Известия НАН Армении. Математика, 39, № 5, 2004, 25–36

О РАСХОДИМОСТИ L^1–ГРИДИ АЛГОРИТМА ПО СИСТЕМЕ ХААРА

С. Гогян

Институт Математики НАН Армении
E-mail : smbatino@freenet.am

Резюме. В работе изучается L^1-гриди алгоритм по системе Хаара. Доказано существование L^1-гриди алгоритма для всех функций из L^1. Построена функция, L^1-гриди алгоритм которой не сходится к ней.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ полная, минимальная система в банаховом пространстве X и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ее сопряженная система. Предположим, что для каждого элемента $x \in X$ существуют числа $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$, для которых выполняются следующие равенства :

$$\inf_{\alpha,k} ||x - \alpha\varphi_k||_X = ||x - \hat{\alpha}\varphi_{\hat{k}}||_X, \tag{1}$$

$$\inf_{p} ||x - < x, \psi_p > \varphi_p||_X = ||x - < x, \psi_{\hat{p}} > \varphi_{\hat{p}}||_X. \tag{2}$$

Тогда $G_1(x,\varphi) = \hat{\alpha}\varphi_{\hat{k}}$ есть одночленный наилучший аппроксимант, а $\bar{G}_1(x,\varphi) = < x, \psi_{\hat{p}} > \varphi_{\hat{p}}$ самое близкое к x слагаемое в разложении элемента x по системе φ. Отметим, что (1) и (2) могут удовлетворяться при многих значениях $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ и $\hat{p}$. Для любого $x \in X$ определим последовательности $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\bar{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ индукцией по k. Для натурального k определим

$$G_{k+1}(x,\varphi) = G_k(x,\varphi) + G_1(x - G_k(x,\varphi),\varphi),$$

$$\bar{G}_{k+1}(x,\varphi) = \bar{G}_k(x,\varphi) + \bar{G}_1\left(x - \bar{G}_k(x,\varphi),\varphi\right).$$

Далее, обозначим $R_k(x,\varphi) = x - G_k(x,\varphi)$ и $\bar{R}_k(x,\varphi) = x - \bar{G}_k(x,\varphi)$. Легко видеть, что

$$R_{k+1}(x,\varphi) = x - G_{k+1}(x,\varphi) =$$

$$= x - G_k(x,\varphi) - G_1(x - G_k(x,\varphi),\varphi) = R_1(x - G_k(x,\varphi),\varphi),$$

т.е. $R_{k+1}(x,\varphi) = R_1(R_k(x,\varphi),\varphi)$.

Аналогично, $\bar{R}_{k+1}(x,\varphi) = \bar{R}_1(\bar{R}_k(x,\varphi),\varphi)$. Заметим, что $R_1(x,\varphi)$ получается из элемента x вычитанием одночленного наилучшего аппроксиманта. Итак, последовательность $\{R_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ строится так, что каждый ее член является остатком наилучшего одночленного приближения предыдущего члена. Последовательность $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ называется *X-гриди алгоритмом* элемента x по системе φ (см. [1]). Построенную последовательность $\{\bar{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ назовем *X-гриди по разложению алгоритмом* x по системе φ. Гриди алгоритмы разных типов изучены Р. ДеВором и В. Н. Темляковым [1], [2].

Последовательности $\{G_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\bar{G}_k(x,\varphi)\}_{k=1}^{\infty}$ могут определяться неоднозначно (из-за неоднозначности выбора $\hat{\alpha}$, $\hat{k}$ из (1) и $\hat{p}$ из (2)), поэтому для каждого $x \in X$ могут оказаться много X-гриди и X-гриди по разложению алгоритмов по системе φ.

Легко заметить, что когда $X = L^2$, а φ является ортогональной системой, то L^2-гриди и L^2-гриди по разложению алгоритмы совпадают и $G_m(x,\varphi)$ есть m-членный лучший аппроксимант функции x по системе φ.

В. Н. Темляковым был поставлен вопрос : *сходятся ли все L^p-гриди алгоритмы всех функций $x \in L^p(0,1)$ при $p > 1$ к x по системе Хаара ?* (См. [1], стр. 7 и 20). Напомним определение ортонормированной системы Хаара : $\chi_1 = 1$ и

$$\chi_{2^{k-1}+m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}} & \text{для} \quad \dfrac{m-1}{2^{k-1}} < x \le \dfrac{2m-1}{2^k}, \quad k = 1,2,\dots \\ -2^{\frac{k-1}{2}} & \text{для} \quad \dfrac{2m-1}{2^k} < x < \dfrac{m}{2^{k-1}}, \quad m = 1,2,\dots 2^{k-1} \\ 0 & \text{для остальных} \quad x. \end{cases}$$

Нам будет удобно пользоваться также двоичной нумерацией функций системы Хаара :

$$\chi_0^{(1)} = \chi_1, \quad \chi_k^{(m)} = \chi_{2^{k-1}+m}, \quad k \ge 1, \quad m = 1,2,\dots, 2^{k-1}.$$

Назовем $\{\chi_k^{(m)}\}_{m=1}^{2^{k-1}}$ *k-ой пачкой* системы Хаара. Нижний индекс функции $\chi_k^{(m)}$ назовем ее *рангом*. Хорошо известно, что система Хаара является безусловным базисом в $L^p(0,1)$ при $p > 1$ и базисом в $L^1(0,1)$ (см., например, [3]).

В параграфе §2 настоящей работы доказывается следующая теорема, устанавливающая, что любая функция $f \in L^1(0,1)$ обладает L^1-гриди алгоритмом в системе Хаара.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L^1(0,1)$ существуют числа $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$, для которых выполняется равенство

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_1 = \|f - \hat{\alpha}\chi_{\hat{k}}\|_1. \tag{3}$$

Следует отметить, что не все ортогональные системы обладают этим свойством. В частности, для полной, ортонормированной системы $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, построенной М. Г. Григоряном [4],

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\omega_k\|_1 = 0 \quad \text{для любой функции} \quad f \in L^1(0,1) .$$

Вопрос, аналогичный поставленному В. Н. Темляковым, имеет отрицательный ответ для $p = 1$ по следующим соображениям. Имеем

$$\inf_{\alpha,k} \|f - \alpha\chi_k\|_{L^1(0,1)} = \|f\|_{L^1(0,1)}, \quad f = \chi_1 + \chi_2.$$

Следовательно, можем выбрать $G_1(f,\chi) = 0$. Далее, выбирая $G_m(f,\chi) = 0$ для $m = 2, 3, \ldots$, получим L^1-гриди алгоритм функции f, который не сходится к f по норме L^1. С другой стороны, мы можем выбрать $G_1(f,\chi) = \chi_1$ и тогда получится, что $G_2(f,\chi) = \chi_1 + \chi_2 = f$. В этом случае получается последовательность $G_m(f,\chi) = f$, $m = 2, 3, \ldots$, сходящаяся к f.

Возникает естественный вопрос : *можно ли для любой функции $f \in L^1(0,1)$, выбрать L^1-гриди алгоритм по системе Хаара, сходящийся к f по норме $L^1(0,1)$?* В §3 доказывается следующая теорема, утверждающая, что этот вопрос имеет отрицательный ответ.

Теорема 2. Существует функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ни один L^1-гриди алгоритм по системе Хаара не сходится к f.

Теорема 3. Существует функция $f \in L^1(0,1)$, для которой ни один L^1-гриди по разложению алгоритм по системе Хаара не сходится к f.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1,t_2)$, определим множества

$$\begin{aligned} M_\alpha &= M_\alpha(f,t_1,t_2) = \{x \in (t_1,t_2) : f(x) \geq \alpha\}, \\ N_\alpha &= N_\alpha(f,t_1,t_2) = \{x \in (t_1,t_2) : f(x) < \alpha\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Определим также

$$\begin{aligned} B &= B(f,t_1,t_2) = \left\{\alpha \in R : m\{x \in (t_1,t_2) : f(x) > \alpha\} > \frac{t_2 - t_1}{2}\right\}, \\ D &= D(f,t_1,t_2) = \left\{\alpha \in R : m\{x \in (t_1,t_2) : f(x) < \alpha\} > \frac{t_2 - t_1}{2}\right\}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $m(A)$ – мера Лебега множества A. Легко видеть, что справедливо

Утверждение 1. Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ имеет место

1) M_α является дополнением N_α на интервале (t_1, t_2),

2) $B \neq \emptyset$ и $D \neq \emptyset$,

3) $B \cap D = \emptyset$,

4) B и D суть полуоси,

5) $\alpha_1 \in B$, $\alpha_2 \in D \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$.

Обозначим $\alpha_* = \alpha_*(f, t_1, t_2) = \sup B(f, t_1, t_2)$ и $\alpha^* = \alpha^*(f, t_1, t_2) = \inf D(f, t_1, t_2)$. Из утверждения 1 следует, что α_* и α^* конечны и

$$\alpha_* \leq \alpha^*. \tag{6}$$

Определим функцию

$$F(\alpha) = F_{(f,t_1,t_2)}(\alpha) = ||f - \alpha||_{L^1(t_1,t_2)}. \tag{7}$$

Лемма 1. Для любых чисел $t_1 < t_2$ и для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$, функция $F(\alpha)$ удовлетворяет условиям :

1) $F(\alpha) \in C(-\infty, \infty)$,

2) $F(\alpha)$ строго убывает на $(-\infty, \alpha_*]$ и строго возрастает на $[\alpha^*, +\infty)$,

3) если $\alpha_* < \alpha^*$ (см. (6)), то $F(\alpha)$ постоянна на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$.

Доказательство : 1) Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ имеем

$$| F(\alpha_2) - F(\alpha_1) | = | \, ||f(x) - \alpha_1||_{L^1(t_1,t_2)} - ||f(x) - \alpha_2||_{L^1(t_1,t_2)} \, | \leq$$

$$\leq ||\alpha_2 - \alpha_1||_{L^1(t_1,t_2)} = (t_2 - t_1) \, | \, \alpha_2 - \alpha_1 \, | \, .$$

Откуда и следует непрерывность $F(\alpha)$.

2) Пусть $\alpha_2 < \alpha_1$. Положим $M_1 = M_{\alpha_1}$, $N_1 = N_{\alpha_1}$, $M_2 = M_{\alpha_2}$, $N_2 = N_{\alpha_2}$. Согласно (4)

$$M_1 \subseteq M_2, \quad N_2 \subseteq N_1. \tag{8}$$

Следовательно, в силу пункта 1) (утверждения 1),

$$M_2 \setminus M_1 = N_1 \setminus N_2. \tag{9}$$

Из (7) и (8) имеем, что

$$F(\alpha_1) = \int_{t_1}^{t_2} |f(x) - \alpha_1| \, dx = \int_{M_1} (f(x) - \alpha_1) \, dx + \int_{N_1} (\alpha_1 - f(x)) \, dx =$$

$$= \int_{M_2} (f(x) - \alpha_1)\, dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1)\, dx +$$

$$+ \int_{N_2} (\alpha_1 - f(x))\, dx + \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x))\, dx =$$

$$= \int_{M_2} (f(x) - \alpha_2)\, dx + \int_{M_2} (\alpha_2 - \alpha_1)\, dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1)\, dx +$$

$$+ \int_{N_2} (\alpha_2 - f(x))\, dx + \int_{N_2} (\alpha_1 - \alpha_2)\, dx + \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x))\, dx =$$

$$= F(\alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)[m(M_2) - m(N_2)] + \int_{N_1 \setminus N_2} (\alpha_1 - f(x))\, dx - \int_{M_2 \setminus M_1} (f(x) - \alpha_1)\, dx.$$

Откуда, с учетом (9), получим

$$F(\alpha_1) = F(\alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)[m(M_2) - m(N_2)] + 2 \int_{N_1 \setminus N_2} [\alpha_1 - f(x)]\, dx. \qquad (10)$$

Теперь пусть $\alpha_2 \in D$. Тогда $m(N_2) > \frac{t_2 - t_1}{2}$ согласно (4) и (5). Отсюда и в силу пункта 1) утверждения 1 следует, что $m(M_2) < \frac{t_2 - t_1}{2}$. Следовательно,

$$m(M_2) - m(N_2) < 0. \qquad (11)$$

Заметим, что $f(x) < \alpha_1$ на множестве N_1. Поэтому,

$$\int_{N_1 / N_2} (\alpha_1 - f(x))\, dx \geq 0. \qquad (12)$$

Учитывая (10) – (12), получим $F(\alpha_1) > F(\alpha_2)$. Итак, на полуоси D F строго возрастает. Учитывая также, что F является непрерывной функцией, получим первую часть утверждения 2) леммы. Аналогично можно доказать, что $F(\alpha)$ строго убывает на $(-\infty, \alpha_*]$.

3) Пусть $\alpha \in (\alpha_*, \alpha^*)$. Тогда $\alpha \notin B$, $\alpha \notin D$ и согласно (5)

$$\begin{aligned} m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) > \alpha\} &\leq \frac{t_2 - t_1}{2}, \\ m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) < \alpha\} &\leq \frac{t_2 - t_1}{2}. \end{aligned} \qquad (13)$$

Предположим, что существует $\overline{\alpha} \in (\alpha_*, \alpha^*)$, для которой во втором выражении (13) выполняется строгое неравенство. Тогда

$$m\left\{x \in (t_1, t_2) : f(x) > \frac{\overline{\alpha} + \alpha_*}{2}\right\} \geq m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) \geq \overline{\alpha}\} > \frac{t_2 - t_1}{2}.$$

Следовательно, $\frac{\overline{\alpha}+\alpha_*}{2} \in B$, что противоречит тому, что $\frac{\overline{\alpha}+\alpha_*}{2} > \alpha_* = \sup B$. Значит,

$$m\{x \in (t_1, t_2) : f(x) < \alpha\} = \frac{t_2 - t_1}{2}, \quad \alpha \in (\alpha_*, \alpha^*).$$

Итак, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in (\alpha_*, \alpha^*)$, $\alpha_2 < \alpha_1$, имеем $m(N_2) = m(M_2) = \frac{t_2-t_1}{2}$ и $m(N_1 \setminus N_2) = 0$ (так как $N_2 \subseteq N_1$ и $m(N_1) = m(N_2)$). Отсюда и из (10) заключаем, что $F(\alpha_1) = F(\alpha_2)$. Следовательно, функция $F(\alpha)$ постоянна на (α_*, α^*) и, значит, $F(\alpha)$ постоянна на $[\alpha_*, \alpha^*]$ в силу непрерывности. Доказательство завершено.

Следствие 1. Для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$, функция $F_{(f,t_1,t_2)}$ принимает свое минимальное значение только на отрезке $[\alpha_*, \alpha^*]$.

Определим функцию

$$\chi_{(t_1,t_2)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t_1 < x \le \dfrac{t_1+t_2}{2}, \\ -1 & \text{для} \quad \dfrac{t_1+t_2}{2} < x < t_2 \end{cases}$$

и множество $f_{(t_1,t_2)} = f \cdot \chi_{(t_1,t_2)}$. Тогда

$$||f - \alpha\chi_{(t_1,t_2)}||_{L^1(t_1,t_2)} = ||f_{(t_1,t_2)} - \alpha||_{L^1(t_1,t_2)} = F_{(f_{(t_1,t_2)},t_1,t_2)}(\alpha). \tag{14}$$

Из леммы 1 и (4) вытекает

Утверждение 2. Для любой функции $f \in L^1(t_1, t_2)$ равенство

$$\inf_\alpha ||f - \alpha\chi_{(t_1,t_2)}||_{L^1(t_1,t_2)} = ||f - \hat{\alpha}\chi_{(t_1,t_2)}||_{L^1(t_1,t_2)},$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\hat{\alpha} \in [\alpha_*(f_{(t_1,t_2)}, t_1, t_2), \alpha^*(f_{(t_1,t_2)}, t_1, t_2)].$$

Определение. Пусть $f, g \in L^1(t_1, t_2)$ и

$$M = ||f||_{L^1(t_1,t_2)} - \inf_\alpha ||f - \alpha g||_{L^1(t_1,t_2)}.$$

Если $M > 0$, то скажем, что функция g *понижает норму* f на M. Если $M = 0$, то скажем, что g *не может понизить* норму f.

Доказатвльство теоремы 1. Обозначим

$$\inf_{\alpha,k} \|f-\alpha\chi_k\|_{L^1(0,1)} = \Delta.$$

Если $\Delta = \|f\|_{L^1(0,1)}$, то (3) имеет место при $\hat{\alpha}=0$. Допустим $\Delta < \|f\|_{L^1(0,1)}$. Тогда

$$\|f-\alpha_1\chi_{k_1}\|_{L^1(0,1)} < \Delta + \frac{\|f\|_{L^1(0,1)}-\Delta}{2}$$

при некоторых α_1 и k_1. В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега, существует $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\int_e |f(x)|\,dx < \frac{\|f\|_{L^1(0,1)}-\Delta}{2} \quad \text{для} \quad e\subset[0,1], \quad m(e)<\delta_0.$$

Обозначим $r_0 = 1+[-\log_2\delta_0]$. Тогда для любой функции χ_n ранга $r > r_0$ будем иметь

$$m(\operatorname{supp}(\chi_n)) = 2^{1-r} \le 2^{-r_0} < \delta_0.$$

Поэтому

$$\|f-\alpha\chi_n\|_{L^1(0,1)} \ge \|f-\alpha\chi_n\|_{L^1((0,1)\setminus\operatorname{supp}(\chi_n))} = \|f\|_{L^1(0,1)} - \|f\|_{L^1(\operatorname{supp}(\chi_n))} >$$

$$> \|f\|_{L^1(0,1)} - \frac{\|f\|_{L^1(0,1)}-\Delta}{2} > \|f-\alpha_1\chi_{k_1}\|_{L^1(0,1)}.$$

Таким образом, функции системы Хаара рангом больше r_0 понижают норму f меньше, чем функция χ_{k_1}. Следовательно, лишь конечное число функций могут понизить норму f больше, чем функция χ_{k_1}. Используя утверждение 2 (следствие 1 для χ_1), убеждаемся в справедливости теоремы 1 для этих функций.

Лемма 2. Пусть для функции $f\in L^1(t_1,t_2)$ справедливы соотношения $0\notin B(f,t_1,t_2)$ и $0\notin D(f,t_1,t_2)$. Тогда функция $\Psi\equiv 1$ не может понизить норму f.

Доказательство : Учитывая (7) и следствие 1, можем утверждать, что

$$\inf_\alpha \|f-\alpha\Psi\|_{L^1(t_1,t_2)} = \inf_\alpha \|f-\alpha\|_{L^1(t_1,t_2)} = \inf_\alpha F_{(f,t_1,t_2)}(\alpha) = F(0) = \|f\|_{L^1(t_1,t_2)}.$$

Лемма 3. Пусть функция $f\in L^1(t_1,t_2)$ не меняет свой знак на интервале (t_1,t_2). Тогда функция $\chi_{(t_1,t_2)}$ не может понизить норму f.

Доказательство : Для определенности положим $f\ge 0$. Тогда $0\notin B(f_{(t_1,t_2)},t_1,t_2)$ так как

$$m\{x\in(t_1,t_2): f_{(t_1,t_2)}(x)>0\} = m\left\{x\in\left(t_1,\frac{t_1+t_2}{2}\right]:\ f(x)>0\right\}+$$

$$+m\left\{x\in\left(\frac{t_1+t_2}{2},t_2\right):\ f(x)<0\right\}\le m\left(t_1,\frac{t_1+t_2}{2}\right)=\frac{t_2-t_1}{2}.$$

Аналогично, $0\notin D(f_{(t_1,t_2)},t_1,t_2)$, так как

$$m\{x\in(t_1,t_2):f_{(t_1,t_2)}(x)<0\}=m\left\{x\in\left(t_1,\frac{t_1+t_2}{2}\right]:\ f(x)<0\right\}+$$

$$+m\left\{x\in\left(\frac{t_1+t_2}{2},t_2\right):\ f(x)>0\right\}\le m\left(\frac{t_1+t_2}{2},t_2\right)=\frac{t_2-t_1}{2}.$$

Согласно (14) и лемме 2 убеждаемся в справедливости леммы 3.

§3. СХОДИМОСТЬ L^1-ГРИДИ И L^1-ГРИДИ ПО РАЗЛОЖЕНИЮ АЛГОРИТМОВ

Пусть

$$P(x)=\begin{cases}1, & \text{для}\quad 0\le x<\frac{5}{8}\quad\text{от}\quad\frac{3}{4}\le x<\frac{7}{8}\\ -1, & \text{для}\quad\frac{5}{8}\le x<\frac{3}{4}\quad\text{или}\quad\frac{7}{8}\le x\le 1\end{cases}.$$

Для каждого натурального числа $r\in N$, обозначим через Φ_r совокупность всех функций вида

$$\varphi(x)=\begin{cases}P(2^{k+1}x-1), & \text{для}\quad 2^{-1-k}\le x<2^{-k},\quad k=r,r+1,\ldots\\ 0, & \text{для}\quad\frac{1}{2}\le x\le 1\\ g(x), & \text{для}\quad x\in\left[\frac{1}{2^r},\frac{1}{2}\right],\end{cases}$$

где g – неотрицательная, интегрируемая функция на $\left[\frac{1}{2^r},\frac{1}{2}\right]$ с

$$m\left\{x\in\left(\frac{1}{2^{1+p}},\frac{1}{2^p}\right):\ g(x)=0\right\}\ge\frac{3}{2^{p+3}},\quad p=1,2,\ldots,r-1.$$

Очевидно, что $\Phi_r\subset L^1(0,1)$ для всех натуральных чисел r.

Лемма 4. Пусть $\varphi\in\Phi_r$ при некотором натуральном r. Тогда

1) ни одна функция Хаара $\chi_k^{(1)}$ не может понизить норму φ,

2) ни одна функция Хаара рангом меньше $(r+2)$ не может понизить норму φ.

Доказательство : 1) Докажем, что при любом натуральном числе k функция $\chi_k^{(1)}$ не может понизить норму φ. Когда $k<r+1$, то

$$m\{x\in(0,2^{1-k}):\varphi_{(0,2^{1-k})}(x)>0\}=$$

$$=m\{x\in(0,2^{-k}]:\varphi(x)>0\}+m\{x\in(2^{-k},2^{1-k}):\varphi(x)<0\}=$$

$$= m\{x \in (0, 2^{-k}] : \varphi(x) > 0\} \le 2^{-k} = \frac{m(0, 2^{1-k})}{2},$$

т.е. $0 \notin B(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Аналогично,

$$m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) < 0\} =$$

$$= m\{x \in (0, 2^{-k}] : \varphi(x) < 0\} + m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) > 0\} =$$

$$= \frac{1}{4 \cdot 2^r} + m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \ \varphi(x) > 0\} \le \frac{1}{4 \cdot 2^r} + \frac{1}{4 \cdot 2^k} \le \frac{m(0, 2^{1-k})}{2},$$

и поэтому $0 \notin D(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Учитывая (14) и лемму 2, заключаем, что функция $\chi_k^{(1)}$, где $k < r + 1$, не может понизить норму φ.

Для случая $k \ge r + 1$ имеем

$$m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) > 0\} = m\{x \in (0, 2^{-k}] : \varphi(x) > 0\} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) < 0\} = 2^{-k}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{m(0, 2^{1-k})}{2},$$

а также

$$m\{x \in (0, 2^{1-k}) : \varphi_{(0,2^{1-k})}(x) < 0\} = m\{x \in (0, 2^{-k}) : \varphi(x) < 0\} +$$

$$+ m\{x \in (2^{-k}, 2^{1-k}) : \varphi(x) > 0\} = 2^{-k}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = \frac{m(0, 2^{1-k})}{2},$$

т.е. $0 \notin B(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$ и $0 \notin D(\varphi_{(0,2^{1-k})}, 0, 2^{1-k})$. Поэтому функция $\chi_k^{(1)}$, где $k \ge r + 1$, не может понизить норму φ.

2) Согласно лемме 2, функция $\chi_1 = 1$ не может понизить норму φ. Мы доказали, что функции Хаара $\chi_k^{(1)}$ также не могут понизить норму φ. Функция $\chi_k^{(p)}$ с $p > 1$ и $k < r + 2$ имеет носитель

$$\left(\frac{p-1}{2^{k-1}}, \frac{p}{2^{k-1}}\right) \subset [2^{-r}, 1],$$

где функция φ не меняет свой знак. Поэтому, $\chi_k^{(p)}$ не может понизить норму φ в силу леммы 3.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем следующую теорему.

Теорема 4. Для любого натурального числа r и каждой функции $\varphi \in \Phi_r$ существуют единственные $\hat{k}, \hat{p}$ и $\hat{\alpha}$, для которых

$$\min_{\alpha,k,p} \left\| \varphi - \alpha\chi_k^{(p)} \right\|_{L^1(0,1)} = \left\| \varphi - \hat{\alpha}\chi_{\hat{k}}^{(\hat{p})} \right\|_{L^1(0,1)} = \|\varphi\|_{L^1(0,1)} - 2^{-(r+2)}.$$

При этом. $R_1(\varphi,\chi) \in \Phi_{r+1}$.

Доказательство : Сначала вычислим насколько понижает норму φ функция $\chi^{(2)}_{r+2}$. Для каждой $\alpha < 1$

$$m\left\{x \in \left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right) : \varphi_{\left(\frac{1}{2^{1+r}}, \frac{1}{2^r}\right)}(x) > \alpha\right\} = \frac{1}{2^{r+2}} + \frac{1}{2^{r+3}} > \frac{1}{2} m\left(\frac{1}{2^{1+r}}, \frac{1}{2^r}\right),$$

т.е. все числа меньше 1 принадлежат множеству $B\left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)$. Аналогично можно показать, что все числа больше 1 принадлежат множеству $D\left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)}; \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)$. Согласно утверждению 1

$$\sup B\left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right) = \inf D\left(\varphi_{\left(\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right)}, \frac{1}{2^{r+1}}, \frac{1}{2^r}\right) = 1.$$

С учетом утверждения 2 заключаем

$$\min_{\alpha} \left\|\varphi - \alpha\chi^{(2)}_{r+2}\right\|_{L^1(0,1)} = \left\|\varphi - \chi_{\operatorname{supp}(\chi^{(2)}_{r+2})}\right\|_{L^1(0,1)} = \|\varphi\|_{L^1(0,1)} - 2^{-(r+2)}.$$

Это означает, что функция $\chi^{(2)}_{r+2}$ понижает норму φ на $2^{-(r+2)}$.

Теперь покажем, что остальные функции $\chi^{(p)}_k$ системы Хаара понижают норму φ меньше, чем на $2^{-(r+2)}$ (или вообще не могут понизить). Пусть $k \geq r+4$. Тогда меры носителей таких функций не превосходят $2^{-(r+3)}$. Если φ не меняет свой знак, то по лемме 3 $\chi^{(p)}_k$ не может понизить норму φ. Если φ меняет свой знак, то $|\varphi| \leq 1$, и, следовательно, $\chi^{(p)}_k$ не может понизить норму φ более, чем на $2^{-(r+3)}$.

Согласно лемме 4 функции с рангом $k < r+2$ не могут понизить норму φ. Среди функций рангом $(r+2)$ или $(r+3)$ только $\chi^{(1)}_{r+2}, \chi^{(2)}_{r+2}, \chi^{(1)}_{r+3}, \chi^{(2)}_{r+3}$ и $\chi^{(5)}_{r+3}$ отличны от нуля в областях, где φ меняет свой знак, а согласно лемме 3 это является необходимым условием для понижения нормы. Функции $\chi^{(1)}_{r+2}$ и $\chi^{(1)}_{r+3}$ не могут понизить норму φ в силу леммы 4. Нетрудно убедиться, что $\chi^{(5)}_{r+3}$ не может понизить норму φ, а $\chi^{(2)}_{r+3}$ понижает ее на $\frac{1}{2^{r+3}}$. Итак,

$$R_1(\varphi,\chi) = \varphi - \chi_{\operatorname{supp}(\chi^{(2)}_{r+2})} = \varphi - 2^{-\frac{r+1}{2}}\chi^{(2)}_{r+2}.$$

Легко увидеть, что $R_1(\varphi,\chi) \in \Phi_{r+1}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Возьмем $f \in \Phi_1$ (в Φ_1 содержится только одна функция). Тогда, согласно теореме 4,

$$R_1(f,\chi) = f - \frac{1}{4}\chi^{(2)}_3 \in \Phi_2, \quad \|R_1(f,\chi)\| = \|f\| - \frac{1}{2^3}.$$

Применив теорему 4 несколько раз, заключаем, что $R_{n+1}(f,\chi) \in \Phi_{n+2}$ и

$$\|R_{n+1}(f,\chi)\| = \|R_n(f,\chi)\| - \frac{1}{2^{n+3}} = \ldots = \|f\| - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Последовательность $R_n(f,\chi)$ определяется однозначно и $\|f\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2}$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \|f - G_n(f,\chi)\|_{L^1(0,1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} 2^{-k} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}(1+2^{-n}) = \frac{1}{4} > 0,$$

т.е. единственный L^1-гриди алгоритм функции f по системе Хаара не сходится к f. Это завершает доказательство.

Из доказательства теоремы ясно, что L^1-гриди алгоритм любой функции $f \in \Phi_r$ по системе Хаара определяется однозначно и не сходится к f.

Вычислив коэффициенты Фурье функции f из доказательства теоремы 2, получаем, что

$$f = \frac{1}{4}\left[\chi_0^{(1)} + \chi_1^{(1)}\right] + \sum_{k=3}^{\infty} 2^{-\frac{k+1}{2}}\left[\chi_k^{(2)} + \chi_{k+2}^{(8)} + \chi_{k+2}^{(9)}\right]. \qquad (15)$$

В то же время, L^1-гриди алгоритм функции f по системе Хаара получается в виде

$$G_n(f,\chi) = \sum_{k=3}^{n+2} 2^{-\frac{k-1}{2}}\chi_k^{(2)} \qquad (16)$$

Сравнивая эти выражения, заметим, что в (16) коэффициент при $\chi_k^{(2)}$ вдвое больше, чем в (15). Может быть в этом и состоит причина, по которой L^1-гриди алгоритм f по системе Хаара не сходится к f? Может быть условием (3) мы даем слишком большую свободу в определении L^1-гриди алгоритма? Ответы на эти вопросы дает L^1-гриди по разложению алгоритм. L^1-гриди по разложению алгоритм отличается от обычного L^1-гриди алгоритма тем, что коэффициент при φ_n в (3) не может быть произвольным, а является коэффициентом Фурье данной функции.

Лемма 5. Для $f \in \Phi_1$ и $m = 0,1,2,\ldots$ справедливы соотношения :

$$< \bar{R}_m(f,\chi), \chi_0^{(1)} >= \frac{1}{4}, \quad < \bar{R}_m(f,\chi), \chi_1^{(1)} >= \frac{1}{4}, \quad \bar{R}_0(f,\chi) = f. \qquad (17)$$

Доказательство : Заметим, что f имеет вид (15) и для $m = 0$ соотношения (17) следуют из (15). Предположим, что (17) справедливо для некоторого $m =$

$0, 1, \ldots$ и докажем, что (17) будет справедливым и для $m+1$. Разложение Фурье функции $\bar{R}_m(f,\chi)$ по системе Хаара будет отличаться от (15) только отсутствием m слагаемых. Так как первые два слагаемых будут присутствовать, все три слагаемых в квадратных скобках выражения (15) будут присутствовать в ряде Фурье функции $\bar{R}_m(f,\chi)$ по системе Хаара при некотором натуральном $k = K_m$. Именно эти три слагаемых вместе с $\chi_0^{(1)}$ и $\chi_1^{(1)}$ определяют значения функции f на $\mathrm{supp}(\chi_{K_m}^{(2)})$. Следовательно, на $\mathrm{supp}(\chi_{K_m}^{(2)})$ функции f и $\bar{R}_m(f,\chi)$ совпадают. Легко заметить, что

$$\left\| f - < f, \chi_{K_m}^{(2)} > \chi_{K_m}^{(2)} \right\|_1 = \left\| f - 2^{-\frac{K_m+1}{2}} \chi_{K_m}^{(2)} \right\|_1 < \|f\|_1.$$

Следовательно,

$$\left\| \bar{R}_m(f,\chi) - 2^{-\frac{K_m+1}{2}} \chi_{K_m}^{(2)} \right\|_1 < \|\bar{R}_m(f,\chi)\|_1.$$

Это означает, что $\|\bar{R}_{m+1}(f,\chi)\|_1 < \|\bar{R}_m(f,\chi)\|_1$. Итак, достаточно показать, что функции $\chi_0^{(1)}$ и $\chi_1^{(1)}$ не могут понизить норму $\bar{R}_m(f,\chi)$. Это следует из леммы 2 и утверждения 2, так как функция $\bar{R}_m(f,\chi)$ равняется нулю на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$.

Доказательство теоремы 3. Возьмем $f \in \Phi_1$. Хотя L^1-гриди по разложению алгоритм для f определяется неоднозначно, лемма 5 справедлива для всех возможных последовательностей. Это означает, что ни один L^1-гриди по разложению алгоритм по системе Хаара не сходится к f. Теорема 3 доказана.

Abstract. The existence of L^1-greedy algorithms by Haar system is proved for any function from L^1. A function is constructed, that can not be obtained by its L^1-greedy algorithm.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. N. Temlyakov, "Nonlinear methods of approximation", Found. Comput. Math. vol. 3, pp. 33 – 107, 2003.
2. R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, "Some remarks on greedy algorithms", Advances in Comput. Math., № 5, pp. 173 – 187, 1996.
3. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, Ортогональные ряды. Москва, АФЦ, 1999.
4. М. Г. Григорян, "Представление функций классов $L^p(0,1)$, $1 \leq p < 2$ ортогональными рядами", ДАН Арм ССР, том 67, № 5, 1978.

Поступила 22 июня 2003