некоторые утверждения, необходимые для исследования задачи (1), (2).

Лемма 1. Если $u(x,y)$ – решение однородной задачи (1), (2), удовлетворяющее соотношению (4), то $u(x,y)$ – полином порядка не выше $m = [\alpha]$.

Доказательство : Пусть $u(x,y)$ есть решение однородной задачи (1), (2), тогда

$$u(x,y) = \Phi(x+\lambda_1 y) - \Psi(x+\lambda_2 y), \tag{6}$$

где $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ – функции, аналитические в Π^+ и в дополнении к $\overline{\Pi^+}$ соответственно. Пусть $h > 0$ и $u_h(x,y) \equiv u(x, y+h)$. Тогда функция $u_h(x,y)$ является решением задачи (1), (2) с граничной функцией $u(x,h) = \varphi_h(x)$. Решение $u(x,y)$ эллиптического уравнения (1) имеет порядок α на бесконечности. Следовательно, используя [3], доказываем, что при $y \geq h$ частные производные решения $u(x,y)$ также имеют порядок α на бесконечности. Так как

$$\Phi'(x+\lambda_1(y+h)) = (\lambda_2-\lambda_1)^{-1}\left(\lambda_2 \frac{\partial u_h}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u_h}{\partial y}(x,y)\right),$$

то получим, что функция $\Phi(x+\lambda_1(y+h))$ имеет порядок не выше $\alpha+1$ на бесконечности. Аналогичная оценка выполняется для функции $\Psi(x+\lambda_2(y+h))$. Таким образом, после подстановки функции $u_h(x,y) = \Phi(x+\lambda_1(y+h)) - \Psi(x+\lambda_2(y+h))$ в условие (2), мы приходим к задаче сопряжения с граничной функцией $\varphi_h(x)$, удовлетворяющей условию Гёльдера, в классе аналитических функций, непрерывных вплоть до границы и имеющих в бесконечности порядок не выше $\alpha+1$. Используя результаты, полученные в [4], запишем общее решение этой задачи :

$$\Phi(x+\lambda_1(y+h)) = \frac{(x+\lambda_1 y+i)^{m+1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi_h(t)\,dt}{(t+i)^{m+1}(t-x-\lambda_1 y)} + P_h(x,y).$$

Здесь $P_h(x,y)$ – полином порядка не выше $m+1$. Переходя к пределу при $h \to 0$ и используя теорему Лебега, получим, что $P_h(x,y)$ сходится к некоторому полиному $P(x,y)$ того же порядка, и, следовательно, $\Phi(x+\lambda_1 y)$ является полиномом порядка не выше $m+1$. Аналогично рассуждая, доказываем, что $\Psi(x+\lambda_2 y)$ – полином того же порядка. Используя (6) и (4), завершаем доказательство.

Пусть $g(x)$ – финитная непрерывная функция. Тогда легко проверяется, что функция

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\left(\frac{1}{t-x-\lambda_1 y} - \frac{1}{t-x-\lambda_2 y}\right)dt \tag{7}$$

является ограниченным решением задачи (1), (2). В частности, в качестве $g(x)$ можно взять финитную непрерывную функцию, совпадающую с $f(x)$ в окрестности нуля. Поэтому, не ограничивая общности, мы предположим, что граничная функция $f(x)$ обращается в нуль в окрестности нуля.

Лемма 2. Функция

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}}\left(\frac{(x+\lambda_1 y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\lambda_1 y} - \frac{(x+\lambda_2 y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\lambda_2 y}\right)dt \tag{8}$$

является решением задачи (1), (2).

Доказательство : Из (3) следует, при $y > 0$ интеграл (8) сходится и является решением уравнения (1).

Пусть $f_1(x)$ – финитная, непрерывная функция, совпадающая с $f(x)$ в окрестности некоторой точки x_0 и пусть $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. Тогда

$$w(x,y) = v_1(x,y) + w_2(x,y) + \sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{(x+\lambda_1 y)^k - (x+\lambda_2 y)^k}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_1(t)}{t^{k+1}}\,dt, \tag{9}$$

где v_1 и w_2 – функции вида (7) и (8), при $g = f_1$ и $f = f_2$ соответственно. Очевидно, $w_2(x,y) \to 0$ и $v(x,y) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$ и $y \to +0$. Следовательно w удовлетворяет граничному условию (2).

Лемма 3. Пусть $d = 2\max(1+|\lambda_1|, 1+|\lambda_2|)$ *и*

$$v_0(x,y) = \frac{(x+\lambda_1 y)^{[\alpha]} - (x+\lambda_2 y)^{[\alpha]}}{2\pi i}\int_{-dr}^{dr}\frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}}\,dt, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{10}$$

Тогда для функции (8) выполняется неравенство

$$|w(x,y) - v_0(x,y)| \le c(1+r^\alpha). \tag{11}$$

Доказательство : Представим функцию $w(x,y)$ в виде

$$w(x,y) = v_0(x,y) + w_2(x,y) + u(x,y) + \sum_{k=1}^{[\alpha]-1}\frac{(x+\lambda_1 y)^k - (x+\lambda_2 y)^k}{2\pi i}\int_{-dr}^{dr}\frac{f(t)}{t^{k+1}}\,dx, \tag{12}$$

где

$$w_2(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|\ge dr}\frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}}\left(\frac{(x+\lambda_1 y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\lambda_1 y} - \frac{(x+\lambda_2 y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\lambda_2 y}\right)dt$$

и

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-dr}^{dr} f(t)\left(\frac{1}{t-x-\lambda_1 y} - \frac{1}{t-x-\lambda_2 y}\right)dt.$$

Оценим слагаемые в (12) отдельно. Из неравенств $|x+\lambda_k y| \le r(1+|\lambda_k|)$ $(k=1,2)$ следует, что при $|t| \ge dr$,

$$|t-x-\lambda_k|^{-1} \le (|t| - |x+\lambda_k y|)^{-1} \le 2|t|^{-1}, \quad k = 1,2.$$

Используя эту оценку и обозначая $\varepsilon = \alpha - [\alpha]$, получим при $r \to \infty$

$$r^{-\alpha}|w_2(x,y)| \le c \sup_{|t|\ge dr} (|t|^{-\alpha}|f(t)|) \int\limits_{|\tau|\ge d} \tau^{2-\varepsilon} d\tau \le c \sup_{|t|\ge dr} (|t|^{-\alpha}|f(t)|) \le c.$$

Далее, при $r \to \infty$,

$$\frac{|u(x,y)|}{r^{\alpha}} \le \left| \frac{r^{-\alpha}}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} f(t) \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) y\, dt}{(t - x - \lambda_1 y)(t - x - \lambda_2 y)} \right| \le$$

$$\le c \frac{1}{r^{\alpha}} \sup_{|t|\le dr} |f(t)| \int_{-dr}^{dr} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\, dt \le c \frac{1}{r^{\alpha}} \sup_{|t|\le dr} |f(t)| \le c.$$

Аналогично предыдущей оценке, если $k = 1, \ldots, [\alpha] - 1$ получим

$$\left| \frac{(x + \lambda_1 y)^k - (x + \lambda_2 y)^k}{2\pi i r^{\alpha}} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{k+1}}\, dx \right| \le c r^{-\alpha} \sup_{|t|\le dr} |f(t)| \le c$$

при $r \to \infty$. Суммируя полученные соотношения, завершаем доказательство.

Лемма 4. Если $\alpha \ne [\alpha]$, то выполняется $|v_0(x,y)| \le c(1 + r^{\alpha})$.

Доказательство : Из условия следует, что $0 < \varepsilon < 1$ (напомним, что $\varepsilon = \alpha - [\alpha]$). Таким образом, в силу условия (3), получаем

$$\frac{|v_0(x,y)|}{r^{\alpha}} \le \frac{c}{r^{\varepsilon}} \int_{\delta}^{dr} \left| \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right| \frac{dt}{t^{1-\varepsilon}} \le c \sup_{|t|\ge \delta} \left| \frac{f(t)}{t^{\alpha}} \right| \le c, \quad r > 1.$$

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 1 И 2

Доказательство Теоремы 1. Пусть u – решение однородной задачи (1) – (2) в B_{α}. Тогда из леммы 1 и (4) следует, что u – полином, порядок которого не выше $m = [\alpha]$. Запишем общее решение задачи (1) в виде (6). Так как $\Phi'(x + \lambda_1 y)$ и $\Psi'(x + \lambda_2 y)$ линейно выражаются через первые производные $u(x,y)$, являющейся полиномом порядка m, то $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ также являются полиномами порядка m. Не ограничивая общности, можем предполагать, что $\Phi(0) = 0$ в представлении (6). При этом предположении функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ однозначно определяются по функции $u(x,y)$. Далее, подставляя $u(x,y)$ в однородное условие (2), получим, что $\Phi(x) = \Psi(x)$ при $-\infty < x < \infty$. Следовательно, функция $\Psi(z)$ является аналитическим продолжением $\Phi(z)$ в нижнюю полуплоскость $\mathbb{C} \setminus \overline{\Pi^+}$. Поэтому, по теореме Лиувилля $\Phi(z) = P_m(z)$ и $\Psi(z) = P_m(z)$, где $P_m(z)$ есть полином порядка m. Отметим, что $P_m(0) = 0$, так как $\Phi(0) = 0$. Подставляя полученные функции в представление (6), получим общее решение однородной задачи (1), (2). Из единственности представления (6) при $\Phi(0) = 0$ следует, что задача (1), (2) в B_{α} имеет m линейно независимых решений.

Доказательство Теоремы 2. Если $\alpha \neq [\alpha]$ и w есть функция (8), то $|w(x,y)| \leq c(1+r^\alpha)$ в силу лемм 3 и 4. Из этой оценки и леммы 2 получаем, что функция w является решением неоднородной задачи (1), (2) и принадлежит B_α. Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть $\alpha = [\alpha]$. Предположим сначала, что неоднородная задача (1), (2) имеет решение u в B_α и пусть w – функция (8). Тогда из леммы 2 следует, что функция $u_0 = w - u$ является решением однородной задачи (1), (2). Оценим порядок роста этого решения. Непосредственным вычислением проверяется следующая оценка для функции (10) :

$$|v_0(x,y)| \leq cr^\alpha \ln r, \quad r \geq 1.$$

Следовательно, используя лемму 3 и оценку (4), получим

$$|u_0(x,y)| \leq cr^\alpha \ln r, \quad r \geq 1. \tag{13}$$

Таким образом, решение u_0 однородной задачи (1), (2) допускает оценку (13) и, следовательно, u_0 является полиномом относительно x, y, порядок которого не превосходит α (см. лемму 1), т.е. $u_0(x,y) = P_m(x,y)$. Итак, решение неоднородной задачи (1), (2) в B_α можно представить в виде

$$u(x,y) = w(x,y) + P_m(x,y). \tag{14}$$

Далее, из (14) имеем

$$\frac{u(x,y)}{r^\alpha} = \frac{w(x,y) - v_0(x,y)}{r^\alpha} + \frac{P_m(x,y)}{r^\alpha} + \frac{(x+\lambda_1 y)^\alpha - (x+\lambda_2 y)^\alpha}{2\pi i r^\alpha} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt,$$

где v_0 – функция (10). Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, разность $(x+\lambda_1 y)^\alpha - (x+\lambda_2 y)^\alpha$ является полиномом порядка α, следовательно, на некотором луче $x = ky$ имеем

$$r^{-\alpha}\left|(x+\lambda_1 y)^\alpha - (x+\lambda_2 y)^\alpha\right| = c \neq 0.$$

При больших r из этого соотношения, используя лемму 3, ограниченность $r^{-\alpha} P_m(x,y)$ и (4), получим

$$\left| \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \right| \leq c. \tag{15}$$

Таким образом, необходимость условия теоремы 2 доказана.

Для доказательства достаточности рассмотрим функцию (8). Из леммы 2 следует, что эта функция – решение задачи (1), (2). Чтобы проверить неравенство (4), представим $w(x,y)$ в виде

$$w(x,y) = w(x,y) - v_0(x,y) + ((x+\lambda_1 y)^\alpha - (x+\lambda_2 y)^\alpha) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt \right).$$

Из (15) и (11) получим, что w удовлетворяет оценке (4).

Замечание 1. При выполнений условий теоремы 2, решение задачи (1), (2) определяется формулой

$$u(x,y) = w(x,y) + \sum_{k=1}^{m} c_k((x+\lambda_1 y)^k - (x+\lambda_2 y)^k),$$

где $w(x,y)$ – функция (8), а $c_1,\ldots,c_m$ – произвольные постоянные.

§4. СЛАБО СВЯЗАННЫЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим случай, когда (1) слабо связанная система. Мы предполагаем, что вектор-функции f и u покомпонентно удовлетворяют соотношениям (3) и (4) соответственно. Так как система (1) – слабо связанная и корни уравнения (5) λ_k и μ_k простые, то (см. [2]) общее решение (1) допускает представление

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k \varphi_k(x+\lambda_k y) - \beta_k \psi_k(x+\mu_k y)\right), \tag{16}$$

где φ_k и ψ_k – аналитические функции в Π^+ и $\mathbb{C}\setminus\overline{\Pi^+}$ соответственно, а α_k, β_k – n-мерные постоянные векторы такие, что матрицы $P = (\alpha_1\cdots\alpha_n)$ и $Q = (\beta_1\cdots\beta_n)$ обратимы. Обозначим $\Phi(z) = (\varphi_1(z),\ldots,\varphi_n(z))^\top$ и $\Psi(z) = (\psi_1(z),\ldots,\psi_n(z))^\top$. Отметим, что при условии $\varphi(0) = 0$ разложение (16) определяется единственным образом.

Лемма 5. Пусть P и Q – постоянные, обратимые матрицы, $Im\,\lambda_k > 0$ и $Im\,\mu_k < 0$ при $k = 1,\ldots,n$, и

$$L_y(x,t) = diag\left(\frac{1}{t-x-\lambda_1 y},\ldots,\frac{1}{t-x-\lambda_n y}\right),$$

$$M_y(x,t) = diag\left(\frac{1}{t-x-\mu_1 y},\ldots,\frac{1}{t-x-\mu_n y}\right).$$

Тогда для любой финитной непрерывной n-мерной вектор-функции f

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[PL_y(x,t)P^{-1} - QM_y(x,t)Q^{-1}\right]f(t)\,dt = f(x). \tag{17}$$

Доказательство : Представим интеграл в (17) в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[PL_y(x,t)P^{-1} - QM_y(x,t)Q^{-1}\right]f(t)\,dt = I_1 + I_2 - I_3,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(t-x)^2+y^2}f(t)\,dt,$$

$$I_2 = P\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(L_y(x,t) - \frac{1}{t-x-iy}I\right)P^{-1}f(t)\,dt,$$

$$I_3 = Q\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(M_y(x,t) - \frac{1}{t-x+iy}I\right)Q^{-1}f(t)\,dt.$$

$I_1 \to f(x)$ при $y \to 0$, а для слагаемого I_2, используя равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}[L_y(x,t) - (t-x-iy)^{-1}I]dt = 0,$$

получим

$$I_2 = P\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}(L_y(x,t) - (t-x-iy)^{-1}I)(P^{-1}f(t) - P^{-1}f(x))\,dt,$$

т.е. $I_2 \to 0$ при $y \to 0$. Аналогично, $I_3 \to 0$, и лемма доказана. Перейдем к решению системы (1). Если $f(x)$ – финитная, непрерывная вектор-функция, то функция

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[PL_y(x,t)P^{-1} - QM_y(x,t)Q^{-1}]f(t)\,dt \tag{18}$$

является ограниченным решением системы (1). Из леммы 5 следует, что функция $v(x,y)$ удовлетворяет граничному условию (2). Таким образом, так же как и в случае одного уравнения, мы можем предполагать, что $f(x) = 0$ в окрестности нуля. Введем обозначения

$$L_{\alpha y}(x,t) = diag\left(\frac{(x+\lambda_1 y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\lambda_1 y},\ldots,\frac{(x+\lambda_n y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\lambda_n y}\right),$$

$$M_{\alpha y}(x,t) = diag\left(\frac{(x+\mu_1 y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\mu_1 y},\ldots,\frac{(x+\mu_n y)^{[\alpha]+1}}{t-x-\mu_n y}\right).$$

Аналогично лемме 2 доказывается

Лемма 6. Вектор-функция

$$v(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}[PL_{\alpha y}(x,t)P^{-1} - QM_{\alpha y}(x,t)Q^{-1}]\frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}}f(t)\,dt \tag{19}$$

является решением задачи (1), (2).

Следующее утверждение доказывается аналогично леммам 3 и 4 для одномерного случая.

Лемма 7. Обозначим

$$L = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad M = diag(\mu_1, \dots, \mu_n). \quad A = PLP^{-1}, \quad B = QMQ^{-1}. \tag{20}$$

Пусть $d = 2\max_{1 \le k \le n}(1 + |\lambda_k|, 1 + |\mu_k|)$ *и*

$$v_0(x, y) = \frac{(xI + yA)^{[\alpha]} - (xI + yB)^{[\alpha]}}{2\pi i} \int_{-dr}^{dr} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}}\, dt. \tag{21}$$

Тогда для функции (19) выполняется неравенство (11), где функция v_0 есть функция (21). Если $\alpha \neq [\alpha]$, то для v_0 выполняется неравенство леммы 4.

В случае слабо связанной системы (1) имеют место следующие теоремы о разрешимости задачи (1), (2).

Теорема 3. Пусть $m = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2) в B_α имеет mn линейно независимых решений. Общее же решение имеет вид (1), причем

$$\Phi(z) = P^{-1} S_m(z), \quad \Psi(z) = Q^{-1} S_m(z).$$

Здесь $S_m(z)$ ($S_m(0) = 0$) – n-мерная вектор-функция, элементы которой произвольные многочлены от z порядка не выше m.

Доказательство : Заметим, что формула общего решения неоднородной задачи (1), (2) в B_α получается аналогично случаю одного уравнения. Используя эту формулу, а также однозначность представления (1), получим, что однородная задача (1), (2) имеет nm линейно независимых решений.

Теорема 4. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в B_α всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда вектор-функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 2. Если $f(x) = 0$ в окрестности нуля, то функция w является частным решением задачи (1), (2).

Доказательство : При $\alpha \neq [\alpha]$ доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha = [\alpha]$. Рассмотрим матрицу

$$G(x, y) = (xI + Ay)^\alpha - (xI + By)^\alpha,$$

где A и B определены в (20). Раскрывая скобки, представим эту матрицу в виде

$$G(x, y) = \sum_{k=1}^{n} G_k y^k x^{n-k},$$

где G_k – некоторые постоянные матрицы и $G_1 = A - B$. Из слабой связанности системы (1) следует, что матрица $A - B$ невырождена (см. [2]). Следовательно, выполняется $\det(r^{-\alpha}G(x,y)) \to c \neq 0$ на некотором луче $x = ky$. Используя последнее соотношение и леммы 6 и 7, завершаем доказательство теоремы 4.

§5. ЗАДАЧА (1), (2) С ДРУГИМ ОГРАНИЧЕНИЕМ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

В этом параграфе мы рассмотрим задачу (1), (2) в более узком классе функций. Будем предполагать, что вместо оценки (3) граничная функция $f(x)$ в бесконечности удовлетворяет следующему условию :

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha} f(x) = 0, \tag{22}$$

где α – фиксированное положительное число. Соответственно, решение u задачи (1), (2) ищется в классе $B_{\alpha,0}$ дважды непрерывно дифференцируемых в Π^+, непрерывных в $\Pi^+ \cup R$ функций, растущих на бесконечности медленнее r^α :

$$\lim_{r\to\infty} r^{-\alpha} u(x,y) = 0, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{23}$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5. Пусть $m = [\alpha]$ при $\alpha \neq [\alpha]$ и $m = [\alpha]-1$ при $\alpha = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ имеет m линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$P_m(x+\lambda_1 y) - P_m(x+\lambda_2 y),$$

где $P_m(z)$ – произвольный полином порядка m.

Теорема 6. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ имеет решение тогда и только тогда, когда несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,dx}{i + x^{\alpha+1}}$$

сходится в смысле главного значения по Коши.

Доказательство теорем 5 и 6 проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2. При этом, если функция $f(x)$ обращается в нуль в окрестности нуля, то частное решение u^* задачи (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ при $\alpha \neq [\alpha]$ определяется по формуле (8), а при $\alpha = [\alpha]$ – соотношением

$$u^*(x,y) = w(x,y) - c_0((x+\lambda_1 y)^\alpha - (x+\lambda_2 y)^\alpha), \tag{24}$$

где $w(x, y)$ – функция (8), а постоянная c_0 определяется из равенства

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\, dt = c_0.$$

Для слабо связанной системы верны следующие теоремы.

Теорема 7. Пусть $m = [\alpha]$ при $\alpha \neq [\alpha]$ и $m = [\alpha]-1$ при $\alpha = [\alpha]$. Тогда однородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ имеет mn линейно независимых решений. Общее решение имеет вид

$$(S_m(xI + Ay) - S_m(xI + By))D,$$

где D – произвольный постоянный вектор, S_m – произвольный полином от z порядка m, а A, B определены в (20).

Теорема 8. Если $\alpha \neq [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) в $B_{\alpha,0}$ всегда имеет решение. Если $\alpha = [\alpha]$, то неоднородная задача (1), (2) имеет решение тогда и только тогда, когда несобственный интеграл от вектор-функции $f(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, dx}{i + x^{\alpha+1}}$$

сходится в смысле главного значения по Коши. Если $f(x) = 0$ в окрестности нуля, то частное решение задачи (1), (2), (4) имеет вид

$$u^*(x, y) = w(x, y) - [(xI + Ay)^{[\alpha]} - (xI + By)^{[\alpha]}]\Omega,$$

где A и B определены в (20), а вектор Ω имеет вид

$$\Omega = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-r}^{r} \frac{f(t)}{t^{[\alpha]+1}}\, dt.$$

Abstract. The paper considers Dirichlet problem for the elliptic equations and second order weakly connected systems in a half-plane. The solutions are searched in the class of functions, that are twice continuously differentiable in the half-plane, continuous up to the boundary and have finite growth order at infinity. Necessary and sufficient conditions for solvability of the non-homogeneous problem are found and the solutions of the corresponding homogeneous problem are explicitely written.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Non-regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific, Singapore 1998.
2. А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Наука, Москва, 1966.
3. A. Douglis, L. Nirenberg, "Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations", Comm. on Pure and Applied Math., vol. 8, no. 4, pp. 503 - 538, 1955.
4. Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости", Изв. НАН Армении. Математика, том 36, № 6, стр. 37 - 45, 2001.

Поступила 5 августа 2003