Известия НАН Армении. Математика, 39, № 5, 2004, 53-66

ОПИСАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДИССИПАТИВНЫХ КАНОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

П. Э. Мелик-Адамян

Ереванский государственный университет
E-mail : perch@ysu.am

Резюме. Получены формулы, описывающие множество характеристических функций всех диссипативных расширений произвольного симметрического канонического дифференциального оператора с равными дефектными числами.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Пусть H – гильбертово пространство, $\mathcal{J} \in [H]$ – оператор такой, что $\mathcal{J}^* = -\mathcal{J}$, $\mathcal{J}^2 = -I$ и $\mathcal{V}(r) \in L_1(0,\infty;[H])$ – равномерно измеримая и суммируемая операторнозначная функция со свойствами $\mathcal{V}^*(r) = \mathcal{V}(r)$ и $\mathcal{J}\mathcal{V}(r) = -\mathcal{V}(r)\mathcal{J}$. Операторы, порожденные с помощью дифференциального выражения

$$c[f] = \mathcal{J}f'(r) - \mathcal{V}(r)f(r),$$

называются *каноническими*. В частности, в гильбертовом пространстве H-значных функций $L_2(0,\infty;H)$ минимальный симметрический оператор C_0 и его сопряженный $C = C_0^*$ задаются формулами

$$C_0 f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C_0) = \{f \in L_2(0,\infty;H),\ c[f] \in L_2(0,\infty;H),\ f(0) = 0\},$$

$$Cf = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C) = \{f \in L_2(0,\infty;H), \quad c[f] \in L_2(0,\infty;H)\}.$$

Дефектные числа оператора C_0 определяются соотношением $d_0^{\pm} = \dim H_{\pm}$, где $H_{\pm}$ – собственные подпространства оператора $\mathcal{J}$, соответствующие собственным значениям $\pm i$. Очевидно, $H_{\pm} = P_{\pm}H$, где ортогональные проекторы $P_{\pm} = \frac{1}{2}(I \mp i\mathcal{J})$ таковы, что $P_+ + P_- = I$, $iP_+ - iP_- = \mathcal{J}$. Предполагается, что $\dim H_+ = \dim H_-$.

Введем в H индефинитное скалярное произведение $[x,y] = (-i\mathcal{J}x, y)$, $x, y \in H$. Следуя [1] (гл. 3. §4), описание множества всех диссипативных расширений оператора C_0 может быть дано с помощью множества $(-i\mathcal{J})$-неположительных подпространств граничных значений расширений. Такое описание можно привести и в терминах угловых операторов этих подпространств (см. [2], §1).

Далее, пусть $\mathcal{K} \in [H]$ некоторое самосопряженное сжатие, отличное от унитарного оператора и такое, что $\mathcal{J}\mathcal{K} = -\mathcal{K}\mathcal{J}$. Тогда $P_\pm \mathcal{K} P_\pm = 0$, так что разложению $H = H_+ \oplus H_-$ $(x = x_+ + x_-,\ x_\pm = P_\pm x,\ x \in H)$ отвечает матричное представление оператора $\mathcal{K}$ в виде $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K^* & 0 \end{bmatrix}$, где $K \in [H_-, H_+]$ и $\|K\| \le 1$. Если $I_\pm$ – единичные операторы в $H_\pm$, тогда ядром проектора $P_{IK} = \begin{bmatrix} I_+ & -K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ является $(-i\mathcal{J})$-неположительное подпространство $Ker\ P_{IK} = \{x \in H : x_+ = Kx_-\}$ с угловым оператором K, т.е.

$$[x,x] = \|Kx_-\|^2 - \|x_-\|^2 \le 0, \quad x \in Ker\ P_{IK}.$$

Отсюда следует, что канонический оператор

$$C_{IK} f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C_{IK}) = \{f \in \mathcal{D}(C) : P_{IK} f(0) = 0\}, \tag{0.1}$$

является диссипативным (т.е. $\operatorname{Im} (C_{IK} f, f)_{L_2} \ge 0$, $f \in \mathcal{D}(C_{IK})$) расширением оператора C_0. Расширения, описываемые формулой (0.1), оказываются *регулярными* расширениями, т.е. такими, что максимальная симметрическая часть любого из операторов C_{IK} имеет равные дефектные числа. Таким образом, к операторам C_{IK} приложима теория характеристических функций, изложенная в [3] (гл. 1, §1, гл. 2, §1 и 3).

Как и в [4], мы следуем этой теории. Получены формулы для вычисления характеристической функции произвольного регулярного диссипативного расширения C_{IK}.

§1. ДЕФЕКТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА СИММЕТРИЧЕСКОГО КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Пусть E_λ – спектральная функция сжатия $\mathcal{K}$, так что проекторы $P_0 = E_{-1} + (I - E_{1-0})$ и $P_1 = E_{1-0} - E_{-1} \ne 0$ взаимно ортогональны. Подпространства $H_0 = P_0 H$ и $H_1 = P_1 H$ $(H = H_0 \oplus H_1)$ приводят оператор $\mathcal{K}$ к унитарному и вполне неунитарному операторам $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K} P_0$, $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K} P_1$. Точнее, $\mathcal{K}_0^2 = P_0$ и $h \in H_0$, если $\mathcal{K}^2 h = h$.

Предложение 1.1. Подпространства $H_{0,1}$ представимы ортогональной суммой $H_{0,1} = P_+H_{0,1} \oplus P_-H_{0,1}$, и $\dim P_+H_{0,1} = \dim P_-H_{0,1}$. Операторы $\mathcal{K}_{0.1}$ таковы, что $\mathcal{J}\mathcal{K}_{0,1} = -\mathcal{K}_{0,1}\mathcal{J}$.

Доказательство : Из свойства $\mathcal{J}\mathcal{K} = -\mathcal{K}\mathcal{J}$ имеем $\mathcal{K}^2\mathcal{J}h_0 = \mathcal{J}\mathcal{K}^2h_0 = \mathcal{J}h_0$, $h_0 \in H_0$. Следовательно, $\mathcal{J}H_0 \subset H_0$ и $\mathcal{J}H_0 = H_0$ в силу $\mathcal{J}^2 = -I$. Из $H = \mathcal{J}H = \mathcal{J}H_0 \oplus \mathcal{J}H_1$ получаем $\mathcal{J}H_1 = H_1$. Таким образом, $P_\pm H_{0.1} \subset H_{0,1}$, и требуемые разложения доказаны. Так как $\mathcal{J}\mathcal{K} = -\mathcal{K}\mathcal{J}$, $\mathcal{J}H_{0,1} = H_{0.1}$ и $\mathcal{K}_0H_1 = \mathcal{K}_1H_0 = \{0\}$, то, очевидно, $\mathcal{J}\mathcal{K}_{0,1} = -\mathcal{J}\mathcal{K}_{0,1}$ и, значит, $P_\pm\mathcal{K}_{0,1} = \mathcal{K}_{0.1}P_\mp$. Поскольку оператор $\mathcal{K}_0$ унитарен в подпространстве H_0, то из равенства $\mathcal{K}_0P_+H_0 = P_-\mathcal{K}_0H_0 = P_-H_0$ следует, что размерности подпространств $P_\pm H_0$, а значит и $P_\pm H_1$, одинаковы. Предложение 1.1 доказано.

Обозначим $H_{\pm 0} = P_\pm H_0$, $H_{\pm 1} = P_\pm H_1$, и пусть $I_{\pm 0}$, $I_{\pm 1}$ – единичные операторы в этих подпространствах. Согласно предложению 1.1 имеем разложение пространства H в ортогональную сумму

$$H = H_+ \oplus H_- = (H_{+0} \oplus H_{+1}) \oplus (H_{-0} \oplus H_{-1}), \tag{1.1}$$

которому отвечает представление оператора $\mathcal{K}$ в виде блочной матрицы :

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} & K_0 & 0 \\ & & 0 & K_1 \\ K_0^* & 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \\ 0 & K_1^* & & \end{bmatrix} = \mathcal{K}_0 + \mathcal{K}_1,$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая (2×2) блочная матрица и

$$\mathcal{K}_0 = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} & K_0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ K_0^* & 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \\ 0 & 0 & & \end{bmatrix}, \quad \mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} & 0 & 0 \\ & & 0 & K_1 \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{O}} \\ 0 & K_1^* & & \end{bmatrix}.$$

Здесь $K_0K_0^* = I_{-0}$, $K_0^*K_0 = I_{+0}$. Очевидны матричные представления проекторов P_0, P_1 в представлении (1.1).

Рассмотрим ортогональные проекторы

$$P_{K_0} = \frac{1}{2}(P_0 - \mathcal{K}_0) + P_1, \quad P_{*K_0} = \frac{1}{2}(P_0 - \mathcal{K}_0t), \tag{1.2}$$

для которых непосредственно проверяется свойство

$$P_{K_0}\mathcal{J} + \mathcal{J}P_{*K_0} = \mathcal{J} = P_{*K_0}\mathcal{J} + \mathcal{J}P_{K_0}. \tag{1.3}$$

Очевидно, $Ker\ P_{K_0} = \{x \in H : x = K_0x_{-0} + x_{-0}, x_{-0} \in H_{-0}\}$ и для любого вектора $x \in Ker\ P_{K_0}$ имеем

$$[x, x] = (-i\mathcal{J}x, x) = (K_0x_{-0} - x_{-0}, K_0x_{-0} + x_{-0}) = \|K_0x_{-0}\|^2 - \|x_{-0}\|^2 = 0.$$

Таким образом, подпространство $Ker\ P_{K_0}$ является $(-i\mathcal{J})$-нейтральным, следовательно, оператор

$$C_{K_0}f = c[f], \quad f \in \mathcal{D}(C_{K_0}) = \{f \in \mathcal{D}(C) : P_{K_0}f(0) = 0\},$$

является симметрическим расширением оператора C_0.

Предложение 1.2. Оператор $C^*_{K_0}$ определяется формулой

$$C^*_{K_0}g = c[g], \quad g \in \mathcal{D}(C^*_{K_0}) = \{g \in \mathcal{D}(C) : P_{*K_0}g(0) = 0\}.$$

Доказательство : Для любых $f \in \mathcal{D}(C_{K_0})$ и $g \in \mathcal{D}(C)$, интегрированием по частям получим

$$(C_{K_0}f, g)_{L_2} = (f, Cg)_{L_2} - (\mathcal{J}f(0), g(0)).$$

Покажем, что $(\mathcal{J}f(0), g(0)) = 0$ тогда и только тогда, когда $(I - P_{*K_0})g(0) = g(0)$. Из формулы (1.3) имеем соотношения $P_{*K_0}\mathcal{J}P_{K_0} = 0$ и $(I - P_{*K_0})\mathcal{J}(I - P_{K_0}) = 0$. Пусть $g(0) = (I - P_{*K_0})g(0)$. Тогда из $(I - P_{K_0})f(0) = f(0)$ получим

$$(\mathcal{J}f(0), g(0)) = ((I - P_{*K_0})\mathcal{J}(I - P_{K_0})f(0), g(0)) = 0.$$

Если $(\mathcal{J}f(0), g(0)) = 0$ для любого вектора $f(0) \in (I - P_{K_0})H$, то $\mathcal{J}g(0) \perp (I - P_{K_0})H$ и, следовательно, $\mathcal{J}g(0) = P_{K_0}h$ для некоторого $h \in H$. Таким образом, $g(0) = -\mathcal{J}P_{K_0}h$, следовательно, $P_{*K_0}g(0) = -P_{*K_0}\mathcal{J}P_{K_0}h = 0$, и предложение 1.2 доказано.

Заметим, что случай унитарного оператора $\mathcal{K}$ ($\mathcal{K}_1 = 0$) мы исключили, так как тогда $P_{*K} = P_K$ и оператор C_K является самосопряженным расширением оператора C_0.

Обозначим через $\Lambda^{\pm}$ соответственно открытые верхнюю и нижнюю полуплоскости комплексной плоскости Λ. Найдем дефектные подпространства оператора C_{K_0}, т.е. подпространства $\mathcal{N}^{\pm}_{K_0}(\lambda)$ решений уравнений $C^*_{K_0}g = \lambda g$ при $\lambda \in \Lambda^{\pm}$. Для любого $\lambda \in \Lambda$ операторное каноническое уравнение

$$\mathcal{J}X'(r,\lambda) - \mathcal{V}(r,\lambda)X(r,\lambda) = \lambda X(r,\lambda) \tag{1.4}$$

имеет целое решение $\mathcal{E}(r,\lambda)$, удовлетворяющее условию $\mathcal{E}(0,\lambda) = I$. Для вещественных $\mu \in \mathbb{R}$ решение $\mathcal{U}(r,\mu)$, удовлетворяющее асимптотическому условию $\mathcal{U}(r,\mu) \to e^{\mathcal{J}\mu r} = e^{-i\mu r}P_+ + e^{i\mu r}P_-$ при $r \to \infty$ существует и оно представимо формулой (см. [5])

$$\mathcal{U}(r,\mu) = e^{-\mathcal{J}\mu r} + \int_r^{\infty} \Gamma(r,t)e^{-\mathcal{J}\mu t}dt, \quad \Gamma(r,t) \in L_1(r,\infty : [H]). \tag{1.5}$$

Очевидно, что $\mathcal{U}(r,\mu) = \mathcal{E}(r,\mu)\mathcal{U}(0,\mu)$ в силу единственности решения задачи Коши. Из представления (1.5) следует, что решения $\mathcal{U}^{\pm}(r,\mu) = \mathcal{U}(r,\mu)P_{\pm}$ имеют аналитические продолжения соответственно в $\Lambda^{\pm}$:

$$\mathcal{U}^{\pm}(r,\lambda) = e^{\pm i\lambda r}P_{\mp} + \int_r^{\infty} e^{\pm i\lambda t}\Gamma(r,t)P_{\mp}\,dt, \quad \lambda\in\Lambda^{\pm}. \tag{1.6}$$

Обозначая $\mathcal{A}(\mu) = \mathcal{U}(0,\mu)$, аналогичным образом определим функции

$$\mathcal{A}^{\pm}(\lambda) = P_{\mp} + \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t}\Gamma(t)P_{\mp}\,dt, \quad \Gamma(t) = \Gamma(0,t)\in L_1(0,\infty;[H]); \quad \lambda\in\Lambda^{\pm}. \tag{1.7}$$

Из аналитичности решения $\mathcal{E}(r,\lambda)$, теоремы об аналитической зависимости решения дифференциального уравнения от параметра и теоремы единственности аналитических функций имеем, что $\mathcal{U}^{\pm}(r,\lambda) = \mathcal{E}(r,\lambda)\mathcal{A}^{\pm}(\lambda)$, $\lambda\in\Lambda^{\pm}$. Отсюда и из формул (1.6) следует важное свойство функций $\mathcal{U}^{\pm}(r,\lambda)$: они являются решениями уравнения (1.4) такими, что

$$\mathcal{U}^{\pm}(r,\lambda)\in L_2(0,\infty;[H]) \quad \text{для} \quad \lambda\in\Lambda^{\pm}.$$

В представлении $H = H_+ \oplus H_-$ имеем

$$\mathcal{A}^{+}(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda) \\ 0 & A_{+1}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \lambda\in\Lambda^{+} \quad \text{и} \quad \mathcal{A}^{-}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_{-1}(\lambda) & 0 \\ A_{-2}(\lambda) & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda\in\Lambda^{-}. \tag{1.8}$$

Для произвольных сжимающих операторов $L_{\pm}\in[H_{\pm},H_{\mp}]$, $\|L_{\pm}\|\le 1$, рассмотрим операторные функции

$$A_{\pm}(L_{\pm},\lambda) = A_{\pm1}(\lambda) + L_{\pm}A_{\pm2}(\lambda)\in[H_{\mp}],$$

определенные соответственно в замкнутых верхней и нижней полуплоскостях $\pm\operatorname{Im}\lambda\ge 0$. Из формул (1.7) следует, что

$$A_{\pm}(L_{\pm},\lambda) = I_{\mp} + \int_0^{\infty} e^{\pm i\lambda t}F_{\pm}\,dt, \quad F_{\pm}(t)\in L_1(0,\infty;[H_{\mp}]), \quad \pm\operatorname{Im}\lambda\ge 0. \tag{1.9}$$

Предложение 1.3. Операторные функции $A_{\pm}(L_{\pm},\lambda)$ ограничено обратимы соответственно при $\pm\operatorname{Im}\lambda\ge 0$, и операторные функции $A_{\pm}^{-1}(L_{\pm},\lambda)$ допускают представления вида (1.9). В частности, аналитичны операторные функции $A_{\pm1}^{-1}(\lambda)\in[H_{\mp}]$.

В работе [6] (п. 1.2) Предложение 1.3 доказано в случае, когда операторы $L_{\pm}$ являются произвольными изометриями, т.е. $L_{\pm}^{*}L_{\pm} = I_{\pm}$ и $L_{\pm}L_{\pm}^{*} = I_{\mp}$. Для случая сжимающих операторов доказательство аналогично.

В представлениях $H_\mp = H_{\mp 0} \oplus H_{\mp 1}$ операторные функции $A_{\pm 1}(\lambda) \in [H_\mp]$ и $A_{\pm 2}(\lambda) \in [H_\mp, H_\mp]$ в формулах (1.8) принимают матричную форму. Пусть

$$A_{\pm 1}(\lambda) = \begin{bmatrix} A^{11}_{\pm 1}(\lambda) & A^{12}_{\pm 1}(\lambda) \\ A^{21}_{\pm 1}(\lambda) & A^{22}_{\pm 1}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad A_{\pm 2}(\lambda) = \begin{bmatrix} A^{11}_{\pm 2}(\lambda) & A^{12}_{\pm 2}(\lambda) \\ A^{21}_{\pm 2}(\lambda) & A^{22}_{\pm 2}(\lambda) \end{bmatrix}. \qquad (1.10)$$

Всюду в дальнейшем мы используем матричные представления операторов только в первом или во втором из разложений формулы (1.1), так что порядок матрицы указывает в каком именно разложении.

Теорема 1.1. Дефектные подпространства $\mathcal{N}^\pm_{K_0}(\lambda)$ оператора C_{K_0} определяются формулами

$$\mathcal{N}^\pm_{K_0}(\lambda) \left\{ \mathcal{U}^\pm(r,\lambda)x_\mp(\lambda) : x_\mp(\lambda) = \begin{bmatrix} M^\pm(\lambda)x_{\mp 1} \\ x_{\mp 1} \end{bmatrix}, \quad x_{\mp 1} \in H_{\mp 1} \right\}, \qquad (1.11)$$

где

$$M^+(\lambda) = -\left[A^{11}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda)\right]^{-1}\left[A^{12}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{12}_{+2}(\lambda)\right], \quad \lambda \in \Lambda^+,$$

$$M^-(\lambda) = -\left[A^{11}_{-1}(\lambda) - K_0 A^{11}_{-2}(\lambda)\right]^{-1}\left[A^{12}_{-1}(\lambda) - K_0 A^{12}_{-2}(\lambda)\right], \quad \lambda \in \Lambda^-.$$

Доказательство : Пусть $\lambda \in \Lambda^+$. Для любого вектора $x_- \in H_-$ функция $g(r,\lambda) = \mathcal{U}^+(r,\lambda)x_-$ такова, что $c[g] = \lambda g$ и $g(r,\lambda) \in L_2(0,\infty; H)$. Из предложения 1.2 следует, что $g \in \mathcal{D}(C^*_{K_0})$ тогда и только тогда, когда

$$P_{*K_0} g(0) = P_{*K_0} \mathcal{A}^+(\lambda)x_- = 0.$$

Учитывая обозначения (1.10), из формул (1.2) и (1.8) следует, что верхнее условие представляется в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_0[A^{11}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda)] & -K_0\left[A^{12}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{12}_{+2}(\lambda)\right] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{11}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda) & A^{12}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{12}_{+2}(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{-0} \\ x_{-1} \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем

$$\left[A^{11}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda)\right] x_{-0} + \left[A^{12}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{12}_{+2}(\lambda)\right] x_{-1} = 0. \qquad (1.12)$$

Оператор $\left[A^{11}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda)\right] \in [H_{-0}]$ имеет обратный для каждого $\lambda \in \Lambda^+$. Действительно, если $\left[A^{11}_{+1}(\lambda_0) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda_0)\right] x_{-0} = 0$, $x_{-0} \neq 0$ для некоторого $\lambda_0 \in \Lambda^+$, то из формулы (1.2) имеем $P_{K_0}\mathcal{A}^+(\lambda_0)x_{-0} = 0$ и функция $\mathcal{U}^+(r,\lambda_0)x_{-0}$ является собственной функцией оператора C_{K_0}, отвечающей невещественному собственному значению λ_0, что противоречит симметричности оператора C_{K_0}. Ограниченность обратного оператора следует из предложения 1.3 (при $L_+ = K^*$). Таком образом, согласно (1.12), окончательно получим

$$x_{-0} = -\left[A^{11}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{11}_{+2}(\lambda)\right]^{-1}\left[A^{12}_{+1}(\lambda) - K_0^* A^{12}_{+2}(\lambda)\right] x_{-1} = M^+(\lambda)x_{-1}.$$

Для $\lambda \in \Lambda^-$ доказательство аналогично.

Из теоремы 1.1 и предложения 1.1 следует, что симметрический оператор C_{K_0} имеет равные дефектные числа $d^{\pm}_{K_0} = \dim H_{\mp 1}$. Очевидно, что для дефектных подпространств оператора C_0 имеем

$$\mathcal{N}_0^{\pm}(\lambda) = \left\{\mathcal{U}^{\pm}(r,\lambda)x_{\mp} : x_{\mp} \in H_{\mp}\right\}, \quad \lambda \in \Lambda^{\pm}. \tag{1.13}$$

§2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДИССИПАТИВНОГО РАСШИРЕНИЯ

Рассмотрим диссипативный оператор C_{IK}, заданный формулой (0.1). Подпространство граничных значений этого оператора запишется в виде

$$Ker\ P_{IK} = \left\{x \in H : x = Kx_- + x_- = (K_0x_{-0} + K_1x_{-1}) + (x_{-0} + x_{-1}),\ x_{-0,1} \in H_{0,1}\right\}.$$

Учитывая унитарность оператора K_0 в H_0, имеем

$$[x,x] = (-i\mathcal{J}x, x) = \|K_1x_{-1}\|^2 - \|x_{-1}\|^2 \leq 0, \quad x \in Ker\ P_{IK}.$$

Поскольку в H_1 сжатие K_1 является вполне неунитарным, то условие $x_{-1} = 0$ является необходимым для $(-i\mathcal{J})$-нейтральности вектора $x \in Ker\ P_{IK}$. Отсюда следует, что максимальное $(-i\mathcal{J})$-нейтральное подпространство в $Ker\ P_{IK}$ совпадает с подпространством $Ker\ P_{K_0}$. Следовательно, оператор C_{IK} является диссипативным расширением своей максимальной симметрической части, т.е. оператора C_{K_0} с равными дефектными числами.

Приведенные выше рассуждения можно обратить. Действительно, если $\widetilde{C}$ – симметрический оператор с равными дефектными числами, тогда $(-i\mathcal{J})$-нейтральное подпространство граничных значений этого оператора задается угловым оператором $\widetilde{K}_0 \in \left[\widetilde{H}_{-0}, \widetilde{H}_{+0}\right]$ таким, что $\widetilde{K}_0^*\widetilde{K}_0 = \widetilde{I}_{-0}$, $\widetilde{K}_0\widetilde{K}_0^* = \widetilde{I}_{+0}$, где $\widetilde{H}_{\pm 0} \subset H_{\pm}$ и $\dim \widetilde{H}_{-0} = \dim H_{+0}$. Если $\widetilde{H}_{\pm 1} = H_{\pm} \ominus \widetilde{H}_{\pm 0}$, то

$$H = \left(\widetilde{H}_{+0} \oplus \widetilde{H}_{+1}\right) \oplus \left(\widetilde{H}_{-0} \oplus \widetilde{H}_{-1}\right) = H_+ \oplus H_- =$$

$$= \left(\widetilde{H}_{+0} \oplus \widetilde{H}_{-0}\right) + \left(\widetilde{H}_{+1} \oplus \widetilde{H}_{-1}\right) = \widetilde{H}_0 \oplus \widetilde{H}_-.$$

Выберем произвольный вполне неунитарный сжимающий самосопряженный оператор $\widetilde{\mathcal{K}}_1 \in \left[\widetilde{H}_1\right]$, и образуем оператор $\widetilde{\mathcal{K}} = \widetilde{\mathcal{K}}_0 \oplus \widetilde{\mathcal{K}}_1$, где $\widetilde{\mathcal{K}}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{K}_0 \\ \widetilde{K}_0^* & 0 \end{bmatrix}$ – унитарный оператор в $\widetilde{H}_0$. Из рассмотрений §1 следует, что $\widetilde{C}_\bullet = C_{\widetilde{\mathcal{K}}_0}$ и диссипативный оператор $C_{I\widetilde{\mathcal{K}}}$ является расширением оператора $C_{\widetilde{\mathcal{K}}_0}$.

Согласно [3] (гл. 2, §3), пусть симметрический оператор S с равными дефектными числами и дефектными подпространствами $\mathcal{N}^+(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda^+$, $\mathcal{N}_-(\zeta)$, $\zeta \in \Lambda^-$ является максимальной симметрической частью диссипативного оператора Q, так что Q^* является аккумулятивным (т.е. $\mathrm{Im}\,(Q^* f, f) \le 0, \forall f \in \mathcal{D}(Q^*)$) расширением оператора S. Пусть операторные функции $Y(\lambda)$ и $Y_*(\zeta)$ таковы, что

$$f_- - Y(\lambda) f_+ \in \mathcal{D}(Q^*), \quad f_+ - Y_*(\zeta) f_- \in \mathcal{D}(Q), \quad f_+ \in \mathcal{N}^+(\lambda), \quad f_- \in \mathcal{N}^-(\zeta). \quad (2.1)$$

Операторные функции $\chi(\lambda)$ и $\chi_*(\zeta)$ являются характеристическими функциями операторов Q и Q^*, если имеет место формула

$$Y(\lambda) Y_*(\zeta) G(\lambda, \zeta) = \chi_*(\zeta) G(\lambda, \zeta) \chi(\lambda), \quad (2.2)$$

где операторная функция $G(\lambda, \zeta)$ ограниченно обратима. Рассмотрим проектор $P_{K^\bullet I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K^* & I_- \end{bmatrix}$ связанный с проектором P_{IK} соотношением

$$P_{K^\bullet I}^* \mathcal{J} + \mathcal{J} P_{IK} = \mathcal{J} P_{K^\bullet I} + P_{IK}^* \mathcal{J} = \mathcal{J}.$$

Подпространство $Ker\ P_{K^\bullet I} = \{x \in H : x_- = K^* x_+\}$ является $(-i\mathcal{J})$-неотрицательным, так как $[x, x] = \|x_+\|^2 - \|K^* x_+\|^2 \ge 0$, $x \in Ker\ P_{K^\bullet I}$. Отсюда следуя доказательству предложения 1.2, получим, что

$$C_{IK}^* g = c[g], \quad g \in \mathcal{D}(C_{IK}^*) = \{g \in \mathcal{D}(C) : P_{K^\bullet I} g(0) = 0\}. \quad (2.3)$$

Очевидно, оператор $C_{IK}^* = C_{K^\bullet I}$ является аккумулятивным.
Таким образом, к произвольному диссипативному каноническому оператору C_{IK} приложима теория, представленная в работе [3].

Предложение 2.1. Точечные спектры операторов C_{IK} и $C_{K^\bullet I}$ совпадают соответственно с нулями операторных функций

$$A_{+2}(\lambda) - K A_{+1}(\lambda), \quad \lambda \in \Lambda^+ \quad \text{и} \quad A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta), \quad \zeta \in \Lambda^-.$$

Доказательство : Очевидно, что резольвентное множество оператора C_{IK} содержит Λ^-. Покажем, что вещественное число $\mu_0 \in R$ не может являться собственным значением оператора C_{IK}. Если $C_{IK} f_0 = \mu_0 f_0$, то μ_0 является собственным значением оператора C, поскольку оператор C_{IK} является его сужением. Следовательно, μ_0 является собственным значением некоторого симметрического оператора с равными дефектными числами (см. [7], §14, п. 10), а значит и собственным значением некоторого самосопряженого расширения оператора C_0. Полученное противоречит абсолютной непрерывности спектра любого самосопряженного расширения оператора C_0 (см. [8]).

Общий вид векторных решений $f(r, \lambda) \in L_2(0, \ H)$ уравнения (1.4) при $\lambda \in \Lambda^+$ задается формулой $f(r, \lambda) = \mathcal{U}^+(r, \lambda)x_-$, $x_- \in H_-$. В силу свойств функции $\mathcal{U}^+(r, \lambda)$, $\lambda_0 \in \Lambda^+$ является собственным значением оператора C_{IK} тогда и только тогда, когда $P_{IK} f(0, \lambda_0) = P_{IK} \mathcal{A}^+(\lambda_0)x_- = 0$ для некоторого вектора $x_- \neq 0$, т.е.

$$\begin{bmatrix} I & -K \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda_0) \\ 0 & A_{+1}(\lambda_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{+2}(\lambda_0) - K A_{+1}(\lambda_0)]x_- \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Для оператора C_{K^*I} доказательство аналогично.

В силу предложения 1.3 операторная функция $\Theta_+(\lambda) = A_{+2}(\lambda)A_{+1}^{-1}(\lambda) \in [H_-, H_+]$ определена для всех $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$ и аналитична в Λ^+. Такова же функция $\Theta_-(\zeta) = A_{-2}(\zeta)A_{-1}^{-1}(\zeta) \in [H_+, H_-]$, $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$. В работе [4] доказано, что эти функции обладают следующими свойствами :

1) $||\Theta_+(\lambda)|| < 1$, $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, $||\Theta_-(\zeta)|| < 1$, $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$,

2) $\Theta_+(\lambda) = \Theta_-^*(\bar\lambda)$, $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$, $\Theta_-(\zeta) = \Theta_+^*(\bar\zeta)$, $\operatorname{Im} \zeta \leq 0$,

а также, что $\Theta_+(\lambda)$ и $\Theta_-(\zeta)$ являются, соответсвенно, характеристическими функциями диссипативного и аккумулятивного операторов C_{I0} и C_{0I}, отвечающих случаю $\mathcal{K} = 0$.

Рассмотрим операторные функции $\Theta_+(\lambda, K) \in [H_-, H_+]$ и $\Theta_-(\lambda, K^*) \in [H_+, H_-]$, определенные, соответственно, формулами

$$\begin{aligned} \Theta_+(\lambda, K) &= [A_{+2}(\lambda) - K A_{+1}(\lambda)]\,[A_{+1}(\lambda) - K^* A_{+2}(\lambda)]^{-1} = \\ &= [\Theta_+(\lambda) - K]\,[I_- - K^*\Theta_+(\lambda)]^{-1}, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 0, \\ \Theta_-(\zeta, K^*) &= [A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta)]\,[A_{-1}(\zeta) - K A_{-2}(\zeta)]^{-1} = \\ &= [\Theta_-(\zeta) - K^*]\,[I_+ - K\Theta_-(\zeta)]^{-1}, \quad \operatorname{Im} \zeta \leq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Согласно предложению 1.3, эти функции аналитичны, соответствено, в $\Lambda^\pm$ и при $K = 0$ совпадают с функциями $\Theta_+(\lambda)$ и $\Theta_-(\zeta)$. Из предложения 2.1 следует, что нули операторных функций $\Theta_+(\lambda, K)$ и $\Theta_-(\zeta, K^*)$ совпадают, соответственно, с точечными спектрами операторов C_{IK} и C_{K^*I}.

Предложение 2.2. Операторные функции $\Theta_+(\lambda, K)$ и $\Theta_-(\zeta, K^*)$ таковы, что

$$\begin{aligned} &\Theta_+(\lambda, K)\,[I_- - K^*K]\,\Theta_+^*(\lambda, K) \le I_+ - KK^*, \qquad Im\,\lambda \ge 0, \\ &\Theta_-(\zeta, K^*)\,[I_+ - KK^*]\,\Theta_-^*(\zeta, K^*) \le I_- - K^*K, \qquad Im\,\zeta \le 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Доказательство : Для $t \in (0,1)$ оператор $I - t^2\mathcal{K}^2 \ge (1-t^2)I$ ограниченно обратим. Поскольку справедливы равенства $\mathcal{K}\mathcal{J} = -\mathcal{J}\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}^2\mathcal{J} = \mathcal{J}\mathcal{K}^2$, то самосопряженный оператор

$$B(t) = (I - t\mathcal{K})\left(I - t^2\mathcal{K}^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(I - t^2\mathcal{K}^2\right)^{-\frac{1}{2}}(I - t\mathcal{K})$$

является $(-i\mathcal{J})$-унитарным, т.е. $B(t)(-i\mathcal{J})B(t) = -i\mathcal{J}$. Имеем,

$$B(t) = \begin{bmatrix} [I_+ - t^2KK^*]^{-1/2} & -[I_+ - t^2KK^*]^{-1/2}tK \\ [I_- t^2K^*K]^{-1/2}tK^* & [I_- - t^2K^*K]^{-1/2} \end{bmatrix}.$$

Ассоциированные с матрицей оператора $B(t)$ дробно-линейные преобразования

$$\chi_+(t, \Theta_+(\lambda)) = [I_+ - t^2KK^*]^{-1/2}[\Theta_+(\lambda) - tK]\times$$

$$\times[I_- - tK^*\Theta_+(\lambda)]^{-1}[I_- - t^2K^*K]^{1/2} \in [H_-, H_+],$$

$$\chi_-(t, \Theta_-(\zeta)) = [I_- - t^2K^*K]^{-1/2}[\Theta_-(\zeta) - tK^*]\times$$

$$\times[I_+ - tK\Theta_-(\zeta)]^{-1}[I_+ - t^2KK^*]^{1/2} \in [H_+, H_-],$$

являются сжимающими для любого $t \in (0,1)$ (см. [9], §1), так что

$$\chi_+(t, \Theta_+(\lambda))\chi_+^*(t, \Theta_+(\lambda)) \le I_+,\ \chi_-(t, \Theta_-(\zeta))\chi_-^*(t, \Theta_-(\zeta)) \le I_-.$$

Обозначая $\Theta_+(t, \lambda, K) = [\Theta_+(\lambda) - tK]\,[I_- - tK^*\Theta(\lambda)]^{-1}$, отсюда имеем

$$\Theta_+(t, \lambda, K)[I_- - t^2K^*K]\Theta_+^*(t, \lambda, K) \le [I_+ - t^2KK^*].$$

Каждый из операторов в полученном соотношении сильно сходится к соответствующему оператору при $t \to 1$, и, значит, для $\Theta_+(\zeta, K^*)$ выполняется формула (2.5). Для функции $\Theta_-(\zeta, K^*)$ доказательство аналогично.

Замечание. Пусть $\mathfrak{N}$ – гильбертово пространство и оператор $T \in [\mathfrak{N}]$, $\|T\| < 1$ является произвольным сжатием. Обозначим $D_T = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ и $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}$ рассмотрим операторы :

$$J = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Для дробно-линейных преобразований сжимающей операторной функции $\Theta(\lambda) = \lambda I$ ($|\lambda| < 1$) матрицей оператора $B = (I - T)\left(I - T^2\right)^{1/2}$, имеем

$$D_{T^*}\chi(\lambda) = \left[\bar{\lambda} I - T^*\right]\left[I - \bar{\lambda} T\right]^{-1} D_T, \quad D_T\chi_*(\lambda) = \left(\bar{\lambda} I - T\right)\left(I - \bar{\lambda} T^*\right)^{-1} D_{T^*}.$$

Переходя к сопряженным операторам и обозначая $\chi^*(\lambda) = \Theta_T(\lambda)$, $\chi_*^*(\lambda) = \Theta_{T^*}(\lambda)$, получим формулы

$$\Theta_T(\lambda) D_{T^*} = D_T\left[I - \lambda T^*\right]^{-1}\left[\lambda I - T\right], \quad \Theta_{T^*}(\lambda) D_T = D_{T^*}\left[I - T\right]_*^{-1}\left[\lambda I - T^*\right].$$

Согласно работе [10] (гл. 6, §1), операторные функции $\Theta_T(\lambda)$ и $\Theta_{T^*}(\lambda)$ являются, соответственно, характеристическими функциями сжатий T и T^*.

Характеристические функции операторов C_{IK} и C_{K^*I} вычислим сначала для случая, когда оператор $\mathcal{K}$ является вполне неунитарным ($\mathcal{K}_0 = 0$), т.е. когда единственной симметрической частью операторов C_{IK} и C_{K^*I} является минимальный оператор C_0.

Теорема 2.1. Если оператор $\mathcal{K}$ вполне неунитарен, то операторные функции $\Theta_+(\lambda, K)$ и $\Theta_-(\zeta, K^*)$, определенные формулами (2.4), являются, соответственно, характеристическими функциями операторов C_{IK} и C_{K^*I}.

Доказательство : Воспользовавшись формулами (1.13), для первого соотношения в (2.1) имеем

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K^* & I_- \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} A_{-1}(\zeta) & 0 \\ A_{-2}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_+ \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -Y_-(\zeta,\lambda)K^* & Y_-(\zeta,\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda) \\ 0 & A_{+1}(\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_- \end{bmatrix}\right\} = 0, \tag{2.6}$$

т.е.

$$\left[A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta)\right] x_+ = Y_-(\zeta,\lambda)\left[A_{+1}(\lambda) - K^* A_{+2}(\lambda)\right] x_-,$$

где $Y_-(\zeta,\lambda) \in [H_-]$ – искомая операторная функция. Пусть $U \in [H_-, H_+]$ – произвольный изометрический оператор ($U^*U = I_-$, $UU^* = I_+$). Тогда

$$Y_-(\zeta,\lambda) = \left[A_{-2}(\zeta) - K^* A_{-1}(\zeta)\right] U \left[A_{+1}(\lambda) - K^* A_{+2}(\lambda)\right]^{-1} =$$

$$= A_{-2}(\zeta, K^*) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*).$$

Аналогично, для второго соотношения в (2.1) имеем

$$\begin{bmatrix} I_+ & -K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 & A_{+2}(\lambda) \\ 0 & A_{+1}(\lambda) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ x_- \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_+(\lambda,\zeta) & -Y_+(\lambda,\zeta)K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{-1}(\zeta) & 0 \\ A_{-2}(\zeta) & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_+ \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = 0. \tag{2.7}$$

Откуда получим

$$Y_+(\lambda,\zeta) = \left[A_{+2}(\lambda) - KA_{+1}(\lambda)\right] U^* \left[A_{-1}(\zeta) - KA_{-2}(\zeta)\right]^{-1} =$$

$$= A_{+2}(\lambda, K) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K).$$

Из формул (2.4) имеем

$$A_{+2}(\lambda, K) A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) = \Theta_+(\lambda, K), \quad A_{-2}(\zeta, K^*) A_{-1}^{-1}(\zeta, K) = \Theta_-(\zeta, K^*).$$

Следовательно,

$$Y_-(\zeta,\lambda) K^* Y_+(\lambda,\zeta) = A_{-2}(\zeta, K^*) U A_+^{-1}(\lambda, K^*) K^* A_{+2}(\lambda, K) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K) =$$

$$= A_{-2}(\zeta, K^*) A_{-1}^{-1}(\zeta, K) A_{-1}(\zeta, K) U A_+^{-1}(\lambda, K^*) \times$$

$$\times K^* A_{+2}(\lambda, K) A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) A_{+1}(\lambda, K^*) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K) =$$

$$= \Theta_-(\zeta, K^*) A_{-1}(\zeta, K) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*) K^* \Theta_+(\lambda, K) A_{+1}(\lambda, K^*) U^* A_{-1}^{-1}(\zeta, K).$$

Полученное очевидным образом преобразуется к формуле :

$$Y_-(\zeta,\lambda) K^* Y_+(\lambda,\zeta) G(\zeta,\lambda) = \Theta_-(\zeta, K^*) G(\zeta,\lambda) K^* \Theta_+(\lambda, K). \tag{2.8}$$

Здесь $G(\zeta,\lambda) = A_{-1}(\zeta, K) U A_{+1}^{-1}(\lambda, K^*)$ – ограниченно обратимая операторная функция. Формула (2.8) идентична формуле (2.2) с точностью до постоянного оператора K^*, что и доказывает теорему.

Рассмотрим случай произвольного сжатия K ($K_0 \neq 0$), т.е. когда C_{IK} является расширением своей максимальной симметрической части C_{K_0}, строго содержащей оператор C_0.

Теорема 2.2. Характеристические функции диссипативного и аккумулятивного расширений C_{IK} и C_{K^*I} симметрического оператора C_{K_0} определяются формулами

$$\Theta_+(\lambda, K_1) = \Theta_{+2}(\lambda, K_1) \Theta_{+1}^{-1}(\lambda, K_1^*) \in [H_{-1}, H_{+1}],$$

$$\Theta_-(\zeta, K_1^*) = \Theta_{-2}(\zeta, K_1^*) \Theta_{-1}^{-1}(\zeta, K_1) \in [H_{+1}, H_{-1}],$$

где

$$\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*) = \left[A_{+1}^{21}(\lambda) - K_1^* A_{+2}^{21}(\lambda)\right] M^+(\lambda) + \left[A_{+1}^{22}(\lambda) - K_1^* A_{+2}^{22}(\lambda)\right],$$

$$\Theta_{+2}(\lambda, K_1) = \left[A_{+2}^{21}(\lambda) - K_1 A_{+1}^{21}(\lambda)\right] M^+(\lambda) + \left[A_{+2}^{22}(\lambda) - K_1 A_{+1}^{22}(\lambda)\right],$$

$$\Theta_{-1}(\zeta, K_1) = \left[A^{21}_{-1}(\zeta) - K_1 A^{21}_{-2}(\zeta)\right] M^{-}(\zeta) + \left[A^{22}_{-1}(\zeta) - K_1 A^{22}_{-2}(\zeta)\right],$$

$$\Theta_{-2}(\zeta, K_1^*) = \left[A^{21}_{-2}(\zeta) - K_1^* A^{21}_{-1}(\zeta)\right] M^{-}(\zeta) + \left[A^{22}_{-2}(\zeta) - K_1^* A^{22}_{-1}(\zeta)\right].$$

Доказательство : Воспользовавшись формулами (1.10) и (1.11), для первого слагаемого аналога формулы (2.6) получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -K_0^*[A^{11}_{-1} - K_0 A^{11}_{-2}]_\zeta & -K_0^*[A^{12}_{-1} - K_0 A^{12}_{-2}]_\zeta & 0 \\ [A^{21}_{-2} - K_1^* A^{21}_{-1}]_\zeta & [A^{22}_{-2} - K_1^* A^{22}_{-1}]_\zeta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-}(\zeta) x_{+1} \\ x_{+1} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Theta_{-2}(\zeta, K_1^*) x_{+1} \end{bmatrix},$$

поскольку, в силу определения $M^{-}(\zeta)$, имеем

$$\left[A^{11}_{-1}(\zeta) - K_0 A^{11}_{-2}(\zeta)\right] M^{-}(\zeta) x_{+1} + \left[A^{12}_{-1}(\zeta) - K_0 A^{12}_{-2}(\zeta)\right] x_{+1} = 0.$$

В той же формуле (2.6) полагая $Y_{-}(\zeta, \lambda) = \begin{bmatrix} I_{-0} & 0 \\ 0 & Y_{-1}(\zeta,\lambda) \end{bmatrix}$ и $Y_{-1}(\zeta, \lambda) \in [H_{-1}]$, в силу определения $M^{+}(\lambda)$, получим

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [A^{11}_{+1} - K_0^* A^{11}_{+2}]_\lambda & [A^{12}_{+1} - K_0^* A^{12}_{+2}]_\lambda \\ 0 & Y_{-1}[A^{21}_{+1} - K_1^* A^{21}_{+2}]_\lambda & Y_{-1}[A^{22}_{+1} - K_1^* A^{22}_{+2}]_\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ M^{+}(\lambda) x_{-1} \\ x_{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Y_{-1}\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*) x_{-1} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, для искомой функции $Y_{-1}(\zeta, \lambda) \in [H_{-1}]$ получаем соотношение

$$\Theta_{-2}(\zeta, K^*) x_{+1} = Y_{-1}(\zeta, \lambda) \Theta_{+1}(\lambda, K_1^*) x_{-1}. \tag{2.9}$$

Операторная функция $\Theta_{+1}(\lambda, K_1^*)$ обратима при $\operatorname{Im} \lambda \geq 0$. Действительно, если $\Theta_{+1}(\lambda_0, K_1^*) x_{-1} = 0$, $x_{-1} \neq 0$, $\operatorname{Im} \lambda_0 \geq 0$, то для ненулевого вектора $x_{-}(\lambda_0) = \begin{bmatrix} M^{+}(\lambda_0) x_{-} \\ x_{-} \end{bmatrix} \in H_{-}$ имеет место $P_{K^* I} \mathcal{U}^{+}(0, \lambda_0) x_{-}(\lambda_0) = P_{K^* I} A^{+}(\lambda_0) x_{-}(\lambda_0) = 0$, так что функция $g(r, \lambda_0) = \mathcal{U}^{+}(r, \lambda_0) x_{-}(\lambda_0) \in \mathcal{D}(C_{K^* I})$ является собственной функцией аккумулятивного оператора C_{K^*I}, отвечающей собственному значению λ_0, что противоречит предложению 2.1.

Таким образом, если $U_1 \in [H_{-1}, H_{+1}]$ – произвольный изометрический оператор, существующий в силу предложения 1.1, то из соотношения (2.9) имеем

$$Y_{-1}(\zeta,\lambda) = \Theta_{-2}(\zeta, K_1^*)\, U_1 \Theta_{+1}^{-1}(\lambda, K_1^*)\,.$$

Если $Y_+(\lambda,\zeta) = \begin{bmatrix} I_{+0} & 0 \\ 0 & Y_{+1}(\lambda,\zeta) \end{bmatrix}$ и $Y_{+1}(\lambda,\zeta) \in [H_{+1}]$, то, пользуясь аналогом формулы (2.7), получим $Y_{+1}(\lambda,\zeta) = \Theta_{+2}(\lambda, K_1)\, U_1^* \Theta_{-1}^{-1}(\zeta, K_1)$. Отсюда, аналогично доказательству теоремы 1.1, следует формула

$$Y_{-1}(\zeta,\lambda) K_1^* Y_{+1}(\lambda,\zeta) G_1(\zeta,\lambda) = \Theta_-(\zeta, K_1^*)\, G_1(\zeta,\lambda) K_1^* \Theta_+(\lambda, K_1)\,,$$

где $G_1(\zeta,\lambda) = \Theta_{-1}(\zeta, K_1) U_1 \Theta_{+1}^{-1}(\lambda, K_1^*)$.

Abstract. The paper contains formulas describing the set of the characteristic functions of all dissipative extensions of an arbitrary symmetric, canonical differential operator with equal defect indices.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений, Наукова думка, Киев, 1984.
2. М. Г. Крейн, "Введение в геометрию индефинитных $\mathcal{J}$-пространств и теорию операторов в этих пространствах", Вторая летняя матем. школа, I, стр. 15 – 92, Наукова думка, Киев, 1965.
3. A. Kuzhel, Characteristic Functions and Models of Nonselfadjoint Operators", Kluwer Acad. Publ., 1996.
4. П. Э. Мелик-Адамян, "О характеристической функции диссипативного расширения в спектральной теории канонических операторов", Изв. НАН Армении. Математика, том 37, № 2, стр. 47 – 64, 2002.
5. Ф. Э. Мелик-Адамян, "Об одном классе канонических дифференциальных операторов", Изв. АН Арм ССР, Математика, том 24, № 6, стр. 570 – 592, 1989.
6. П. Э. Мелик-Адамян, "К теории рассеяния для канонических дифференциальных операторов". Изв. АН Арм ССР, Математика, том 11, № 4, стр. 291 – 313, 1976.
7. М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, Наука, Москва, 1969.
8. В. М. Адамян, "К теории канонических дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве", ДАН СССР, том 178, № 1, стр. 9 – 12, 1968.
9. М. Г. Крейн, Ю. Л. Шмульян, "О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами", Мат.исследования, том 2, № 3, стр. 64 – 96, Кишинев, 1967.
10. Б. Секефальфи-Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, Мир, Москва, 1970.

Поступила 24 марта 2004