

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ РАДИУСОВ КРИВИЗНЫ ПРОЕКЦИИ

Р. Г. Арамян

Институт Математики НАН Армении

E-mail : rafik@instmath.sci.am

Резюме. Данная статья рассматривает проблему существования и единственности центрально-симметричного выпуклого тела, для которого функция радиуса кривизны проекции совпадает с заданной флаговой функцией. Найдено необходимое и достаточное условие, которое обеспечивает положительный ответ. А также предложен алгоритм построения рассматриваемого тела.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F(\omega)$ – функция, определенная на сфере S^2 . Проблема существования и единственности выпуклого тела $B \subset \mathbb{R}^3$, для которого средний радиус кривизны в точке на ∂B с направлением нормали ω совпадает с заданной функцией $F(\omega)$, была поставлена Кристоффелем (см. [4]). Пусть $R_1(\omega)$ и $R_2(\omega)$ – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке с направлением нормали $\omega \in S^2$. По существу, проблема Кристоффеля ставит вопрос о существовании тела B , для которого $R_1(\omega) + R_2(\omega) = F(\omega)$. Аналогичная проблема для Гауссовой кривизны $R_1(\omega)R_2(\omega) = F(\omega)$ была поставлена и решена Минковским. В. Бляшке свел проблему Кристоффеля к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для опорной функции (см. [4]). Александров и Погорелов обобщили эти проблемы, доказав существование и единственность выпуклого тела, для которого

$$G(R_1(\omega), R_2(\omega)) = F(\omega), \quad (1.1)$$

для класса симметричных функций G (см. [4], [6]).

В данной работе мы рассмотрим аналогичную проблему, поставленную для радиусов кривизны проекции центрально-симметричных выпуклых тел (см. [2]). Обозначим через $\mathcal{B}_o$ класс выпуклых тел $B \subset \mathbb{R}^3$, с центром симметрии в начале координат $O \in \mathbb{R}^3$. Нам понадобятся некоторые обозначения :

S^2 – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (пространство пространственных направлений),

$S_\omega \subset S^2$ – большая окружность с полюсом в $\omega \in S^2$,

$e(\omega, \psi)$ – плоскость, содержащая начало координат в $\mathbb{R}^3$ и направления $\omega \in S^2$ и $\psi \in S_\omega$,

$B(\omega, \psi)$ – проекция тела $B \in \mathcal{B}_o$ на $e(\omega, \psi)$,

$R(\omega, \psi)$ – радиус кривизны $\partial B(\omega, \psi)$ в точке, для которой направление внешней нормали совпадает с ω .

Пусть $F(\omega, \psi)$ – симметричная функция, определенная на пространстве "флагов" $\{(\omega, \psi) : \omega \in S^2, \psi \in S_\omega\}$ (см. [1]). Мы ставим задачу существования и единственности выпуклого тела, для которого

$$R(\omega, \psi) = F(\omega, \psi), \quad (1.2)$$

и собираемся найти необходимое и достаточное условие для функции $F(\omega, \psi)$, которое обеспечит положительный ответ. Заметим, что единственность (с точностью до параллельных переносов) следует

из классического результата единственности проблемы Кристоффеля.

Теперь мы опишем основной результат. Пусть $F(\omega, \psi)$ – функция, определенная на $\{(\omega, \psi) : \omega \in S^2, \psi \in S_\omega\}$. Скажем, что функция $F(\omega, \psi)$ симметрична, если $F(\omega, \psi) = F(\omega, \pi + \psi) = F(-\omega, \psi)$. Определим

$$\bar{F}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(\omega, \psi) d\psi. \quad (1.3)$$

Ниже мы используем обычные сферические координаты ν, ϕ на S^2 , основанные на выборе ω для северного полюса и точки отсчета $\phi = 0$ на экваторе S_ω (так точки $(0, \phi)$ лежат на экваторе S_ω). Точки с координатами ν, ϕ в этой системе координат обозначим через $(\nu, \phi)_\omega$.

Теорема 1.1. Неотрицательная, симметричная, непрерывно-дифференцируемая функция $F(\omega, \psi)$, определенная на пространстве $\{(\omega, \psi) : \omega \in S^2, \psi \in S_\omega\}$ представляет собой радиус кривизны проекции некоторого выпуклого тела тогда и только тогда, когда

$$F(\omega, \psi) = \frac{\bar{F}(\omega)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{F}((\nu, \phi)_\omega) \cos 2(\phi - \psi)}{\cos \nu} d\phi d\nu \quad (1.4)$$

для всех $\omega \in S^2$ и всех $\psi \in S_\omega$ (порядок интегрирования важен).

Наше доказательство Теоремы 1.1 предлагает алгоритм построения выпуклого тела B для заданной функции $F(\omega, \psi)$. Нам понадобятся следующие положения из теории выпуклости.

§2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Хорошо известно (см. [8]), что опорная функция всякого достаточно гладкого тела $B \in B_0$ имеет единственное представление

$$H(\xi) = \int_{S^2} |(\xi, \Omega)| h(\Omega) d\Omega, \quad (2.1)$$

где $d\Omega$ – обычная мера площади на S^2 , $h(\Omega)$ – четная, непрерывная функция (не обязательно неотрицательная), называемая порождающей плотностью тела B .

Для заданной функции $h(\Omega)$, определенной для $\Omega \in S^2$, обозначим через $h_\omega(\varphi)$, $\varphi \in S_\omega$ сужение $h(\Omega)$ на окружность S_ω для $\omega \in S^2$, и назовем $h_\omega(\varphi)$ функцией сужения $h(\Omega)$.

Ниже мы воспользуемся следующим результатом, полученным Н. Ф. Линдквистом, см. [8].

Четная, непрерывная функция $h(\Omega)$, определенная на S^2 является порождающей плотностью тела $B \in B_0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) h_\omega(\varphi) d\varphi \geq 0 \quad (2.2)$$

для всех $\omega \in S^2$ и $\psi \in S_\omega$, где $h_\omega(\varphi)$ – функция сужения функции $h(\Omega)$.

Примечательно, что интеграл (2.2) имеет ясную геометрическую интерпретацию.

В [2] было доказано, что для любого достаточно гладкого $B \in B_0$ и $\psi \in S_\omega$ радиус кривизны проекции может быть вычислен как

$$R(\omega, \psi) = 2 \int_{S_\omega} \cos^2(\widehat{\psi, \varphi}) h_\omega(\varphi) d\varphi, \quad (2.3)$$

где $(\widehat{\psi, \varphi})$ – угол между ψ и φ , $h(\Omega)$ – порождающая плотность тела B , тогда как $h_\omega(\varphi)$ – функция сужения $h(\Omega)$ на S_ω .

В книге Бляшке [5] можно найти следующее представление для порождающей плотности. Для любого $\Omega \in S^2$

$$2\pi h(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_0} (R_1 + R_2) d\tau -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} (R_1((u, \tau)_\Omega) + R_2((u, \tau)_\Omega))'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du d\tau, \quad (2.4)$$

где $R_i((u, \tau)_\Omega)$, $i = 1, 2$ – главные радиусы кривизны тела B в точке, для которой направление нормали совпадает с $(u, \tau)_\Omega$ (направление со сферическими координатами u, τ относительно Ω).

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1 И ПОСТРОЕНИЕ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Необходимость. Пусть $R(\omega, \psi)$ – радиус кривизны проекции некоторого выпуклого тела $B \in B_o$. Мы должны доказать, что $R(\omega, \psi)$ удовлетворяет условию (1.4). Из [5] следует, что

$$\bar{R}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R(\omega, \psi) d\psi = R_1(\omega) + R_2(\omega) \quad (3.1)$$

и, используя теорему Фубини, можно переписать выражение (2.4) в форме

$$8\pi^2 h(\Omega) = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin a} \int_0^{2\pi} \bar{R}((a, \tau)_\Omega) d\tau - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}((u, \tau)_\Omega) \frac{\cos u}{\sin^2 u} d\tau du \right], \quad (3.2)$$

где $(u, \tau)_\Omega$ – точка на S^2 с обычными сферическими координатами u, τ относительно Ω . Принимая некоторое $\psi \in S_\omega$ за точку отсчета на S_ω , и, подставляя новое выражение для порождающей плотности из (3.2) в (2.3), получим

$$\begin{aligned} R(\omega, \psi) &= 2 \int_{S_\omega} \cos^2 \varphi h_\omega(\varphi) d\varphi = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \left[\frac{1}{\sin a} \int_0^{2\pi} \bar{R}((a, \tau)_\Omega) d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \int_a^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{R}((u, \tau)_\Omega) \frac{\cos u}{\sin^2 u} d\tau du \right] d\varphi, \quad \Omega = (0, \varphi)_\omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\varphi \in S_\omega$ обозначим через $S(u, \varphi)$ окружность с центром в $\varphi \in S_\omega$ и радиусом $\sin u$. Меридиан, проходящий через точку ω и $(0, \varphi)_\omega$ разделяет $S(u, \varphi)$ на две полуокружности. Когда φ меняется на S_ω , каждая полуокружность $S(u, \varphi)$ покрывает множество $[0, 2\pi) \times [-u, u] \subset S^2$. Таким образом, на последнем множестве имеем две параметризации (ν, ϕ) и (τ, φ) . Нетрудно убедиться, что Якобиан имеет вид

$$d\tau d\varphi = \frac{\cos \nu}{\sqrt{\cos^2 u - \sin^2 \nu}} d\nu d\phi. \quad (3.4)$$

Представляя (3.3) в виде суммы членов, соответствующих полуокружностям $S(u, \varphi)$ и, делая замену переменных (3.4), получим

$$R(\omega, \psi) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\sin a} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+a}^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) w(\phi) \frac{\cos \nu}{\sqrt{\cos^2 a - \sin^2 \nu}} d\nu d\phi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}+a}^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) \left[\int_a^{\frac{\pi}{2}-\nu} w(\phi) \frac{\cos \nu}{\sqrt{\cos^2 u - \sin^2 \nu}} \frac{\cos u}{\sin^2 u} du \right] d\nu d\phi \right], \quad (3.5)$$

где $w(\phi) = [\cos^2(\phi - \beta) + \cos^2(\phi + \beta)]$, $\beta = \phi - \varphi$. Имеем

$$\cos \beta = \frac{\sin u}{\cos \nu}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{\cos^2 \nu - \sin^2 u}}{\cos \nu}.$$

После некоторых стандартных интегральных вычислений (см. [7]), используя симметрию, находим

$$R(\omega, \psi) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^2} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) \cos^2 \phi \frac{\sin a}{\cos \nu \sqrt{\cos^2 a - \sin^2 \nu}} d\nu d\phi - \right. \\ \left. - \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}-a} \bar{R}((\nu, \phi)_\omega) \frac{\cos 2\phi}{\cos \nu} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sin a}{\cos \nu} \right] d\nu d\phi \right]. \quad (3.6)$$

Вычисление предела требует разложения интегралов в ряды a . Отрицательные ряды аннулируются, и мы получим (1.4).

Достаточность. Пусть $F(\omega, \psi)$ – неотрицательная, симметричная, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (1.4). Рассмотрим $\bar{F}(\omega)$ (см. (1.3)) и посредством (2.4) построим функцию $f(\Omega)$ определенную на S^2 :

$$f(\Omega) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \bar{F}((0, \tau)_\Omega) d\tau - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \bar{F}((u, \tau)_\Omega)'_u \frac{1 - \sin u}{\sin u} du d\tau. \quad (3.7)$$

Согласно Н. Ф. Линдкуисту, $f(\Omega)$ должна удовлетворять условию (2.2), чтобы быть порождающей плотностью тела В. Подставляя (3.7) в (2.2) и применяя ту же процедуру как выше, с помощью (1.4) получаем $F(\omega, \psi)$, которая является неотрицательной по определению. Следовательно, $h(\Omega)$ суть порождающая функция тела В и, согласно (2.3), $F(\omega, \psi)$ есть радиус кривизны проекции В.

В работе [9] автор решил такую же проблему, которая не зависела от предположения центральной симметрии выпуклого тела В.

Автор хотел бы выразить свою благодарность профессору Р. В. Амбарцумяну за полезные обсуждения.

Abstract. The article considers the problem of existence and uniqueness of centrally symmetrical convex body for which the projection curvature radius function coincides with a given flag function. A necessary and sufficient condition is found that ensures a positive answer. An algorithm for construction of the body in question is proposed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometrical Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
2. Р. Г. Арамян. "Радиусы кривизны плоских проекций выпуклых тел в R^n " Изв. АН Армении. Математика, Том 37, № 1, стр. 2 – 14, 2002.
3. Р.Г. Арамян. "Обобщенное преобразование Радона с применением в теории выпуклости" Изв. АН Армении. Математика, Том 38, № 3, стр. 16 – 36, 2003.
4. И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор. Дифференциальная геометрия в целом. Наука, Москва, 1973.
5. W. Blaschke, Kreis und Kugel, De Gruyter, Berlin, 1956.
6. А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, Москва, 1969.
7. А. П. Прудников, Ю. А. Бричов, О. Н. Маричев, Интегралы и ряды. Наука, Москва, 1981.
8. W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in Convexity and its Applications, Ed. P. Gruber and J. Wills, Birkhauser, Basel, 1983.
9. Р. Г. Арамян, "Восстановление выпуклых тел с помощью функции радиуса кривизны проекции", Изв. АН Армении. Математика, Том 39, № 4, стр. 36 – 49, 2004.

Поступила 29 июня 2004