Известия НАН Армении. Математика, 39, № 5, 2004, 37–52

О СХОДИМОСТИ В МЕТРИКЕ L^p ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

М. Г. Григорян

Ереванский государственный университет
E-mail : gmarting@ysu.am

Резюме. В настоящей работе доказывается, что для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$, с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ ($p \in [1,2)$) существует функция $g(x) \in L^1[0,1]$, $g(x) = f(x)$ на E, такая, что гриди алгоритм функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1_{[0,1]}$, а на множестве E сходится к $f(x)$ в метрике $L^p(E)$.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Для $f(x) \in L^p_{[0,1]}$, $p \in [1,2]$ положим

$$c_k(f) = \int_0^1 f(t) e^{-i2\pi kt} dt.$$

Для каждого натурального числа m, обозначим через A_m множество m разных индексов, для которых

$$|c_{|k|}(f)| \geq |c_{|n|}(f)|, \quad \forall |k| \in A_m, \quad \forall |n| \notin A_m.$$

Положим

$$G_m(x,f) = \sum_{|k| \in A_m} c_k(f) e^{i2\pi kx}.$$

Говорят, что гриди алгоритм функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^p_{(E)}$, если существует

$$\lim_{m\to\infty} \int_E |G_m(x,f) - f(x)|^p dx = 0.$$

Подробнее об этом алгоритме см. [1] - [3].

В работе [2] В. Н. Темляков доказал, что существует функция $f_0(x) \in \bigcap_{1\le p<2} L^p_{[0,1]}$, гриди алгоритм которой по тригонометрической системе расходится по мере. Естественен следующий вопрос : *существует ли измеримое множество е сколь угодно малой меры такое, что после изменения значений любой функции класса $L^1_{[0,2\pi]}$ на е, гриди алгоритм по тригонометрической системе измененной функции сходился бы к этой функции по мере ?*

Мы собираемся доказать, что поставленный вопрос имеет положительный ответ. Более того, мы докажем общее утверждение, из которого следует, в частности, следующая

Теорема 1. Для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для любого $p \in [1,2)$ и каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, $g(x) = f(x)$ на E, такую, что гриди алгоритм функции $g(x)$ по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1_{[0,1]}$, а на множестве E сходится к $f(x)$ в метрике $L^p_{(E)}$.

Теорема 1 следует из утверждения :

Теорема 2. Для любого $\epsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\epsilon$ такое, что для любого $p \in [1,2)$ и каждой функции $f(x) \in L^p_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, $g(x) = f(x)$ на E, и перестановку $\{\sigma(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $(\sigma(-k) = -\sigma(k))$ целых чисел $0, \pm1, \pm2, \dots$ такие, что

$$1)\ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{|k|\le n} c_{\sigma(k)}(g) e^{i2\pi\sigma(k)x} - g(x) \right| dx = 0,$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} \int_E \left| \sum_{|k|\le n} c_{\sigma(k)}(g) e^{i2\pi\sigma(k)x} - f(x) \right|^p dx = 0,$$

$$3)\ |c_{\sigma(k)}(g)| > |c_{\sigma(k+1)}(g)|,\ \forall k \ge 0,$$

$$4)\ \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx < \epsilon, \quad \sum_{k=1}^{n} |c_{\sigma(k)}(g)|^r < \infty, \quad \forall r > 2.$$

В связи с Теоремой 2 возникают следующеи вопросы, ответы на которые нам неизвестны.

Вопрос 1. Можно ли в Теореме 2 исправленную функцию $g(x)$ и перестановку $\{\sigma(k)\}$ выбрать так, чтобы в дополнение к утверждениям 1) - 4) обеспечить также сходимость почти всюду ряда $\sum_{k=1}^{n} c_{\sigma(k)}(g)\varphi_{\sigma(k)}(x)$?

Вопрос 2. Можно ли в Теореме 2 перестановку $\{\sigma(k)\}$ выбрать независящей от исправленной функции $f(x)$?

Необходимо отметить, что идея об исправлении функции на малых множествах с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Н. Лузину [5], который в 1912 доказал следующую знаменитую теорему.

Теорема (Н. Н. Лузин). Для каждой измеримой, почти всюду конечной на $[0,1]$ *функции* $f(x)$ *и для любого* $\epsilon > 0$ *существует измеримое множество* E *с мерой* $|E| > 1-\epsilon$ *и непрерывная на* $[0,1]$ *функция* $g(x)$, *совпадающая с* $f(x)$ *на* E.
В дальнейшем идея Н. Н. Лузина получила существенное развитие. В 1939 Д. Е. Меньшов [6] доказал следующую фундаментальную теорему.

Теорема (Д. Е. Меньшов). Пусть $f(x)$ *измеримая, почти всюду конечная функция на* $[0,2\pi]$. *Каково бы ни было* $\epsilon > 0$, *можно определить непрерывную функцию* $g(x)$, *совпадающую с* $f(x)$ *на некотором множестве* E, $|E| > 2\pi - \epsilon$ *и такую, что ряд Фурье функции* $g(x)$ *по тригонометрической системе сходится равномерно на* $[0,2\pi]$.

Далее в этом направлении интересные результаты были получены А. А. Талаляном, Ф. Г. Арутюняном, О. Д. Церетели, У. Прайсом, К. И. Осколковым, Б. С. Кашиным, К. С. Казаряном, Ш. В. Хведелидзе, А. Б. Гулисашвили, Р. И. Осиповым, Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зеркидзе и автором (см. [9] - [19], [28]). Представим некоторые из этих результатов.

Теорема (А. А. Талалян [5]). Члены любой полной ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$ *можно переставить так, чтобы вновь полученная система* $\{\varphi_{\nu_k}\}$ *обладала следующим свойством : для любой функции* $f(x) \in L^2[0,1]$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти функцию* $g(x) \in L^2[0,1]$ *такую, что* $|\{x \in [0,1], g(x) \neq f(x)\}| < \varepsilon$ *и ее ряд Фурье по системе* $\{\varphi_{\nu_k}\}$ *сходится почти всюду.*
В 1978 Ш. В. Хведелидзе [12] опубликовал следующий результат.

Теорема (Ш. В. Хведелидзе). Любую функцию $f(x) \in L^1$ *изменением на некотором множестве* e, *зависящем от* $f(x)$, *можно превратить в функцию* $g(x) : |g(x)| = |f(x)|$, *ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней почти всюду и в метрике* L^1.
В работе [21] автора доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$, такое, что для каждой функции $f(x) \in L^1_{[0,1]}$ можно найти функцию $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, совпадающую с $f(x)$ на E, ряд Фурье которой по тригонометрической системе сходится к ней по норме $L^1_{[0,1]}$.

Замечание 1. Необходимо отметить, что как в теореме Д. Е. Меньшова, так и в работах [5] - [20] и [27], "исключительное" множество e, на котором происходит изменение $f(x)$, зависит от $f(x)$, тогда как в работах [21] - [27] и в теоремах, доказанных в настоящей статье это исключительное множество не зависит от исправляемой функции $f(x)$, т.е. оно обслуживает целый функциональный класс.

§2. ОСНОВНЫЕ ЛЕММЫ

Лемма 1. Для любых чисел $\gamma \neq 0$, $N_0 > 1$, $\delta \in (0,1)$, $\epsilon_0 \in (0,1)$ и интервала $\Delta \subset [0,1]$ существуют функция $g(x) \in L^1_{[0,1]}$, измеримое множество $E \subset [0,1]$, полином вида

$$Q(x) = \sum_{N_0 \leq |k| \leq N} a_k e^{i2\pi kx}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k,$$

и перестановка $\{\sigma(k)\}_{|k|=N_0}^{N}$ целых чисел $N_0, \ldots, N$, удовлетворяющие условиям :

$$1)\ g(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E, \\ 0, & x \notin \Delta, \end{cases} \qquad |E| > (1-\delta)|\Delta|,$$

$$2)\ \int_0^1 |g(x)|dx < 2|\gamma||\Delta|, \qquad \left(\int_0^1 |Q(x) - g(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \epsilon_0,$$

$$3)\ \sum_{|k|=N_0}^{N} |a_k|^{2+\delta} < \epsilon_0, \quad |a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad \forall k \in (N, M),$$

$$4)\ \left(\sum_{|k|=N_0}^{M} a^2_{\sigma(k)}\right)^{1/2} \leq 2|\gamma|\sqrt{\frac{|\Delta|}{\delta}}, \quad \sigma(-k) = -\sigma(k).$$

Доказательство : Разделим отрезок Δ на конечное число интервалов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ так, чтобы

$$\max_{1 \leq \nu \leq \nu_0} \left(|\gamma|\sqrt{\frac{|\Delta_\nu|}{\delta}}\right)^{\delta} < \epsilon, \quad \text{где} \quad \epsilon = \frac{\epsilon_0 \delta}{4^{\nu_0}(\gamma^2|\Delta| + 1)}. \tag{1}$$

Положим

$$I(x) = \begin{cases} -\frac{2-\delta}{\delta}\gamma, & x \in \left[0, \frac{\delta}{2}\right], \\ \gamma, & x \in \left[\frac{\delta}{2}, 1\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Продолжим эту функцию с отрезка $[0,1]$ на всю действительную ось с периодом 1. Нетрудно видеть, что существует натуральное число $s_1 > 2\nu_0$ такое, что

$$\left|\int_0^1 [I(2^{s_1}x)\chi_{\Delta_1}(x)]e^{-i2\pi nx}dx\right| < \frac{\epsilon}{2\sqrt{N_0}}, \quad n = 1, 2, \ldots, N_0. \tag{3}$$

Положим

$$g_1(x) = I(2^{s_1}x)\chi_{\Delta_1}(x), \quad E_1 = \{x \in [0,1] : g_1(x) = \gamma_1\}. \tag{4}$$

Тогда из (2) – (4) вытекает

$$|E_1| > (1-\delta)|\Delta_1|, \quad g_1(x) = 0, \quad x \notin \Delta_1, \tag{5}$$

$$\int_0^1 |g_1(x)|dx < 2|\gamma||\Delta_1|, \quad \int_0^1 g_1^2(x)dx < \frac{2}{\delta}\gamma^2|\Delta_1|. \tag{6}$$

Возьмем натуральное число N_1 настолько большим, чтобы

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{|k|=0}^{N_1-1} a_k^{(1)} e^{i2\pi kx} - g_1(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} < \frac{\epsilon}{4},$$

где

$$a_k^{(1)} = \int_0^1 g_1(x)e^{-i2\pi kx}dx, \quad k = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots.$$

Отсюда и из (3) и (4)

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{|k|=N_0}^{N_1-1} a_k^{(1)} e^{i2\pi kx} - g_1(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} \le \frac{\epsilon}{4} + \left(\sum_{|k|=0}^{N_0} \left[a_k^{(1)}\right]^2\right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon. \tag{7}$$

Предположим, что уже определены функции $g_1(x), \ldots, g_{\nu-1}$, множества $E_1, \ldots, E_{\nu-1}$, числа $N_1, \ldots, N_{\nu-1}$ и полиномы $Q_1(x), \ldots, Q_{\nu-1}(x)$. Возьмем натуральные числа s_ν и N_ν настолько большими, чтобы выполнялись неравенства

$$\left|\int_0^1 [I(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x)]e^{-i2\pi kx}\right| < \frac{\epsilon}{16\sqrt{N_{\nu-1}}}, \quad |k| \le N_{\nu-1},$$

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{|k|=0}^{N_{\nu-1}} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx} - g_\nu(x)\right|^2 dx\right)^{1/2} < \frac{\epsilon}{4},$$

где

$$g_\nu(x) = I(2^{s_\nu}x)\chi_{\Delta_\nu}(x), \quad a_k^{(\nu)} = \int_0^1 g_\nu(x)e^{-i2\pi kx}dx \tag{8}$$

и положим

$$E_\nu = \{x \in \Delta_\nu : g_\nu(x) = \gamma\}. \tag{9}$$

Рассуждая также, как и при получении оценок (5) – (7), мы заключаем, что функция $g_\nu(x)$, множество E_ν и полином вида

$$Q_\nu(x) = \sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx} \tag{10}$$

удовлетворяют следующим условиям :

$$g_\nu(x) = \begin{cases} \gamma, & x \in E_\nu, \\ 0, & x \notin \Delta_\nu, \end{cases} \qquad |E_\nu| > (1-\delta)|\Delta_\nu|, \tag{11}$$

$$\int_0^1 |g_\nu(x)|dx < 2|\gamma||\Delta_\nu|, \quad \int_0^1 g_\nu^2(x)dx < \frac{2}{\delta}\gamma^2|\Delta_\nu|, \tag{12}$$

$$\left(\int_0^1 |Q_\nu(x) - g_\nu(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < \epsilon. \tag{13}$$

Положим

$$g(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} g_\nu(x), \quad E = \bigcup_{\nu=1}^{\nu_0} E_\nu, \tag{14}$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\Bigg(\sum_{N_{\nu-1}\le|k|\le N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx}\Bigg) = \sum_{N_0\le|k|\le N} a_k e^{i2\pi kx}, \tag{15}$$

$$a_k = a_k^{(\nu)}, \quad |k| \in [N_{\nu-1}, N_\nu), \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \quad N = N_{\nu_0} - 1. \tag{16}$$

Утверждения 1) и 2) леммы следуют из формул (9) - (15).

Из (8), (12) и неравенства Бесселя имеем

$$\sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2 \le \int_0^1 |g_\nu(x)|^2dx \le \frac{2}{\delta}|\gamma|^2|\Delta_\nu| \tag{17}$$

для всех $\nu \in [1, \nu_0]$. Отсюда и из (1) и (16) следует

$$\sum_{|k|=N_0}^{N} |a_k|^{2+\delta} < \left(\max_{N_0\le|k|\le N} |a_k|\right)^\delta \sum_{|k|=N_0}^{N} |a_k|^2 =$$

$$= \left(\max_{N_0\le|k|\le N} |a_k|\right)^\delta \sum_{\nu=1}^{\nu_0}\left[\sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2\right] \le \epsilon\frac{2}{\delta}\gamma^2|\Delta| < \epsilon_0,$$

т.е. утверждения 1) - 3) леммы выполнены.

Чтобы доказать 4), переставим члены полинома $Q(x) = \sum\limits_{|k|=N_0}^{N} a_k e^{i2\pi kx}$ так, чтобы выполнялось $|a_{\sigma(N_0)}| \ge \ldots \ge |a_{\sigma(k)}| \ge \ldots \ge |a_{\sigma(N)}|$ (здесь $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^{N}$ - некоторая перестановка натуральных чисел $N_0, \ldots, N$ и $\sigma(-k) = -\sigma(k)$). В силу (16) и (17)

$$\left(\sum_{|k|=N_0}^{N} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\sum_{|k|=N_{\nu-1}}^{N_\nu-1} |a_k^{(\nu)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < 2|\gamma|\sqrt{\frac{|\Delta|}{\delta}}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $|a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0$, $\forall k \in [N_0, N)$, и, следовательно, Лемма 1 полностью доказана.

Лемма 2. Для любых $\epsilon > 0$, $f(x) \in L^2_{[0,1]}$ с $\int_0^1 |f(x)|dx > 0$ и $N > 1$, можно найти измеримое множество $E \subset [0,1]$, функцию $g(x)$, полином вида

$$Q(x) = \sum_{|k|=N_0}^{M} a_k e^{i2\pi kx}, \quad a_{-k} = \overline{a}_k,$$

и перестановку $\{\sigma(k)\}_{k=N_0}^{M}$ целых чисел $N_0, \ldots, M$, удовлетворяющие условиям :

1) $|E| > 1 - \epsilon, \quad g(x) = f(x), \quad x \in E.$

2) $\int_0^1 |g(x)|dx \le 3\int_0^1 |f(x)|\,dx, \quad \int_0^1 |Q(x) - g(x)|dx < \epsilon,$

3) $\sum_{|k|=N_0}^{N} |a_k|^{2+\epsilon} < \epsilon, \quad |a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad \forall k \in (N_0, N),$

4) $\max_{N \le m \le N} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{i2\pi kx} \right| dx < 3\int_0^1 |f(x)|\,dx \quad (\sigma(-k) = -\sigma(k)),$

5) $\max_{N \le m \le N} \left(\int_E \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{i2\pi kx} \right|^p dx \right)^{1/p} < 2\left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \epsilon.$

Доказательство : Расмотрим ступенчатую функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x), \tag{18}$$

с интервалами постоянства Δ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, \nu_0$ такую, что

$$0 < |\gamma_\nu^2||\Delta_\nu| < \frac{\epsilon}{16^2}\left[\int_0^1 |f(x)|\,dx\right]^2, \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{19}$$

$$\left(\int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|^2 dx\right) < \min\left\{\frac{\epsilon}{4}, \ \frac{1}{4}\int_0^1 |f(x)|dx\right\}. \tag{20}$$

Последовательным применением леммы 1 определим числа $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_{\nu_0-1}$, функции $g_1(x), \ldots, g_{\nu_0}(x)$, множества $E_1, \ldots, E_{\nu_0}$, полиномы

$$Q_\nu(x) = \sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_k^{(\nu)} e^{i2\pi kx}, \quad 1 \le \nu \le \nu_0, \tag{21}$$

и перестановку $\{\sigma_\nu(k)\}_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}$ целых чисел $N_{\nu-1}+1,\dots,N_\nu$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_0=\frac{\epsilon}{4\nu_0},\quad \alpha_\nu=\min\left\{\frac{\epsilon}{4\nu_0}\int_0^1|f(x)|dx,\quad \min_{N_{\nu-1}<|k|\le N_\nu}\left(|a_k^{(\nu)}|\right)\right\},\ 1\le\nu\le\nu_0, \tag{22}$$

$$g_\nu(x)=\begin{cases}\gamma_\nu, & x\in E_\nu,\\ 0, & x\notin\Delta_\nu,\end{cases},\quad |E_\nu|>(1-\epsilon)|\Delta_\nu|,\quad 1\le\nu\le\nu_0, \tag{23}$$

$$\int_0^1|g_\nu(x)|dx\le 2|\gamma_\nu||\Delta_\nu|,\quad \int_0^1|Q_\nu(x)-g_\nu(x)|dx<\alpha_{\nu-1}, \tag{24}$$

$$\left(\sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}|a_k^{(\nu)}|^{2+\epsilon}\right)^{\frac{1}{2+\epsilon}}<\alpha_{\nu-1},\ |a_{\sigma_\nu(k)}^{(\nu)}|>\ldots>|a_{\sigma_\nu(k+1)}^{(\nu)}|>0,\ \forall k\in(N_{\nu-1},N_\nu] \tag{25}$$

$$\left(\sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{m}a_{\sigma_\nu(k)}^2\right)^{1/2}\le 2|\Delta_\nu|\sqrt{\frac{|\gamma_\nu|}{\epsilon}},\quad 1\le\nu\le\nu_0. \tag{26}$$

Положим

$$g(x)=\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_0}g_\nu(x)\right)+f(x)-\varphi(x),\quad E=\bigcup_{\nu=1}^{\nu_0}E_\nu, \tag{27}$$

$$Q(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}Q_\nu(x)=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\left(\sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu}a_k^{(\nu)}e^{i2\pi kx}\right)=\sum_{|k|=N}^{M}a_ke^{i2\pi kx}, \tag{28}$$

где

$$M=N_{\nu_0},\quad N_0=N+1,\quad a_k=a_k^{(\nu)},\quad |k|\in(N_{\nu-1},N_\nu],\quad 1\le\nu\le\nu_0, \tag{29}$$

$$\sigma(k)=\sigma_\nu(k),\quad k\in(N_{\nu-1},N_\nu],\quad 1\le\nu\le\nu_0. \tag{30}$$

Из (18) – (25) вытекает

$$g(x)=f(x),\quad x\in E,\quad \int_0^1|g(x)|\,dx\le 3\int_0^1|f(x)|dx,$$

$$|E|=\sum_{\nu=1}^{\nu_0}|E_\nu|\ge(1-\epsilon)\sum_{\nu=1}^{\nu_0}|\Delta_\nu|=1-\epsilon,$$

$$\left(\int_0^1|Q(x)-g(x)|^2dx\right)^{1/2}\le\sum_{\nu=1}^{\nu_0}\left(\int_0^1|Q_\nu(x)-g_\nu(x)|^2dx\right)^{1/2}+$$

$$+\int_0^1|f(x)-\varphi(x)|\,dx<\epsilon\sum_{|k|=N}^{M}|a_k|^{2+\epsilon}<\epsilon,$$

доказывающие утверждения 1) и 2) Леммы 2.

Заметим, что ввиду (22) и (25) для каждого $\nu \in [1, \nu_0]$ и всех $|k| \in (N_{\nu-1}, N_\nu]$

$$|a_k^{(\nu)}| \le |\alpha_{\nu-1}| < \min_{N_{\nu-2}<i\le N_{\nu-1}} \left(|a_i^{(\nu-1)}|\right), \quad |k| \in (N_{\nu-1}, N_\nu].$$

Следовательно, из (25), (29) и (30) имеем

$$|a_{\sigma(k)}| > |a_{\sigma(k+1)}| > 0, \quad |k| \in [N, M).$$

Чтобы доказать утверждение 4), предположим, что $m \in [N, M]$. Тогда $N_{\nu-1} < m \le N_\nu$ для некоторого $\nu \in [1, \nu_0]$. Следовательно, из (21), (28) – (30) получим

$$\sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} = \sum_{n=1}^{\nu-1} Q_n(x) + \sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{m} a_{\sigma_\nu^{(\nu)}(k)} e^{i2\pi\sigma_\nu(k)x}.$$

Отсюда и из соотношений (19), (22), (24) и (26) имеем

$$\int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} \right| dx \le \sum_{n=1}^{\nu-1} \int_0^1 |Q_n(x) - g_n(x)| dx + \sum_{n=1}^{\nu_0} \int_0^1 |g_n(x)|\, dx +$$
$$+ \int_0^1 \left| \sum_{|k|=N_{\nu-1}+1}^{m} a_{\sigma_\nu^{(\nu)}(k)} e^{i2\pi\sigma_\nu(k)x} \right| dx \le$$
$$\le \frac{\epsilon \int_0^1 |f(x)| dx}{4\nu_0} + 2\int_0^1 |\varphi(x)| dx + 2|\Delta_\nu| \sqrt{\frac{|\gamma_\nu|}{\epsilon}} \le 3\int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Принимая во внимание равенство

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu} g_k(x) \right| = |\varphi(x)|, \quad \forall x \in E, \quad \forall \nu \in [1, \nu_0]$$

(см. (18), (23), (27)), для любого $p \in [1, 2)$ имеем

$$\left(\int_E \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} \le \sum_{k=1}^{\nu-1} \left(\int_E |Q_k(x) - g_k(x)|^2\, dx \right)^{1/2} +$$
$$+ \left(\int_E \left| \sum_{k=1}^{\nu-1} g_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_0^1 \left| \sum_{|k|=N}^{m} a_{\sigma(k)} e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^2 dx \right)^{1/2} <$$
$$< 2\left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \epsilon.$$

Доказательство завершено.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

Последовательное применение леммы 2 к последовательности тригонометрических полиномов с рациональными коэффициентами, которые обозначим через

$$\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}, \tag{31}$$

приводит к последовательностям функций $\{\overline{g}_n(x)\}$, к множествам $\{E_k\}$ и полиномам

$$\overline{Q}_n(x) = \sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_n-1} a_k^{(n)} e^{i2\pi\sigma_n(k)x} \quad m_0 = 1, \quad a_{-k}^{(n)} = \overline{a}_k^{(n)}, \tag{32}$$

где $\{\sigma_n(k)\}_{k=m_{n-1}}^{m_n-1}$ $(\sigma_n(-k) = -\sigma_n(k))$ - некоторая перестановка натуральных чисел $m_{n-1}, m_{n-1}+1, \ldots, m_n - 1$ (для любого фиксированного n). При этом, выполняются следующие условия :

$$\overline{g}_n(x) = f_n(x), \quad x \in E_n, \quad |E_n| > 1 - 4^{-8(n+2)}\epsilon, \tag{33}$$

$$\int_0^1 |\overline{g}_n(x)|dx < 3\int_0^1 |f_n(x)|\,dx, \quad \left(\int_0^1 |\overline{Q}_n(x) - \overline{g}_n(x)|^2\,dx\right)^{1/2} < 4^{-8(n+2)}, \tag{34}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_k^{(n)} e^{i2\pi\sigma_n(k)x} \right| \le 3\int_0^1 |f_n(x)|dx, \tag{35}$$

$$\max_{m_{n-1}\le N<m_n} \left(\int_{E_n} \left| \sum_{|k|=m_{n-1}}^{N} a_k^{(n)} e^{i2\pi\sigma_n(k)x} \right|^p dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le 3\left(\int_0^1 |f_n(x)|^p dx\right)^{1/p} + \epsilon\, 4^{-8(n+2)}, \ \forall p \in [1,2), \tag{36}$$

$$|a_k^{(n)}| > |a_{k+1}^{(n)}| > |a_{m_n}^{(n+1)}| > 0, \quad \forall n \ge 1, \quad \forall k \in [m_{n-1}, m_n - 1], \tag{37}$$

$$\sum_{|k|=m_{n-1}}^{m_{n-1}} \left|a_k^{(n)}\right|^{2+4^{-8(n+2)}} < 4^{-8(n+2)}. \tag{38}$$

Положим

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n, \tag{39}$$

очевидно, что $|E| > 1 - \epsilon$ (см. (33)).

Пусть $p \in [1,2)$ и $f(x) \in L^p_{[0,1]}$. Тогда нетрудно видеть, что из последовательности (31) можно выбрать последовательность $\{f_{k_n}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{N} f_{k_n}(x) - f(x) \right|^p dx = 0, \tag{40}$$

$$\left(\int_0^1 |f_{k_n}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \le \epsilon 4^{-8(n+2)}, \quad n \ge 2, \tag{41}$$

где $f_{k_1}(x)$ имеют вид

$$f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1} b_k e^{i2\pi\overline{\sigma}(k)x}, \quad |b_k| > |b_{k+1}| > 0. \quad \forall |k| \in [1, m_{\nu_1}], \quad b_{-k} = \overline{b}_k, \quad (42)$$

и $\overline{\sigma}(|k|)$ - некоторая перестановка натуральных чисел $1, 2, \dots, m_{\nu_1} - 1$ и $\overline{\sigma}(-k) = -\overline{\sigma}(k)$. Очевидно, что

$$\int_0^1 |f(x) - f_{k_1}(x)|\, dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (43)$$

Положим

$$a_k = \begin{cases} b_k, & k \in [1, m_{\nu_1}), \\ a_k^{(n)}, & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq \nu_1 + 1, \end{cases} \quad (44)$$

$$\sigma(k) = \begin{cases} \overline{\sigma}(k), & k \in [1, m_{\nu_1}), \\ \sigma_n(k), & k \in [m_{n-1}, m_n), \quad n \geq \nu_1 + 1, \end{cases} \quad (45)$$

$$g_1(x) \equiv Q_1(x) = f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x}. \quad (46)$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1 < \dots < \nu_{q-1}$, $m_{\nu_1} - 1 = l(1) < l(2) < \dots < l(q-1)$, $\{b_{l(k)}\}_{k=1}^{q-1}$, функции $g_n(x)$, $f_{\nu_n}(x)$, $1 \leq n \leq q-1$ и полиномы

$$Q_n(x) = \sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x},\ M_n = m_{\nu_n - 1},\ \overline{M}_n = m_{\nu_n} - 1,\ M_1 > N_1,\ a_{-k} = \overline{a}_k,$$

удовлетворяющие условиям

$$g_n(x) = f_{k_n}(x), \quad x \in E_{\nu_n}, \quad \int_0^1 |g_n(x)|\, dx < 4^{-3n}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$\left(\int_0^1 \left| \sum_{k=2}^{n} \left[\left(Q_k(x) + b_{l(k)} \cos(l(k)x) \right) - g_k(x) \right] \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-8(n+1)},\ 1 \leq n \leq q-1, \quad (47)$$

$$\max_{M_n \leq N < \overline{M}_n} \left(\int_E \left| \sum_{k=M_n}^{N} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-3n}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$\max_{M_n \leq N < \overline{M}_n} \int_0^1 \left| \sum_{k=M_n}^{N} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right| dx < 4^{-3n}, \quad 1 \leq n \leq q-1,$$

$$l(n) = \min\left\{ k \in N : \quad k \notin [1, m_{\nu_1}] \bigcup \left(\bigcup_{j=2}^{n-1} [M_j, \overline{M}_j] \right) \bigcup \{l(s)\}_{s=1}^{n-1} \right\}, \quad l(-n) = -l(n),$$

$$|a_{\overline{M}_n}| > |b_{l(n)}| > |a_{M_n+1}|.$$

Возьмем натуральное число ν_q и функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (31) такие, чтобы выполнялось

$$\left(\int_0^1\left|f_{\nu_q}(x)-\left(f_{k_q}(x)-\sum_{n=2}^{q-1}\left[\left(Q_n(x)+b_{l(n)}\cos(l(n)x)\right)-g_n(x)\right]\right)\right|^p dx\right)^{1/p}<$$

$$<4^{-8(q+2)}, \tag{48}$$

$$|a_{m_{\nu_q-1}}|<|b_{l(q-1)}| \tag{49}$$

(см. (38) и (44)). Тогда в силу (41) и (47)

$$\left(\int_0^1\left|f_{k_q}(x)-\sum_{n=2}^{q-1}\left[\left(Q_n(x)+b_{l(n)}\cos(l(n)x)\right)-g_n(x)\right]\right|^p dx\right)^{1/p}<4^{-8q-1}.$$

Из (48) получим

$$\left(\int_0^1\left|f_{\nu_q}(x)\right|^p dx\right)^{1/p}<4^{-8q}. \tag{50}$$

Положим

$$Q_q(x)=\overline{Q}_{\nu_q}(x)=\sum_{k=M_q}^{\overline{M}_q}c_k^{(q)}e^{i2\pi\sigma(k)x},\quad \overline{M}_q=m_{\nu_q}-1,\quad M_q=m_{\nu_q-1}, \tag{51}$$

$$g_q(x)=f_{k_q}(x)+[\overline{g}_{\nu_q}(x)-f_{\nu_q}(x)], \tag{52}$$

$$l(q)=\min\left\{k\in N: k\notin[1,m_{\nu_1}]\bigcup\left(\bigcup_{n=2}^{q-1}[M_n,\overline{M}_n]\right)\bigcup\{l(s)\}_{s=1}^{q-1}\right\}, \tag{53}$$

$$l(-q)=-l(q),$$

$$b_{l(q)}=\min\left\{4^{-8(q+3)}:\ \frac{1}{2}|a_{\overline{M}_q}|\right\},\ b_{-l(q)}=b_{l(q)}. \tag{54}$$

Учитывая соотношения (33), (34), (35), (44), (45) и (47) – (54), получим

$$g_q(x)=f_{k_q}(x),\quad x\in E_{\nu_q}, \tag{55}$$

$$\int_0^1|g_q(x)|dx\le\int_0^1\left|f_{\nu_q}(x)-\left(f_{k_q}(x)-\sum_{j=2}^{q-1}\left[\left(Q_j(x)+b_{l(j)}\cos(l(j)x)\right)-g_j(x)\right]\right)\right|dx+$$

$$+\int_0^1|\overline{g}_{\nu_q}(x)|dx+\int_0^1\left|\sum_{j=2}^{q-1}\left[\left(Q_j(x)+b_{l(j)}\cos(l(j)x)\right)-g_j(x)\right]\right|dx<4^{-3q}, \tag{56}$$

$$\left(\int_0^1\left|\sum_{j=2}^{q}\left[\left(Q_j(x)+b_{l(j)}\cos(l(j)x)\right)-g_j(x)\right]\right|^p dx\right)^{1/p}\le$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - \left(f_{k_q}(x) - \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{i2\pi\sigma(l(j))x} \right) - g_j(x) \right] \right) \right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+|b_{l(q)}| + \left(\int_0^1 |\overline{Q}_{\nu_q}(x) - \overline{g}_{\nu_q}(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} < 4^{-8(q+1)}, \tag{57}$$

$$\max_{M_q \leq N < \overline{M}_q} \int_0^1 \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right| dx \leq 3 \int_0^1 |f_{\nu_q}(x)| dx < 4^{-3q}, \tag{58}$$

$$\max_{M_q \leq N < \overline{M}_q} \left(\int_E \left| \sum_{|k|=M_q}^{N} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} < 4^{-3q}, \tag{59}$$

$$|a_{M_q}| > \ldots > |a_k| > \ldots > |a_{\overline{M}_q}| > |b_{l(q)}|. \tag{60}$$

Ясно, что по индукции определяются последовательности функций $\{g_q(x)\}$, чисел $\{l(q)\}_{q=2}^{\infty}$, $\{b_{l(q)}\}_{q=2}^{\infty}$ и полиномов $\{Q_q(x)\}$, удовлетворяющих условиям (53) – (60) для всех $q \geq 2$.

Учитывая выбор $\{\sigma(k)\}_{k=1}^{\infty}$, $\{[M_q, \overline{M}_q]\}_{q=2}^{\infty}$ и $\{l(q)\}_{q=2}^{\infty}$ (см. (32), (45), (51), (52)), получим, что последовательность натуральных чисел

$$\sigma(1)\ldots\sigma(m_{\nu_1}-1), \sigma(M_2)\ldots\sigma(\overline{M}_2), l(2)\ldots l(n-1),$$

$$\sigma(M_n)\ldots\sigma(k)\ldots\sigma(\overline{M}_n), l(n)\ldots \tag{61}$$

есть некоторая перестановка последовательности $1, 2, \ldots, n, \ldots$ Далее, запишем последовательность (61) в виде

$$\sigma_f(1), \quad \sigma_f(2), \ldots, \sigma_f(k), \ldots$$

и определим функцию $g(x)$ и ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x}$ следующим образом :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x), \quad g_1(x) = Q_1(x) = f_{k_1}(x) = \sum_{|k|=1}^{m_{\nu_1}-1} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x}, \tag{62}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x} = \sum_{|k|=0}^{m_{\nu_1}-1} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\sum_{|k|=M_n}^{\overline{M}_n} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} + b_{l(n)} \cos(l(n)x) \right], \tag{63}$$

где $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть последовательность $a_1, \ldots, a_{m_{\nu_1}-1}$, $a_{M_2}, \ldots, a_{\overline{M}_2}$, $a_{M_n}, \ldots, a_{\overline{M}_n}$, $b_{l(2)}, \ldots, b_{l(n-1)}$, $b_{l(n)}, \ldots$ и $c_{-k} = \overline{c}_k$.

Отсюда и из условий (37), (38), (43) – (46), (49), (55), (56) и (59) вытекает

$$|c_k| > |c_{k+1}|, \quad \forall k \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^r < \infty, \quad \forall r > 2,$$

$$g(x) \in L^1_{[0,1]}, \quad g(x) = f(x), \quad x \in E, \quad \int_0^1 |g(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Пусть $N > M_1$ – произвольное натуральное число. Тогда для некоторого натурального числа q имеем

$$N_q \leq N < N_{q+1}, \tag{64}$$

где

$$N_q = M_1 + 1 + \sum_{k=2}^{q} [\overline{M}_k - M_k + 2], \quad \forall q \geq 2. \tag{65}$$

Из соотношений (54), (56) – (65) и равенства $g(x) = f(x)$ на E, получим, что

$$\left(\int_E \left| \sum_{|k|=1}^{N} c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x} - f(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \left(\int_E \left| \sum_{j=2}^{q-1} \left[\left(Q_j(x) + b_{l(j)} e^{i2\pi\sigma(l(j))x} \right) - g_j(x) \right] \right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ \sum_{s=q}^{\infty} \left(\int_E |f_{k_s}(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \max_{M_q \leq m \leq \overline{M}_q} \left(\int_E \left| \sum_{k=1}^{m} a_k e^{i2\pi\sigma(k)x} \right|^p dx \right)^{1/p} +$$

$$+ |b_{l(q)}| < 2^{-q}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\int_0^1 \left| \sum_{|k|=1}^{N} c_k e^{i2\pi\sigma_f(k)x} - g(x) \right| dx < 2^{-q}.$$

Следовательно,

$$c_k = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi\sigma_f(k)x} dx = c_{\sigma(k)}(g).$$

Теорема полностью доказана.

Abstract. The paper proves that for any $\epsilon > 0$ there exists a measurable set $E \subset [0,1]$, $|E| > 1 - \epsilon$, such that for each $f(x) \in L^p[0,1]$ ($p \in [1,2)$) there exists a

function $g(x) \in L^1[0,1]$, $g(x) = f(x)$ on E, such that the greedy algorithm of $g(x)$ by the trigonometric system converges to $g(x)$ in the $L^1_{[0,1]}$ norm and to $f(x)$ in the $L^p(E)$ norm.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. N. Temlyakov, "Greedy Algorithm and m-term trigonometric approximation", Constructive Approx., vol. 14, pp. 569-587, 1998.
2. S. V. Konyagin and V. N. Temlyakov, "A remark on greedy approximation in Banach spaces", East J. on Approx., vol. 5, pp. 1-15, 1999.
3. P. Wojtaszcyk, "Greedy algorithm for general biorthogonal systems", J. of Approx. Theory, vol. 107, pp. 293-314, 2000.
4. S. A. Episkoposian, "On the systems which are not quasi-greedy basis", Isaac International Conference, 2002, Yerevan, Armenia.
5. Н. Н. Лузин, "К основной теореме интегрального исчисления", Мат. Сб., том 28, стр. 266 - 294, 1912.
6. Д. Е. Меньшов, "О равномерной сходимости рядов Фурье", Мат. Сб., том 53, № 2, стр. 67 - 96, 1942.
7. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье от суммируемых функций", Труды Моск. Мат. Общ., том 1, стр. 5 - 38, 1952.
8. Д. Е. Меньшов, "О рядах Фурье непрерывных функций", Уч. Зап., том 148, № 4, стр. 108 - 132, 1951.
9. А. А. Талалян, "О зависимости сходимости ортогональных рядов от изменения значений разлагаемой функции", Мат. Зам., том 33(5), стр. 715 - 722, 1983.
10. К. И. Осколков, "Равномерный модуль непрерывности суммируемых функций на множествах положительной меры", ДАН СССР, том 228, № 2, стр. 304 - 306, 1976.
11. А. А. Талалян, "О рядах по системе Хаара", ДАН Арм. ССР, том 42, № 3, стр. 134 - 140, 1966.
12. Б. С. Кашин, Г. Г. Кошелева, "Об одном подходе к теоремам об исправлении", Вестник МГУ, Сер. мат., мех., № 1, стр. 6 - 8, 1988.
13. О. Д. Церетели, "О сходимости почти всюду рядов Фурье", Сообщ. АН Груз. ССР, том 57, № 1, стр. 21 - 24, 1970.
14. J. J. Price, "Walsh series and adjustment of functions on small sets", Ill. J. Math., vol. 13, pp. 131 - 136, 1969.
15. Р. И. Осипов, "О сходимости рядов по системе Уолша", Изв. АН Арм. ССР (сер. мат.), том 1, № 4, стр. 270 - 283, 1966.
16. Ш. В. Хведелидзе, "Сходимость рядов Фурье почти всюду и в метрике L^1", Мат. сб., том 107, № 2, стр. 245 - 258, 1978.
17. К. С. Казарян, "О некоторых вопросах теории ортогональных рядов", Мат. сб., том 119, № 2, стр. 278 - 298, 1982.
18. Б. С. Кашин, "Об одной полной ортонормированной системе", Мат. сб., том 99, стр. 356 - 365, 1976.
19. А. Б. Гулисашвили, "Перестановки, расстановки знаков и сходимость последовательностей операторов", Зап. научн. сем. ЛОМИ, том 107, стр. 45 - 59, 1982.

20. Л. Д. Гоголадзе, Т. Ш. Зерекидзе, "О сопряженных функциях нескольких переменных", Сообщ. АН Груз. ССР, том 94, № 3, стр. 541 - 544, 1979.
21. M. G. Grigorian, "On convergence of Fourier series in the metric of L^1", Analysis Math., vol. 17(3), pp. 211 - 237, 1991.
22. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. сб., том 181, № 8, стр. 1011 - 1030, 1990.
23. М. Г. Григорян, "О сходимости в метрике L^1 и почти всюду рядов Фурье и о коэффициентах Фурье суммируемых функций", Изв. НАН Арм. ССР, Математика, том 26, № 2, стр. 18 - 35, 1991.
24. М. Г. Григорян, "Сходимость почти всюду рядов Фурье по полным ортонормированным системам", Мат. зам., том 51, № 5, стр. 35 - 43, 1992.
25. М. Г. Григорян, "О некоторых свойствах ортогональных систем", Изв. РАН, сер. мат., том 57, № 5, стр. 75 - 105, 1993.
26. M. G. Grigorian, "On the representation of functions by orthogonal series in weighted L^p spaces", Studia Math., vol. 134(3), pp. 207 - 216, 1999.
27. M. G. Grigorian, K. S. Kazarian, F. Soria, "Mean convergence of orthonormal Fourier series of mod. functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 352, № 8, pp. 3777 - 3799, 2000.
28. М. Г. Григорян, "Об усиленном L^p_μ-свойстве ортонормированных систем", Мат. сб., том 194, № 10, стр. 77 - 106, 2003.

Поступила 10 июня 2004