ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ПРОЕКЦИИ

Р. Г. Арамян

Известия Национальной Академии Наук Армении. Математика, Том 39, № 4, 2004

Данная статья рассматривает проблему существования и единственности выпуклого тела, для которого функция радиуса кривизны проекции совпадает с заданной функцией. Здесь предлагается необходимое и достаточное условие, которое обеспечивает положительный ответ на оба вопроса и предлагает алгоритм построения тела. Также найдено явное представление опорной функции выпуклого тела в терминах радиусов кривизны проекции.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F(\Omega)$ - функция, определенная на сфере $\mathbf{S}^2$. Проблема существования и единственности выпуклого тела $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^3$, для которого средний радиус кривизны в точке на $\partial\mathbf{B}$ с направлением внешней нормали Ω, совпадает с заданной функцией $F(\Omega)$, была поставлена Кристоффелем (см. [2],[7]). Пусть $R_1(\Omega)$ и $R_2(\Omega)$ – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке с направлением нормали $\Omega \in \mathbf{S}^2$. Проблема Кристоффеля ставит вопрос существования тела B, для которого

$$R_1(\Omega) + R_2(\Omega) = F(\Omega). \tag{1.1}$$

Соответствующая проблема для Гауссовой кривизны $R_1(\Omega)R_2(\Omega) = F(\Omega)$ была поставлена и решена Минковским. В. Бляшке привел проблему Кристоффеля к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка для опорной функции (см [7]). А. Д. Александров и А. В. Погорелов обобщили эти проблемы и доказали существование и единственность выпуклого тела для которого

$$G(R_1(\Omega), R_2(\Omega)) = F(\Omega), \tag{1.2}$$

для класса симметричных функций G (см. [2], [9]).

В данной работе мы рассмотрим аналогичную проблему, поставленную для радиусов кривизны проекции выпуклых тел (см [4]). Обозначим через $\mathcal{B}$ класс выпуклых тел $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^3$. Нам понадобятся некоторые обозначения.

$\mathbf{S}^2$ – единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ (пространство пространственных направлений),

$\mathbf{S}_\omega \subset \mathbf{S}^2$ – большая окружность с полюсом в $\omega \in \mathbf{S}^2$,

$\mathbf{B}(\omega)$ – проекция тела $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ на плоскость, содержащую начало координат в $\mathbb{R}^3$ и ортогональную к ω.

$R(\omega, \varphi)$ – радиус кривизны $\partial\mathbf{B}(\omega)$ в точке, для которой направление внешней нормали совпадает с $\varphi \in \mathbf{S}_\omega$, и называется радиусом кривизны проекции тела $\mathbf{B}$. Пусть $F(\omega, \varphi)$ – неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на

$\{(\omega, \varphi) : \omega \in \mathbf{S}^2, \varphi \in \mathbf{S}_\omega\}$ (пространство "флагов" см. [1]). В этой статье мы рассмотрим :

Задача 1. Существование и единственность (с точностью трансляции) выпуклого тела, для которого

$$R(\omega, \varphi) = F(\omega, \varphi), \tag{1.3}$$

Задача 2. Построение этого выпуклого тела.

Хорошо известно (см. [10]), что выпуклое тело $\mathbf{B}$ определяется единственным образом с помощью его опорной функции $H(\Omega) = \max\{< \Omega, y >: y \in \mathbf{B}\}$, определенной для $\Omega \in \mathbf{S}^2$, где $< \cdot, \cdot >$ обозначает стандартное внутреннее произведение в $\mathbb{R}^3$. Обычно функцию $H(\Omega)$ продолжают до функции $H(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, используя однородность : $H(x) = |x|\, H(\Omega)$, где Ω суть направление $\overrightarrow{Ox}$ (O – начало координат в $\mathbb{R}^3$). Тогда определение выпуклости $H(\Omega)$ запишется в виде

$$H(x+y) \leq H(x) + H(y), \quad x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Ниже $\mathbf{C}^k(\mathbf{S}^2)$ обозначает пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций в $\mathbf{S}^2$. Выпуклое тело $\mathbf{B}$ назовем k-гладким, если $H(\Omega) \in \mathbf{C}^k(\mathbf{S}^2)$.

Для заданной функции $H(\Omega)$, определенной для $\Omega \in \mathbf{S}^2$, через $H_\omega(\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{S}_\omega$ обозначим сужение функции $H(\Omega)$ на окружность $\mathbf{S}_\omega$ для $\omega \in \mathbf{S}^2$, и назовем $H_\omega(\varphi)$ сужением функции $H(\Omega)$.

Ниже мы покажем, что Задача 1. эквивалентна задаче существования функции $H(\Omega)$, определенной на $\mathbf{S}^2$ и удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$H_\omega(\varphi) + [H_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} = F(\omega, \varphi), \quad \varphi \in \mathbf{S}_\omega, \tag{1.4}$$

для любого $\omega \in \mathbf{S}^2$.

Отметим, что если сужение функции $H(\Omega)$ удовлетворяет (1.4), то тогда (продолжение) $H(\Omega)$ является выпуклым.

Определение 1.1. Если для заданной функции $F(\omega, \varphi)$ существует $H(\Omega) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{S}^2)$, определенная на $\mathbf{S}^2$ и удовлетворяющая (1.4), то $H(\Omega)$ называется сферическим решением уравнения (1.4).

В (1.4), $H_\omega(\varphi)$ явлется флаговой функцией, и мы напомним основные понятия, связанные с флагами (в интегральной геометрии понятие флага впервые было систематически использовано Р. В. Амбарцумяном в [1]). Флагом называется пара (ω, φ), где $\omega \in \mathbf{S}^2$ и $\varphi \in \mathbf{S}_\omega$. Каждому флагу (ω, φ) соответствует дуальный флаг

$$(\omega, \varphi) \leftrightarrow (\omega, \varphi)^* = (\Omega, \phi), \tag{1.5}$$

где $\Omega \in \mathbf{S}^2$ –пространственное направление, совпадающее с $\varphi \in \mathbf{S}_\omega$, а $\phi \in \mathbf{S}_\Omega$ – направление, совпадающее с ω. Для заданной флаговой функции $g(\omega, \varphi)$, обозначим через g^* образ g, определенный посредством

$$g^*(\Omega, \phi) = g(\omega, \varphi). \tag{1.6}$$

Определение 1.2. Для каждого $\omega \in \mathbf{S}^2$, (1.4) сводится к дифференциальному уравнению на окружности $\mathbf{S}_\omega$. Любая непрерывная функция, $G(\omega, \varphi)$, являющаяся решением уравнения (1.4) для каждого $\omega \in \mathbf{S}^2$, называется *флаговым решением.*

Определение 1.3. Если флаговое решение $G(\omega, \varphi)$ удовлетворяет условию

$$G^*(\Omega, \phi) = G^*(\Omega) \tag{1.7}$$

(нет зависимости от переменной ϕ), то $G(\omega, \varphi)$ называется *согласованным флаговым решением.*

Существует важный принцип : *каждое согласованное флаговое решение $G(\omega, \varphi)$ уравнения (1.4) с помощью отображения*

$$G(\omega, \varphi) \to G^*(\Omega, \phi) = G^*(\Omega) = H(\Omega), \tag{1.8}$$

приводится к сферическому решению уравнения (1.4), и наоборот : функция сужения любого сферического решения уравнения (1.4) на большие окружности является согласованным флаговым решением.

Следовательно, задача нахождения сферического решения сводится к нахождению согласованных флаговых решений. Чтобы решить упомянутую задачу, здесь используется *метод согласования*, впервые использованный в [3] и [5] для интегральных уравнений.

Обозначим :

$e[\Omega, \phi]$ – плоскость, содержащую начало координат на $\mathbb{R}^3$, направление $\Omega \in \mathbf{S}^2$ и ортогональную к $\phi \in \mathbf{S}_\Omega$ (ϕ определяет вращение плоскости вокруг Ω),

$\mathbf{B}[\Omega, \phi]$ – проекция тела $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ на плоскость $e[\Omega, \phi]$,

$R^*(\Omega, \phi)$ – радиус кривизны $\partial\mathbf{B}[\Omega, \phi]$ в точке, для которой направление внешней нормали совпадает с направлением Ω.

Легко увидеть, что $R^*(\Omega, \phi) = R(\omega, \varphi)$, где (Ω, ϕ) есть флаг, дуальный к (ω, φ).

Заметим, что единственность (с точностью трансляции) в Задаче 1 следует из классического результата единственности, полученного в проблеме Кристоффеля, поскольку

$$R_1(\Omega) + R_2(\Omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} R^*(\Omega, \phi)\, d\phi. \tag{1.9}$$

В случае, когда $F(\omega, \varphi) \geq 0$ неотрицательна, уравнение (1.4) имеет следующую геометрическую интерпретацию.

Из [4] следует, что однородная функция $H(x) = |x| H(\Omega)$, где $H(\Omega) \in \mathbf{C}^2(\mathbf{S}^2)$, является выпуклой тогда и только тогда, когда

$$H_\omega(\varphi) + [H_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} \geq 0, \quad \omega \in \mathbf{S}^2, \quad \varphi \in \mathbf{S}_\omega, \tag{1.10}$$

где $H_\omega(\varphi)$ – сужение $H(\Omega)$ на $\mathbf{S}_\omega$. Итак, в случае, когда $F(\omega, \varphi) \geq 0$, из (1.10) следует, что, если $H(\Omega)$ есть сферическое решение уравнения (1.4), то его однородное продолжение $H(x) = |x|\, H(\Omega)$ является выпуклым.

Хорошо известно из теории выпуклости, что, если функция $H(x)$ является выпуклой, то существует единственное выпуклое тело $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}^3$ с опорной функцией $H(x)$, и функция $F(\omega, \varphi)$ является функцией радиуса кривизны проекции тела $\mathbf{B}$ (см. [8]).

Опорная функция каждого параллельного переноса (трансляции) этого тела B снова будет сферическом решением уравнения (1.4). В силу единственности, любые два сферических решения уравнения (1.4) отличаются на слагаемое $< a, \Omega >$, где $a \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1.1. Пусть $F(\omega, \varphi) \geq 0$ *– неотрицательная функция, определенная на* $\{(\omega, \varphi) : \omega \in \mathbf{S}^2, \varphi \in \mathbf{S}_\omega\}$. *Если уравнение (1.4) имеет сферическое решение* $H(\Omega)$, *то существует выпуклое тело* $\mathbf{B}$ *с опорной функцией* $H(\Omega)$ *и функцией радиуса кривизны проекции* $F(\omega, \varphi)$. *Каждое сферическое решение уравнения (1.4) имеет вид* $H(\Omega) + < a, \Omega >$, *где* $a \in \mathbb{R}^3$, *каждое из которых является опорной функцией трансляции выпуклого тела* $\mathbf{B}$ *вектором* $\overrightarrow{Oa}$.

Обратное утверждение тоже верно. Оно следует из теории для 2-измерения (см. [8]), что опорная функция $H(\Omega)$ 2-гладкого выпуклого тела $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнению (1.4) для функции $F(\omega, \varphi) = R(\omega, \varphi)$, где $R(\omega, \varphi)$ – функция радиуса кривизны проекции тела $\mathbf{B}$.

Прежде чем изложить основной результат, сделаем некоторые замечания. Целью настоящей работы является нахождение необходимого и достаточного условия, которое обеспечит положительный ответ на обе Задачи 1,2 и предложит алгоритм построения тела $\mathbf{B}$ путем нахождения представления опорной функции в терминах функции радиуса кривизны проекции. Это будет сферическим решением уравнения (1.4).

В данной работе опорная функция выпуклого тела $\mathbf{B}$ рассматривается относительно специального выбора начала координат O^*. Оказывается, что каждое 1-гладкое выпуклое тело $\mathbf{B}$ имеет специальную точку O^*, которую назовем центроидом тела $\mathbf{B}$ (см Теорему 6.1). Центроид совпадает с центром симметрии для центрально-симметричных выпуклых тел. Для выпуклых тел $\mathbf{B}$ с положительной Гауссовой кривизной можно определить центроид следующим образом : для любого гладкого, выпуклого тела $\mathbf{B}$ существует единственная точка O^* такая, что (см. Лемму 6.1) для любого $\Omega \in \mathbf{S}^2$

$$\int_{\mathbf{S}_\Omega} < \overrightarrow{O^* P_\Omega(\tau)}, \Omega > d\tau = 0,$$

где $P_\Omega(\tau)$ – точка на $\partial\mathbf{B}$, для которой направление внешней нормали совпадает с $\tau \in \mathbf{S}_\Omega$, $d\tau$ – обычная угловая мера на $\mathbf{S}_\Omega$). Множество точек $\{P_\Omega(\tau), \tau \in \mathbf{S}_\Omega\}$ назовем поясом тела $\mathbf{B}$ с нормалью Ω.

На протяжении всей статьи (в частности, в последующей Теореме 1.2) мы используем обычные сферические координаты ν, τ для точек $\omega \in \mathbf{S}^2$, зависящими от выбора северного полюса $\mathcal{N} \in \mathbf{S}^2$ и точки отсчета $\tau = 0$ на экваторе $\mathbf{S}_\mathcal{N}$. Положим $\nu = \frac{\pi}{2} - (\widehat{\omega, \mathcal{N}})$ так, что точки $(0, \tau)$ лежат на экваторе $\mathbf{S}_\mathcal{N}$. Обозначим точку с координатами ν, τ через $(\nu, \tau)_\mathcal{N}$. На каждом $\mathbf{S}_\omega$ для точки отсчета выберем $E=$ восточное направление и направление против часовой стрелки, как положительное.

Теперь опишем главный результат.

Теорема 1.2. Опорная функция любого 3-гладкого выпуклого тела $\mathbf{B}$ *относительно центроида* O^* *имеет представление*

$$H(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_\Omega, \varphi) \cos\varphi \, d\varphi \right] d\tau +$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_\Omega,\varphi)((\pi+2\varphi)\cos\varphi-2\sin^3\varphi)\,d\varphi\right]d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\nu}{\cos^2\nu}\,d\nu\int_0^{2\pi}d\tau\int_0^{2\pi}R((\nu,\tau)_\Omega,\varphi)\sin^3\varphi\,d\varphi \qquad (1.11)$$

где $R(\omega,\varphi)$ есть функция радиуса кривизны проекции тела **B**, *на $\mathbf{S}_\omega$ направление φ отсчитывается от восточного направления относительно Ω. (1.11) является сферическим решением уравнения (1.4) для $F(\omega,\varphi)=R(\omega,\varphi)$.*

Заметим, что порядок интегрирования в последнем интеграле (1.11) не может быть изменен.

Очевидно, Теорема 1.2 предлагает практический алгоритм восстановления выпуклых тел из функций радиуса кривизны проекции $R(\omega,\varphi)$ путем вычисления опорной функции $H(\Omega)$.

Вернемся к Задаче 1. Пусть $R(\omega,\varphi)$ – функция радиуса кривизны проекции выпуклого тела **B**. Тогда $F(\omega,\varphi)\equiv R(\omega,\varphi)$ необходимо удовлетворяет следующим условиям :

1. Для всякого направления $\omega\in\mathbf{S}^2$ и любой точки отсчета на $\mathbf{S}_\omega$ выполняется

$$\int_0^{2\pi}F(\omega,\varphi)\sin\varphi\,d\varphi=\int_0^{2\pi}F(\omega,\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=0. \qquad (1.12)$$

Это следует из уравнения (1.4), см. также в [8].

2. Для всякого направления $\Omega\in\mathbf{S}^2$

$$\int_0^{2\pi}[F^*((\nu,\tau)_\Omega,N)]'_{\nu=0}\,d\tau=0, \qquad (1.13)$$

где функция F^* есть образ функции $F(\omega,\varphi)$ (см. (1.6)) и $N=E+\frac{\pi}{2}$ – северное направление в точке $(\nu,\tau)_\Omega$ относительно Ω (Теорема 5.1).

Пусть $F(\omega,\varphi)$ – неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на

$\{(\omega,\varphi)\ :\ \omega\in \mathbf{S}^2, \varphi\in \mathbf{S}_\omega\}$. Используя (1.11), построим функцию $\overline{F}(\Omega)$, определенную на $\mathbf{S}^2$:

$$\overline{F}(\Omega)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}F((0,\tau)_\Omega,\varphi)\cos\varphi\,d\varphi\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}F((0,\tau)_\Omega,\varphi)((\pi+2\varphi)\cos\varphi-2\sin^3\varphi)\,d\varphi\right]d\tau-$$

$$-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\nu}{\cos^2\nu}d\nu\int_0^{2\pi}d\tau\int_0^{2\pi}F((\nu,\tau)_\Omega,\varphi)\sin^3\varphi\,d\varphi \tag{1.14}$$

Отметим, что последний интеграл сходится, если удовлетворяются условия (1.12) и (1.13) (см. (5.7) и (5.8)).

Теорема 1.3. Неотрицательная, непрерывно дифференцируемая функция $F(\omega,\varphi)$, определенная на $\{(\omega,\varphi)\ :\ \omega\in \mathbf{S}^2,\ \varphi\in \mathbf{S}_\omega\}$, представляет функцию радуса кривизны проекции некоторого выпуклого тела тогда и только тогда, когда $F(\omega,\varphi)$ удовлетворяет условиям (1.12), (1.13) и

$$\overline{F}_\omega(\varphi)+[\overline{F}_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi}=F(\omega,\varphi),\quad \omega\in\mathbf{S}^2,\quad \varphi\in\mathbf{S}_\omega, \tag{1.15}$$

где $\overline{F}_\omega(\varphi)$ –сужение функции $\overline{F}(\Omega)$ (заданной с помощью (1.14)) на $\mathbf{S}_\omega$.

Отметим, что, в [6] была решена та же задача для для центрально-симметричных выпуклых тел и было найдено другое необходимое и достаточное условие, обеспечивающее положительный ответ.

§2. ОБЩЕЕ ФЛАГОВОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ (1.4)

Зафиксируем $\omega\in\mathbf{S}^2$ и полюс $\mathcal{N}\in\mathbf{S}^2$ и попробуем решить уравнение (1.4) как дифференциальное уравнение второго порядка на окружности $\mathbf{S}_\omega$. Начнем с двух результатов из [8].

1. Для любой гладкой, выпуклой области D, принадлежащей плоскости

$$h(\varphi) = \int_0^\varphi R(\psi)\,\sin(\varphi - \psi)\,d\psi, \tag{2.1}$$

где $h(\varphi)$ – опорная функция области D относительно точки $s \in \partial D$. В (2.1) мы отсчитываем φ от направления нормали в s, $R(\psi)$ есть радиус кривизны ∂D в точке, направление нормали для которой совпадает с ψ.

2. (2.1) есть решение следующего дифференциального уравнения

$$R(\varphi) = h(\varphi) + h''(\varphi). \tag{2.2}$$

Можно легко проверить, что (это также следует из (2.2) и (2.1))

$$G(\omega, \varphi) = \int_0^\varphi F(\omega, \psi)\,\sin(\varphi - \psi)\,d\psi, \tag{2.3}$$

есть флаговое решение уравнения (1.4).

Теорема 2.1. Каждое флаговое решение уравнения (1.4) имеет вид

$$g(\omega, \varphi) = \int_0^\varphi F(\omega, \psi)\,\sin(\varphi - \psi)\,d\psi + C(\omega)\cos\varphi + S(\omega)\sin\varphi \tag{2.4}$$

где C_n и S_n – некоторые действительные коэффициенты.

Доказательство : Каждое непрерывное флаговое решение уравнения (1.4) есть сумма $G(\omega, \varphi) + g_0(\omega, \varphi)$, где $g_0(\omega, \varphi)$ – флаговое решение соответствующего однородного уравнения :

$$H_\omega(\varphi) + [H_\omega(\varphi)]''_{\varphi\varphi} = 0, \quad \omega \in \mathbf{S}^2, \quad \varphi \in \mathbf{S}_\omega. \tag{2.5}$$

Ищем общее флаговое решение уравнения (2.5) в виде ряда Фурье

$$g_0(\omega, \varphi) = \sum_{n=0,1,2,\ldots} [C_n(\omega)\cos n\varphi + S_n(\omega)\sin n\varphi]. \tag{2.6}$$

После подстановки (2.6) в (2.5) получаем, что $g_0(\omega, \varphi)$ удовлетворяет уравнению (2.5) тогда и только тогда, когда

$$g_0(\omega, \varphi) = C_1(\omega)\cos\varphi + S_1(\omega)\sin\varphi.$$

Теорема 2.1 доказана.

§3. УСЛОВИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ

Теперь рассмотрим $C = C(\omega)$ и $S = S(\omega)$ в (2.4) как функции от $\omega = (\nu, \tau)$ и попытаемся найти $C(\omega)$ и $S(\omega)$ из условия, что $g(\omega, \varphi)$ удовлетворяет (1.7). Представим $g(\omega, \varphi)$ в дуальных координатах, т.е. $g(\omega, \varphi) = g^*(\Omega, \phi)$ и потребуем, чтобы $g^*(\Omega, \phi)$ не зависело от ϕ для каждого $\Omega \in \mathbf{S}^2$, т.е. для каждого $\Omega \in \mathbf{S}^2$

$$(g^*(\Omega, \phi))'_\phi = (G(\omega, \varphi) + C(\omega)\cos\varphi + S(\omega)\sin\varphi)'_\phi = 0, \tag{3.1}$$

где $G(\omega, \varphi)$ было определено в (2.3). Здесь и далее через $(\cdot)'_\phi$ обозначим производную, соответствующую правому вращению винта вокруг Ω.

Из дифференцирования с использованием выражений (см. [5])

$$\tau'_\phi = \frac{\sin\varphi}{\cos\nu}, \quad \varphi'_\phi = -\tan\nu\sin\varphi, \quad \nu'_\phi = -\cos\varphi, \tag{3.2}$$

после естественной группировки слагаемых в (3.1), получаем ряд фурье для $-(G(\omega, \varphi))'_\phi$ (подробный вывод содержится в [5] и [3]). В силу единственности коэффициентов Фурье, имеем

$$\begin{cases} (C(\omega))'_\nu + \dfrac{(S(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + \tan\nu\, C(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} A(\omega, \varphi)\cos 2\varphi\, d\varphi \\ (C(\omega))'_\nu - \dfrac{(S(\omega))'_\tau}{\cos\nu} - \tan\nu\, C(\omega) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} A(\omega, \varphi)\, d\varphi \\ (S(\omega))'_\nu - \dfrac{(C(\omega))'_\tau}{\cos\nu} + \tan\nu\, S(\omega) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} A(\omega, \varphi)\sin 2\varphi\, d\varphi, \end{cases} \tag{3.3}$$

где

$$A(\omega,\varphi)=\int_0^{\varphi}[F(\omega,\psi)'_\phi \sin(\varphi-\psi)+F(\omega,\psi)\cos(\varphi-\psi)\,\varphi'_\phi]\,d\psi. \tag{3.4}$$

§4. УСРЕДНЕНИЕ

Пусть H – сферическое решение уравнения $(1\mathcal{A})$, т.е. сужение H на большие окружности является согласованным флаговым решением уравнения (1.4). В силу Теоремы 1.1 существует выпуклое тело **B** с функцией радиуса кривизны проекции $R(\omega,\varphi)=F(\omega,\varphi)$, опорной функцией которой является $H(\Omega)$.

Для того, чтобы вычислить $H(\Omega)$ возьмем $\Omega\in\mathbf{S}^2$ для полюса $\Omega=\mathcal{N}$. Возвращаясь к формуле (2.4) для каждого $\omega=(0,\tau)_\Omega\in\mathbf{S}_\Omega$, имеем

$$H(\Omega)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} R(\omega,\psi)\,\sin(\frac{\pi}{2}-\psi)\,d\psi+S(\omega), \tag{4.1}$$

Проинтегрируем обе стороны (4.1) относительно однородной угловой меры $d\tau$ по множеству $[0,2\pi)$, откуда получаем

$$2\pi H(\Omega)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_\Omega,\psi)\,\cos\psi\,d\psi\,d\tau+\int_0^{2\pi} S((0,\tau)_\Omega)\,d\tau. \tag{4.2}$$

Теперь задача сводится к вычислению

$$\int_0^{2\pi} S((0,\tau)_\Omega)\,d\tau=\overline{S}(0). \tag{4.3}$$

Для этого проинтегрируем обе стороны (3.3) и (3.4) относительно угловой меры $d\tau$ по множеству $[0,2\pi)$. Для $\omega=(\nu,\tau)_\Omega$, где $\nu\in[0,\frac{\pi}{2})$ и $\tau\in(0,2\pi)$ (см. (3.5)) обозначим

$$\overline{S}(\nu)=\int_0^{2\pi} S((\nu,\tau)_\Omega)\,d\tau, \tag{4.4}$$

$$A(\nu)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}d\tau\int_0^{2\pi}\Big[\int_0^{\varphi}[R(\omega,\psi)'_\phi\sin(\varphi-\psi)+$$

$$+R(\omega,\psi)\cos(\varphi-\psi)\,\varphi'_\phi]\,d\psi\Big]\sin 2\varphi\,d\varphi. \tag{4.5}$$

Интегрируя обе стороны (3.3) и (3.4) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} (C(\nu,\tau)_\Omega)'_\tau \, d\tau = 0$$

для $\nu \in [0, \frac{\pi}{2})$, получим

$$\overline{S}'(\nu) + \tan\nu\,\overline{S}(\nu) = A(\nu), \tag{4.6}$$

т.е. дифференциальное уравнение для неизвестного коэффициента $\overline{S}(\nu)$.

§5. ГРАНИЧНОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ (4.6)

Мы должны найти $\overline{S}(0)$, заданное с помощью (4.3). Из уравнения (4.6) следует, что

$$\left(\frac{\overline{S}(\nu)}{\cos\nu}\right)' = \frac{A(\nu)}{\cos\nu}. \tag{5.1}$$

Интегрируя обе стороны формулы (5.1) относительно $d\nu$ по множеству $[0, \frac{\pi}{2})$, получим

$$\overline{S}(0) = \frac{\overline{S}(\nu)}{\cos\nu}\bigg|_{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} \frac{A(\nu)}{\cos\nu}\, d\nu. \tag{5.2}$$

Теперь вычислим $\frac{\overline{S}(\nu)}{\cos\nu}\Big|_{\frac{\pi}{2}}$.

Из (2.4) следует, что

$$\begin{aligned}\overline{S}(\nu) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[H_\omega(\varphi) - \int_0^{\varphi} R(\omega,\psi)\,\sin(\varphi-\psi)\,d\psi\right]\sin\varphi\, d\varphi\, d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H_\omega(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi\, d\tau - \\ &-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R(\omega,\psi)\left((2\pi-\psi)\cos\psi + \sin\psi\right)\, d\psi\, d\tau.\end{aligned} \tag{5.3}$$

Пусть $\varphi \in \mathrm{S}_\omega$ – направление, соответствующее $\varphi \in [0, 2\pi)$, для $\omega = (\nu,\tau)_\Omega$. Рассмотрим направление φ как точку на S^2, пусть φ имеет сферические координаты u, t относительно Ω. По теореме синусов из сферической геометрии

$$\cos\nu\,\sin\varphi = \sin u. \tag{5.4}$$

Из (5.4) получим

$$(u)'_{\nu=\frac{\pi}{2}} = -\sin\varphi. \tag{5.5}$$

Фиксируя τ и используя (5.5), запишем формулу Тейлора в окрестности точки $\nu = \frac{\pi}{2}$:

$$H_{(\nu,\tau)_\Omega}(\varphi) = H((0,\varphi+\tau)_\Omega) + H'_\nu((0,\varphi+\tau)_\Omega)\sin\varphi\,(\frac{\pi}{2}-\nu) + o(\frac{\pi}{2}-\nu). \tag{5.6}$$

Аналогично, для $\psi \in [0, 2\pi)$, получим

$$R((\nu,\tau)_\Omega,\psi) = R((\frac{\pi}{2},\tau)_\Omega,\psi+\tau) + R'_\nu((\frac{\pi}{2},\tau)_\Omega,\psi+\tau)\sin\psi\,(\frac{\pi}{2}-\nu) + o(\frac{\pi}{2}-\nu). \tag{5.7}$$

Подставляя (5.6) и (5.7) в (5.3) и учитывая легко устанавливаемые равенства

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H((0,\varphi+\tau)_\Omega)\sin\varphi\,d\varphi\,d\tau = 0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R((\frac{\pi}{2},\tau)_\Omega,\psi+\tau)\,((2\pi-\psi)\cos\psi+\sin\psi)\;d\psi\,d\tau = 0, \tag{5.8}$$

, получим

$$\lim_{\nu\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{S}(\nu)}{\cos\nu} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} H'_\nu((0,\varphi+\tau)_\Omega)\sin^2\varphi\,d\varphi\,d\tau -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} R'_\nu((\frac{\pi}{2},\tau)_\Omega,\psi+\tau)\,\sin\psi\;((2\pi-\psi)\cos\psi+\sin\psi)\;d\psi\,d\tau =$$

$$= \int_0^{2\pi} H'_\nu((0,\tau)_\Omega)\,d\tau - \frac{3}{4}\int_0^{2\pi}[R^*((\nu,\tau)_\Omega,N)]'_{\nu=0}d\tau. \tag{5.9}$$

Теорема 5.1. Для каждого 3-гладкого, выпуклого тела $\mathbf{B}$ *и любого направления* $\Omega \in \mathbf{S}^2$, *имеем*

$$\int_0^{2\pi}[R^*((\nu,\tau)_\Omega,N)]'_{\nu=0}\,d\tau = 0, \tag{5.10}$$

где ν,τ *– сферические координаты относительно направления* Ω, *а* $N = E + \frac{\pi}{2}$ *– северное направление в точке* $(\nu,\tau)_\Omega$ *относительно* Ω.

Доказательство : Пользуясь сферической геометрией, можно доказать, что (см. также (1.4))

$$[R^*((\nu,\tau)_\Omega, N)]'_{\nu=0} = \left[H((\nu,\tau)_\Omega) + H''_{\varphi\varphi}((\nu,\tau)_\Omega)\right]'_{\nu=0} =$$

$$= \left[H((\nu,\tau)_\Omega) + H''_{\tau\tau}\frac{1}{\cos^2\nu} - H'_\nu \tan\nu\right]'_{\nu=0} = [H''_{\tau\tau}]'_{\nu=0}, \tag{5.11}$$

где $H(\Omega)$ – опорная функция тела **B**. Интегрируя (5.11), получим

$$\int_0^{2\pi} [R^*((\nu,\tau)_\Omega, N)]'_{\nu=0}\, d\tau = \int_0^{2\pi} [H''_{\tau\tau}]'_{\nu=0}\, d\tau = 0.$$

§6. ЦЕНТРОИД ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Пусть **B** – выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$, а $Q \in \mathbb{R}^3$ – точка. Обозначим через $H_Q(\Omega)$ опорную функцию тела **B** относительно точки Q.

Теорема 6.1. Для заданного 1-гладкого, выпуклого тела **B**, *существует точка* $O^* \in \mathbb{R}^3$ *такая, что для каждого* $\Omega \in \mathbf{S}^2$ *выполняется*

$$\int_0^{2\pi} [H_{O^*}((\nu,\tau)_\Omega)]'_{\nu=0}\, d\tau = 0, \tag{6.1}$$

где ν, τ *– сферические координаты относительно* Ω.

Доказательство : Для заданного тела **B** и точки $Q \in \mathbb{R}^3$, обозначим через $K_Q(\Omega)$ следующую функцию, определенную на $\mathbf{S}^2$,

$$K_Q(\Omega) = \int_0^{2\pi} [H_Q((\nu,\tau)_\Omega)]'_{\nu=0}\, d\tau.$$

Очевидно, $K_Q(\Omega)$ является непрерывной, нечетной функцией с максимумом $\overline{K}(Q)$:

$$\overline{K}(Q) = \max_{\Omega\in\mathbf{S}^2} K_Q(\Omega).$$

Легко увидеть, что $\overline{K}(Q) \to \infty$ при $|Q| \to \infty$. Поскольку $\overline{K}(Q)$ является непрерывной функцией, то существует точка O^*, для которой $\overline{K}(O^*) = \min \overline{K}(Q)$.

Пусть Ω^* – направление максимума, которое теперь предполагается единственным, т.е.

$$\overline{K}(O^*) = \max_{\Omega\in \mathbf{S}^2} K_{O^*}(\Omega) = K_{O^*}(\Omega^*).$$

Если $\overline{K}(O^*) = 0$, то теорема доказана. Для случая $\overline{K}(O^*) = a > 0$ пусть O^{**} – точка, для которой $\overrightarrow{O^*O^{**}} = \varepsilon\,\Omega^*$. Легко показать, что $H_{O^{**}}(\Omega) = H_{O^*}(\Omega) - \varepsilon(\Omega, \Omega^*)$, следовательно, для малого $\varepsilon > 0$ находим, что $\overline{K}(O^{**}) = a - 2\pi\varepsilon$, вопреки определению точки O^*. Итак, $\overline{K}(O^*) = 0$. Для случая, когда существуют два или более направления максимума можно применить аналогичный аргумент. Теорема 6.1 доказана.

Точку O^* назовем *центроидом* выпуклого тела $\mathbf{B}$. Нижеследующая Теорема 6.2 дает ясную геометрическую интерпретацию этого понятия.

Пусть $P_\Omega(\tau)$ – точка на теле $\partial\mathbf{B}$, направление внешней нормали для которой совпадает с направлением $\tau \in \mathbf{S}_\Omega$.

Лемма 6.1. Для любого 2-гладкого, выпуклого тела $\mathbf{B}$ *с положительной Гаусовой кривизной и любого направления* $\Omega \in \mathbf{S}^2$, *имеем*

$$\int_0^{2\pi} [H_Q((\nu,\tau)_\Omega)]'_{\nu=0}\, d\tau = \int_{\mathbf{S}_\Omega} <\overrightarrow{QP_\Omega(\tau)}, \Omega>\, d\tau, \tag{6.2}$$

где Q *есть точка пространства* $\mathbb{R}^3$ *и* $d\tau$ *– обычная угловая мера на* $\mathbf{S}_\Omega$.

Доказательство : Пусть $B[\Omega,\tau]$ – проекция тела $\mathbf{B}$ на плоскость $e[\Omega,\tau]$ (= плоскость, содержащая точку Q и направления $\Omega \in \mathbf{S}^2$ и $\tau \in \mathbf{S}_\Omega$), а $P^*(\tau)$ – точка на границе $\partial B[\Omega,\tau]$ с внешней нормалью $(0,\tau)_\Omega$. Для опорной функции проекции $B[\Omega,\tau]$ (эквивалентно, для сужения функции $H_Q(\Omega)$ на плоскости $e[\Omega,\tau]$) имеем

$$[H_Q((\nu,\tau)_\Omega)]'_{\nu=0} = [|\overrightarrow{QP^*(\tau)}|\cos(\nu-\nu_o) + H_{P^*}(\nu)]'_{\nu=0} =$$

$$= |\overrightarrow{QP^*(\tau)}|\sin\nu_o = <\overrightarrow{QP^*(\tau)}, \Omega>, \tag{6.3}$$

где $H_{P^*}(\nu)$ – опорная функция проекции $B[\Omega,\tau]$ относительно точки $P^*(\tau) \in \partial B[\Omega,\tau]$ и $(\nu_0,\tau)_\Omega$ – направление $\overrightarrow{QP^*(\tau)}$. Как было доказано в [8], $[H_{P^*}(\nu)]'_{\nu=0} = 0$. Интегрируя (6.3) и учитывая, что $< \overrightarrow{QP^*(\tau)}, \Omega > = < \overrightarrow{QP_\Omega(\tau)}, \Omega >$, получим (6.2).

Теорема 6.1 и Лемма 6.1 влекут следующую Теорему.

Теорема 6.2. Для любого 2-гладкого выпуклого тела **B** *с положительной Гауссовой кривизной имеем*

$$\int_0^{2\pi} < \overrightarrow{O^* P_\Omega(\tau)}, \Omega > d\tau = 0, \quad \Omega \in \mathbf{S}^2, \tag{6.4}$$

где O^* есть центроид тела **B**.

Можно рассмотреть последнее утверждение как определение центроида тела **B**.

§7. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ОПОРНЫХ ФУНКЦИЙ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Пусть точка O^* есть центроид выпуклого тела **B** (см. §6). Теперь примем O^* за начало координат в пространсве $\mathbb{R}^3$. Ниже $H_{O^*}(\Omega)$ просто обозначим через $H(\Omega)$.

В силу Теоремы 6.1, Теоремы 5.1 и Леммы 6.1 имеем граничное условие (см. (5.9))

$$\left.\frac{\overline{S}(\nu)}{\cos\nu}\right|_{\frac{\pi}{2}} = 0. \tag{7.1}$$

Подставляя (5.2) в (4.2), получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_\Omega,\psi)\,\cos\psi\,d\psi\,d\tau - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{A(\nu)}{\cos\nu}\,d\nu =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_\Omega,\psi)\,\cos\psi\,d\psi\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\nu}{\cos\nu}\int_0^{2\pi} d\tau\times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\varphi} [R(\omega,\psi)'_{\phi} \sin(\varphi-\psi) + R(\omega,\psi) \cos(\varphi-\psi)\, \varphi'_{\phi}]\, d\psi \right] \sin 2\varphi\, d\varphi. \qquad (7.2)$$

Используя выражения (3.2) и интегрируя по $d\varphi$, получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} R((0,\tau)_{\Omega},\psi) \cos\psi\, d\psi\, d\tau +$$

$$+\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\nu}{\cos\nu} \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} [R(\omega,\psi)'_{\nu}\, I + R(\omega,\psi) \tan\nu\, II].\, d\psi,$$

где

$$II = \int_{\psi}^{2\pi} \sin 2\varphi \cos(\varphi-\psi) \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \left[\frac{(2\pi-\psi)\cos\psi}{4} + \frac{\sin\psi(1+\sin^2\psi)}{4} - \sin^3\psi \right],$$

и

$$I = \int_{\psi}^{2\pi} \sin 2\varphi \sin(\varphi-\psi) \cos\varphi\, d\varphi = \left[\frac{(2\pi-\psi)\cos\psi}{4} + \frac{\sin\psi(1+\sin^2\psi)}{4} \right]. \qquad (7.3)$$

Интегрируя по частям выражение (7.2), получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_{\Omega},\psi) \cos\psi\, d\psi\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\nu \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} R(\omega,\psi) \frac{\sin\nu \sin^3\psi}{\cos^2\nu}\, d\psi -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau \int_0^{2\pi} R((0,\tau)_{\Omega},\psi) I\, d\psi + \lim_{a\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi\cos a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau \int_0^{2\pi} R((a,\tau)_{\Omega},\psi) I\, d\psi. \qquad (7.4)$$

Используя (5.7), Теорему 5.1 и, учитывая, что $\int\limits_0^{2\pi} I\, d\psi = 0$, получим

$$2\pi H(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R((0,\tau)_{\Omega},\psi) \cos\psi\, d\psi\, d\tau -$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\nu \int_0^{2\pi} d\tau \int_0^{2\pi} R(\omega,\psi) \frac{\sin\nu \sin^3\psi}{\cos^2\nu}\, d\psi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\tau \int_0^{2\pi} R((0,\tau),\psi) I\, d\psi. \qquad (7.5)$$

Из (7.5), с помощью (1.12) получим (1.11). Теорема 1.2 доказана.

§8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

Необходимость. Если $F(\omega, \varphi)$ – функция радиуса кривизны проекции выпуклого тела $\mathbf{B}$, то тогда она удовлетворяет условиям (1.12) (см [8]), (1.13) (Теорема 5.1) и (1.14) (Теорема 1.2).

Достаточность. Пусть $F(\omega, \psi)$ – неотрицательная, непрерывная, дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (1.12), (1.13), (1.15). Посредством (1.14) построим функцию $\overline{F}(\Omega)$, определенную на $\mathbf{S}^2$, как в (1.14). Согласно (1.15), $\overline{F}(\Omega)$ является выпуклой функцией, следовательно, существует выпуклое тело B с опорной функцией $\overline{F}(\Omega)$. В силу того же (1.15) следует, что $F(\omega, \varphi)$ является функцией радиуса кривизны проекции тела $\mathbf{B}$.

Выражаю свою благодарность Р. В. Амбарцумяну за его полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. V. Ambartzumian, Factorization Calculus and Geometrical Probability, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
2. А. Д. Александров, "Теоремы единственности для поверхностей в целом", Вести, ЛГУ, № 19, 1956.
3. Р. Г. Арамян, "Подход к обобщенным уравнениям Функа, I", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 1, стр. 47 – 58, 2001.
4. Р. Г. Арамян, "Радиусы кривизны плоских проекций выпуклых тел в R^n", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 1, стр 2 – 14, 2002.
5. Р. Г. Арамян, "Обобщенное преобразование Радона с применением в теории выпуклости", Изв. АН Армении, Математика, том 38, № 3, стр. 16 – 36, 2003.
6. Р. Г. Арамян, "Восстановление центрально-симметричных выпуклых тел с помощью радиусов кривизны проекций", Изв. НАН Армении, Математика, том 39, № 5, стр. , 2004.
7. И. Я. Бакельман, А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, "Дифференциальная геометрия в целом", Наука, Москва, 1973.
8. W. Blaschke, Kreis und Kugel, De Gruyter, Berlin, 1956.
9. А. В. Погорелов, Внешняя геометрия выпуклых поверхностей, Наука, Москва, 1969.
10. W. Weil, R. Schneider, "Zonoids and related Topics", in Convexity and its Applications, Ed. P. Gruber and J. Wills, Birkhauser, Basel, 1983.

29 ноября 2003

Институт Математики
Национальной Академии Наук Армении
e.mail : rafik@instmath.sci.am