Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 61–71

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. Р. Хачатрян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассматриваются некоторые параметризованные задачи выпуклого программирования. Показано, что при довольно естественных предположениях, множества оптимальных решений являются липшицевыми многозначными выпуклыми отображениями. Доказано, что липшицевые многозначные отображения с выпуклыми замкнутыми значениями на компактных множествах можно представить через функции однозначных липшицевых селекций этих отображений.

§1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Многозначные отображения интенсивно применяются для исследования устойчивости и стабильности в параметризованных экстремальных задачах (см. [5], [6], [8]) и в теории дифференциальных включений (см. [4], [5]). В настоящей статье рассматриваются некоторые параметризованные задачи выпуклого программирования. Показано, что при довольно естественных предположениях, множество $\mathcal{E}$ оптимальных решений являются липшицевыми многозначными выпуклыми отображениями. Доказано, что если значения многозначного липшицева отображения выпуклы и замкнуты на компактных множествах, то его можно представить через функции одномерных липшицевых селекций этих отображений (см. [2]], [7], [10]).

Пусть X и Y – банаховы пространства, $B_\varepsilon(x)$ – замкнутый шар радиуса ϵ с центром в точке x. Обозначим через clM замыкание множества M, а через ∂M – его границу. Отображение a из X в Y называется **многозначным отображением** (в дальнейшем м.о.), если каждому $x \in X$ оно сопоставляет множество $a(x) \subseteq Y$, т.е. $a : X \longmapsto 2^Y$. Селекция для a определяется как однозначное отображение $y(\cdot) : X \longmapsto Y$ такое, что $y(x) \in a(x)$ для всех $x \in X$.

Определение 1. Будем говорить, что м.о. a **H-полунепрерывно снизу (сн.пн)** в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x_0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0)$, $x \in U(x_0)$.

Определение 2. Будем говорить, что м.о. a **H-полунепрерывно сверху (св.пн.)** в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что $a(x) \subseteq a(x_0) + B_\varepsilon(0)$, $x \in U(x_0)$.

М.о. a называется **H-непрерывным** в точке x_0, если в точке x_0 оно одновременно и H-сн.пн. и H-св.пн.

Определение 3. М.о. a называется **K-сн.пн.** в точке x_0, если для любого $y_0 \in a(x_0)$ и любой последовательности $\{x_j\}$, $x_j \to x_0$, существует $y_j \in a(x_j)$ такое, что $y_j \to y_0$.

Определение 4. Будем говорить, что м.о. a удовлетворяет **условию Липшица на множестве** $E \subseteq X$, если существует число $L > 0$ такое, что

$$a(x_1) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0), \quad x_1, x_2 \in E.$$

Лемма 1.1. *Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть $a : X \to 2^Y$ – H-сн.пн. многозначное отображение с выпуклыми, замкнутыми значениями. Далее, пусть $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$. Тогда существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такие, что $y_0 + B_\varepsilon(0) \in a(x)$, $x \in V(x_0)$.*

Доказательство. Так как $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$, то существуют $\varepsilon > 0$ и окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такие, что

$$y_0 + 2B_\varepsilon(0) \subseteq a(x) + B_\varepsilon(0), \quad x \in V(x_0). \tag{1.1}$$

Для того, чтобы доказать $y_0 + B_\varepsilon(0) \subseteq a(x)$, заметим, что если выполнено включение (1.1), то для любого $u_0 \in Y$ имеет место неравенство

$$\rho(u_0, y_0 + 2B_\varepsilon(0)) \geq \rho(u_0, a(x) + B\varepsilon(0)). \tag{1.2}$$

Известно (см. [3]) представление

$$\rho(u_0, M) = \sup_{\|y^*\| \leq 1} \{< y^*, u_0 > -sM(y^*)\}, \quad sM(y^*) = \sup_{y \in M} \langle y^*, y \rangle.$$

Следовательно,

$$\rho(u_0, y_0 + 2B_\varepsilon(0)) = \|u_0 - y_0\| - 2\varepsilon \geq \rho(u_0, a(x)) - \varepsilon.$$

Из (1.2) получаем $\|u_0 - y_0\| - 2\varepsilon \geq \rho(u_0, a(x)) - \varepsilon$ и поэтому $\|u_0 - y_0\| - \varepsilon \geq \rho(u_0, a(x))$. Следовательно,

$$\rho(u_0, y_0 + B_\varepsilon(0)) \geq \rho(u_0, a(x)). \tag{1.3}$$

Если существует $\overline{y} \in y_0 + B_\varepsilon(0)$ такое, что $\overline{y} \notin a(x)$, то $\rho(\overline{y}, a(x)) > 0$ и $\rho(\overline{y}, y_0 + B_\varepsilon(0)) = 0$, но это противоречит условию (1.3). Лемма 1.1 доказана.

Теорема 1.1. *Пусть X и Y – банаховы пространства, и пусть a – H-сн.пн. многозначное отображение на компактном множестве $E \subset X$. Далее, пусть $M \subset Y$ – выпуклое, замкнутое множество, и пусть $\operatorname{int} a(x) \cap M \neq \emptyset$ для любого $x \in E$. Тогда $c(x) \equiv a(x) \cap M$ является многозначным K-сн.пн. отображением.*

Доказательство. Сначала, покажем, что существует непрерывное отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$, $\overline{x} \in V(x)$. Пусть $u_x \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$. Тогда из леммы 1.1 следует, что существует окрестность $V(x)$ точки x такая, что $u_x \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$, $\overline{x} \in V(x)$. Семейство $\{V_x\}_{x\in E}$ открытых окрестностей покрывают компактное множество E. Следовательно, существует конечное множество открытых окрестностей $\{V_i\}_{i=1}^n$, также покрывающих E. Пусть точки u_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ такие, что $u_i \in \operatorname{int} a(x) \cap M$, $\overline{x} \in V_i$. Определим функции следующим образом :

$$\vartheta_i(x) = \min\{1, d(x, E \setminus V_i)\}, \quad \vartheta(x) = \sum_{i=1}^{n} \vartheta_i(x), \quad \lambda_i(x) = \vartheta_i(x)/\vartheta(x).$$

Эти функции непрерывны, поскольку функции расстояния $d(x, E \setminus V_i)$ удовлетворяют условию Липшица по x. Следовательно, функция $D(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x) u_i$ $(x \in E)$ непрерывна и $\lambda_i(x) = 0$, если $x \notin V_i$. Так как, $u_i \in \operatorname{int} a(x) \cap M$, если $x \in V_i$, то $D(x) \in \operatorname{int} a(x) \cap M$, для любого $x \in E$.

Теперь покажем, что многозначное отображение $c(x)$ является сн.пн. Пусть $y_0 \in c(x_0)$ и $x_j \to x_0$. Положим

$$T_j \equiv \{t \in [0,1]/y_j \equiv ty_0 + (1-t)D(x_j) \in c(x_j)\}.$$

Поскольку $0 \in T_j$, то $T_j \neq \emptyset$. Если t_j является максимальным элементом множества T_j, то последовательность $\{t_j\}$ можно считать сходящейся. Так как $D(x_j) \to D(x_0)$, то $y_j \to y_0$, при $t_j \to 1$. Следовательно, $\{y_j\}$ – искомая последовательность. Если $t_j \to t < 1$, то начиная с некоторого номера, все $t_j < 1$. Покажем, что $y_j \in \partial a(x_j)$. Допустим, что $y_j \in \operatorname{int} a(x_j)$ и $t'_j = t_j + \delta < 1$, и рассмотрим точки

$$y'_j = t'_j y_0 + (1 - t'_j) D(x_j) = y_j + \delta(y_0 - D(x_j)).$$

Выберем $\delta > 0$ настолько малым, что $y'_j \in \operatorname{int} a(x_j)$, и тем самым получим противоречие с максимальностью t_j. Если $y_j \in \partial a(x_j)$, то согласно лемме 1.1, имеем

$$\overline{y} \equiv ty_0 + (1-t)D(y_0) \in \partial a(x_0). \tag{1.4}$$

Если $y_0 \in \partial a(x_0)$ и $D(x_0) \in \operatorname{int} a(x_0)$, то $\overline{y} \in \operatorname{int}\ (x_0)$, а это противоречит условию (1.4). Следовательно, существует последовательность $y_j \in a(x_j) \cap M$ такая, что $y_j \to y_0$.

Если $y_0 \in \operatorname{int} a(x_0)$, то согласно лемме 1.1, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $y_0 \in a(x)$ для любой точки $x \in V(x)$, и $y \equiv y_0$ будет искомой последовательностью. Таким образом, $c(x)$ является K-сн. пн.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.1, и пространство Y - сепарабельно. Тогда существуют счётное множество липшицевых отображений $\{y_j(x)\}$ таких, что*

$$y_j(x) \in c(x) \quad (i = 1, 2, \ldots) \quad \text{и} \quad c(x) = cl\{y_1(x), y_2(x), \ldots\}, \quad x \in E.$$

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.1, построим функцию $D(x) = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i(x) u_i$, где I – конечное множество индексов. Покажем, что D удовлетворяет условию Липшица на компакте E. Для этого достаточно показать, что функция $\lambda_i(x) = \vartheta_i(x)/\vartheta(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Так как функция расстояния $d(x, E \setminus V_i)$ удовлетворяет условию Липшица (с константой 1), то и функции $\vartheta_i(x) = \min\{1, d(x, E \setminus V_i)\}$ и $\vartheta(x) = \sum\limits_{i \in I} \vartheta_i(x)$ также удовлетворяют условию Липшица. Так как E компакт, и $\vartheta(x) > 0$ для любого $x \in E$, то $m = \min_{x \in E} \vartheta(x) > 0$. Имеем

$$|\lambda_i(x_1) - \lambda_i(x_2)| = \left| \frac{\vartheta_i(x_1)}{\vartheta(x_1)} - \frac{\vartheta_i(x_2)}{\vartheta(x_2)} \right| = \left| \frac{\vartheta_i(x_1)\vartheta(x_2) - \vartheta_i(x_2)\vartheta(x_1)}{\vartheta(x_1)\vartheta(x_2)} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{m^2} \left(|\vartheta(x_2)||\vartheta_i(x_1) - \vartheta_i(x_2)| + |\vartheta_i(x_2)||\vartheta(x_1) - \vartheta(x_2)| \right) \le \frac{M_2 + M_1}{m^2} \|x_1 - x_2\|,$$

где $M_1 = \max_{x \in E} \theta(x)$, $M_2 = |I|$.

Таким образом, отображение D удовлетворяет условию Липшица на E. Пусть теперь $\overline{u} \in \operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$. Тогда согласно лемме 1.1, существует $\delta > 0$ такое, что $\overline{u} \in \operatorname{int} a(x)$, $x \in B_\delta(\overline{x})$. Положим

$$\lambda(x) \equiv d(x, E \setminus B_\delta(\overline{x})) \,/\, \left[d(x, E \setminus B_\delta(\overline{x})) + d(x, B_{\delta/2}(\overline{x})) \right].$$

Можно показать, что функция $\lambda(x)$ также удовлетворяет условию Липшица на E. Далее, очевидно, $\lambda(x) = 1$ для $x \in B_{\delta/2}(\overline{x})$ и $\lambda(x) = 0$ для $x \notin B_\delta(\overline{x})$ и $0 \le \lambda(x) \le 1$. Отсюда следует, что функция $y(x) \equiv \lambda(x)\overline{u} + (1 - \lambda(x))D(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $y(x) \in c(x)$, $y(\overline{x}) = \overline{u}$. Обозначим через $\Im$ множество всех липшицевых селекций отображения $c(x)$. Так как $\overline{x}$ и $\overline{u}$ – произвольные точки множеств E и $\operatorname{int} a(\overline{x}) \cap M$ соответственно, то

$$\operatorname{int} a(x) \cap M \subseteq \{y(x)/y \in \Im\} \subseteq a(x) \cap M, \quad x \in E.$$

Поэтому для всех $x \in E$ множество $\{y(x)/y \in \Im\}$ всюду плотно в $a(x) \cap M$. Известно (см. [5]), что подмножество $\Im \subseteq C(E, Y)$ содержит счётное, всюду плотное подмножество $\{y_1, y_2, \ldots\}$. Для $x \in E$ множество $\{y(x)/y \in \Im\}$ всюду плотно в $c(x)$. Поэтому, для всех $x \in E$ множество $\{y_1(x), y_2(x), \ldots\}$ также всюду плотно в $c(x)$. Теорема 1.2 доказана.

§2. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 2.1. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ – липшицевы многозначные отображения на множестве E и существует число $\tau > 0$ такое, что $\tau B_1(0) \subseteq a(x) - b(x)$, $x \in E$. Если существует $\overline{x} \in E$ такое, что множество $b(\overline{x})$ ограничено, то м.о. $c(x) \equiv a(x) \cap b(x)$ удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Так как м.о. a и b удовлетворяют условию Липшица, то существуют постоянные L_1 и L_2 такие, что для любых $x_1, x_2 \in X$ имеют место включения

$$a(x_1) \subseteq a(x_2) + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0), \tag{2.1}$$

$$b(x_1) \subseteq b(x_2) + L_2\|x_1 - x_2\|B_2(0). \tag{2.2}$$

Пусть $y_1 \in a(x_1) \cap b(x_1)$. Тогда из соотношений (2.1) и (2.2) следует, что существуют элементы $y_2' \in a(x_2)$ и $y_2'' \in b(x_2)$ такие, что

$$y_1 \in y_2' + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0), \tag{2.3}$$

$$y_1 \in y_2'' + L_2\|x_1 - x_2\|B_1(0). \tag{2.4}$$

Следовательно, $y_1 = y_2'' + z$, где $z \in L_2\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, и из (2.3) получим $y_2'' + z \in y_2' + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, т.е. $y_2'' \in y_2' + L_1\|x_1 - x_2\|B_1(0) + L_2\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, и

$$y_2'' \in y_2' + (L_1 + L_2)\|x_1 - x_2\|B_1(0). \tag{2.5}$$

Положим $\vartheta = \tau/(\tau + \alpha) < 1$, где $\alpha = (L_1 + L_2)\|x_1 - x_2\|$. Из (2.5) получим

$$\vartheta y_2'' \in \vartheta a(x) + \alpha\vartheta B_1(0). \tag{2.6}$$

Теперь заметим, что

$$\alpha\vartheta = \frac{\alpha\tau}{\tau+\alpha} = (1-\vartheta)\tau. \tag{2.7}$$

Отсюда и из соотношений (2.6) и (2.7), получаем

$$\vartheta y_2'' \in \vartheta a(x_2) + (1-\vartheta)\tau B_1(0) \subseteq \vartheta a(x_2) + (1-\vartheta)\big(a(x_2) - b(x_2)\big) = a(x_2) - (1-\vartheta)b(x_2). \tag{2.8}$$

Следовательно, существует $\widetilde{y} \in b(x_2)$ такое, что $\vartheta y_2'' + (1-\vartheta)\widetilde{y} \in a(x_2)$. Так как множества $a(x_2)$ и $b(x_2)$ выпуклы, то

$$\vartheta y_2'' + (1-\vartheta)\widetilde{y} \in a(x_2) \cap b(x_2) \equiv c(x_2).$$

Легко проверить следующие оценки :

$$\|y_1 - (\vartheta y_2'' + (1-\vartheta)\widetilde{y})\| \le \vartheta\|y_1 - y_2''\| + (1-\vartheta)\|y_1 - \widetilde{y}\| \le$$

$$\le L_2\|x_1 - x_2\| + \frac{\alpha}{\alpha+\tau}\|y_1 - \widetilde{y}\| \le L_2\|x_1 - x_2\| + \frac{\alpha}{\tau}M,$$

где $M = 2C$ и $C = \sup_{y\in b(x),\, x\in E}\|y\|$. Отсюда получаем

$$\|y_1 - \widetilde{y}\| \le \left[L_2 + \frac{M}{\tau}(L_1 + L_2)\right]\|x_1 - x_2\| \equiv L\|x_1 - x_2\|.$$

Следовательно, $c(x_1) \subseteq c(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0)$, т.е. м.о. $c(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Теорема 2.1 доказана.

Рассмотрим теперь следующую параметрическую задачу оптимизации

$$f_0(x,y) \to \min, \quad f_i(x,y) \le 0, \quad j = 1,2,\dots,p,$$

где $y \in Y$, а $x \in E$ – параметр. Положим

$$V(x) = \inf\{f_0(x,y)/f_j(x,y) \le 0, \quad j = 1,2,\dots,p, \quad y \in F\}.$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнены следующие три условия :*

1) *множество $E \subset \mathbb{R}^m$ - компакт и $F \in \mathbb{R}^n$ - выпуклый компакт ;*
2) *функции $y \to f_j(x,y)$ $(j = 1,\dots,p)$ выпуклы по y, а по x удовлетворяют условию Липшица равномерно относительно $y \in F$, т.е. существуют числа $L_j > 0$ такие, что для любых $x_1, x_2 \in E$ и $y \in F$ имеют место неравенства*

$$|f_j(x_1,y) - f_j(x_2,y)| \le L_j\|x_1 - x_2\|, \quad j = 1,2,\dots,p;$$

3) *для любого $x \in E$ существует $y \in F$ такое, что $f_j(x,y) < 0$, $j = 1,2,\dots,p$.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ м.о.

$$a_\varepsilon(x) = \{y \in F : f_j(x,y) \le 0, \quad j = 1,\dots m, \quad f_0(x,y) \le V(x) + \varepsilon\}$$

удовлетворяет условию Липшица на множестве E.

Доказательство. Пусть $\delta, \epsilon > 0$. Положим

$$B(x) = \{y \in F + B_\delta(0) : f_0(x,y) \le V(x) + \varepsilon\},$$
$$A(x) = \{y \in F : f_j(x,y) \le 0, \quad j = 1, \ldots, p\},$$
$$a(x) = \{y \in A(x) : f_0(x,y) \le V(x)\},$$
$$a_\varepsilon(x) = \{y \in A(x) : f_0(x,y) \le V(x) + \varepsilon\},$$
$$\psi(x,y) \equiv \max_{j=1,\ldots,p} f_j(x,y).$$

Тогда очевидно, $A(x) = \{y \in F : \psi(x,y) \le 0\}$ и $a_\varepsilon(x) = A(x) \cap B(x)$. В силу теоремы 2 из [1], оба м.о. $A(x)$ и $B(x)$ удовлетворяют условию Липшица, и очевидно, существует $\tau \in (0,\delta)$ такое, что $\tau B_1(0) \subseteq B(x) - a(x)$, т.е. $\tau B_1(0) \subseteq A(x) - B(x)$. Отсюда и из теоремы 2.1 получим, что м.о. $a_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Теорема 2.2 доказана.

Следствие. Если $f_0(x,y) \equiv f_0(y)$, $f_j(x,y) \equiv f_j(y) - x_j$ и существует $\widetilde{y} \in F$ такая, что $f_j(\widetilde{y}) < 0$ $(j = 1, \ldots, p)$, то многозначное отображение $a_\varepsilon(x)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности начала координат.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Теорема 3.1. *Пусть $a : X \longmapsto 2^Y$ – липшицево м.о. (с константой $L > 0$) на компактном множестве $E \subset X$, с выпуклыми, замкнутыми значениями и непустой внутренностью. Далее, пусть Y – сепарабельное гильбертово пространство. Пусть для некоторого $\overline{x} \in E$ множество $a(\overline{x})$ – ограничено. Тогда существуют число $L_1 > 0$ и отображения $\{y_j(x)\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что для всех i имеют место неравенства*

$$\|y_i(x_1) - y_i(x_2)\| \le L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E,$$

$$y_i(x) \in a(x), \quad a(x) = cl\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots\}, \quad x \in E.$$

Доказательство. Выше мы показали, что существует однозначное липшицево отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \operatorname{int} a(x)$, $x \in E$. Рассмотрим м.о. $b(x) \equiv a(x) - D(x)$. Так как множество E компактно, то из леммы 1.1 непосредственно следует, что существует $\delta > 0$ такое, что $B_\delta(0) \subseteq b(x)$ для любого $x \in E$.

Теперь рассмотрим функцию Минковского для множества $b(x)$, т.е. $r(x,y) \equiv \inf_\alpha\{\alpha > 0 : y/\alpha \in b(x)\}$. Известно (см. [3]), что при любом фиксированном x функция $r(x,y)$ выпукла, однородна и непрерывна по y. Имеем

$$r(x,y) < 1 \Longleftrightarrow y \in \operatorname{int} b(x) \quad \text{и} \quad r(x,y) = 1 \Longleftrightarrow y \in \partial b(x).$$

Пусть число $\Delta > 0$ такое, что $b(x) \subseteq B_\Delta(0)$ для любого $x \in E$. Очевидно, что для любого $y \neq 0$ имеет место включение $z_1 \equiv y[r(x_1, y)]^{-1} \in \partial b(x_1)$. Пусть $z_1 \notin b(x_2)$ и точка z такая, что $\|z_1 - z\| = d(z_1, b(x_2))$ (см. Рис. 1). Проведём двумерную плоскость, проходящую через три точки z, z_1 и 0. Пусть отрезок $[y_1, y_2]$ перпендикулярен отрезку $[z_1, 0]$ и $|\overline{0, y_1}| = |\overline{0, y_2}| = \delta$. Тогда хотя бы один из отрезков $[z, y_1]$ и $[z, y_2]$ пересекает отрезок $[z_1, 0]$ в некоторой точке y_3. Поскольку $y_2 \in b(x_2)$ и $z \in b(x_2)$, то $y_3 \in b(x_2)$.

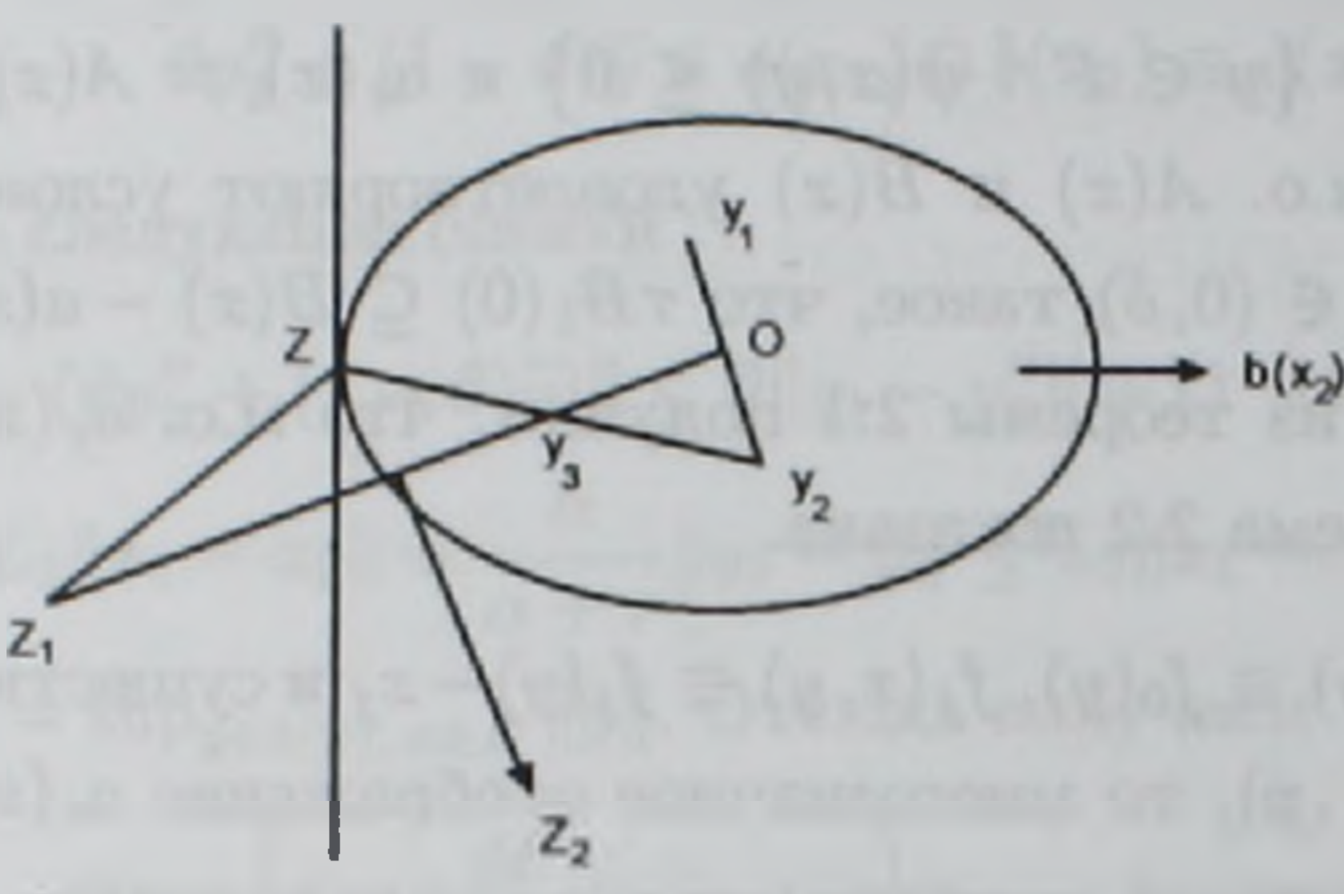

Рис. 1

Если $y_3 \neq z$, имеет место следующее неравенство для углов :

$$\angle(zy_3z_1) \geq \angle(0y_3y_2) \geq \arctan\frac{\delta}{\Delta}.$$

Далее, из треугольника zy_3z_1 имеем

$$\|z_1 - y_3\| = \frac{\sin\angle(y_3zz_1)}{\sin\angle(zy_3z_1)}\|z_1 - z\| \leq \frac{L}{\sin\alpha_0}\|x_1 - x_2\|.$$

Но поскольку $z_2 = y[r(x_2, y)]^{-1}$, то имеем

$$\|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - y_3\| \leq \frac{L}{\sin\alpha_0}\|x_1 - x_2\|.$$

Отметим, что это неравенство тривиально выполняется и в исключённом выше случае $z = y_3$. Таким образом, показано

$$\left\|\frac{y}{r(x_1, y)} - \frac{y}{r(x_2, y)}\right\| \leq \frac{L}{\sin\alpha_0}\|x_1 - x_2\|. \tag{3.1}$$

Пусть теперь $\overline{y} \in b(\overline{x})$. Положим $y(x) \equiv \overline{y}r(\overline{x}, \overline{y})/r(x, \overline{y})$. Тогда очевидно, что $y(\overline{x}) = \overline{y}$ и

$$r(x, y(x)) = r(x, \overline{y})r(\overline{x}, \overline{y})/r(x, \overline{y}) = r(\overline{x}, \overline{y}) \leq 1.$$

Поэтому для любого $x \in E$ имеем $y(x) \in b(x)$. Имея ввиду неравенства (3.1), получаем

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \le r(\bar{x}, \bar{y}) \frac{L}{\sin \alpha_0} \|x_1 - x_2\| \equiv L_1 \|x_1 - x_2\|, \quad x_1, x_2 \in E.$$

Поэтому отображение $y(x)$ есть селектор отображения $b(x)$, проходящего через точку $(\bar{x}, \bar{y})$ $(\bar{y} \in b(\bar{x}))$.

Пусть $\Im$ – множество всех липшицевых (с константой L_1) селекторов отображения $b(x)$. Так как $\bar{x}$ и $\bar{y}$ произвольные точки множеств E и $b(\bar{x})$, соответственно, то $b(x) = \{y(x) : y \in \Im\}$ для любого $x \in E$. Так как пространство $C(E, Y)$ сепарабельно, то множество $\Im \subseteq C(E, Y)$ содержит счётное, всюду плотное подмножество $\{y'_1, y'_2, \ldots\}$. Таким образом, имеем $b(x) = cl\{y'_1(x), y'_2(x), \ldots\}$. Положим $y_i(x) \equiv y'_i(x) + D(x)$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, что $y_i(x) \in a(x)$ и $a(x) = cl\{y'_1(x), y'_2(x), \ldots\}$.

Следствие 1. Пусть a многозначное отображение с выпуклыми, замкнутыми значениями и непустой внутренностью, причём a удовлетворяет условию Липшица на компактном множестве E. Тогда через любую точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}\, a \equiv \{(x, y) : y \in a(x)\}$ проходит липшицева селекция этого отображения.

Доказательство. Пусть $y_0 \in a(x_0)$, $\delta > 0$ и

$$b_\delta(x) = \{y \in Y : \|y - y_0\| \le d(y_0, a(x)) + \delta\}.$$

Положим $c(x) = a(x) \cap b_\delta(x)$. Тогда $b_\delta(x)$ удовлетворяет условию Липшица и $B_\delta(0) \subseteq a(x) - b_\delta(x)$. Следовательно, в силу теоремы 2.1 м.о. c удовлетворяет условию Липшица на компактном множестве E, а множество $c(x)$ ограничено для любого $x \in E$. Далее, для любого $x \in E$ имеем $\mathrm{int}\, c(x) \ne \emptyset$. Следовательно, существуют число $L > 0$ и отображение $y(x)$ такие, что $y(x) \in c(x)$ и

$$\|y(x_1) - y(x_2)\| \le L \|x_1 - x_2\|, \quad (x_1, x_2 \in E), \quad y(x_0) = y_0.$$

Следствие 2. Пусть выполнены все условия Теоремы 3.1 и H–подпространство такое, что $\mathrm{int}\, a(x) \cap H \ne \emptyset$ для любого $x \in E$. Тогда липшицева селекция отображения $c(x) \equiv a(x) \cap H$ проходит через любую точку $(x_0, y_0) \in \mathrm{graf}\, c$, и константа в условии Липшица не зависит от выбора точки (x_0, y_0).

Доказательство. В доказательстве Теоремы 1.1 показано, что существует липшицево отображение $D(x)$ такое, что $D(x) \in \mathrm{int}\, a(x) \cap H$. Пусть $b(x) \equiv a(x) - D(x)$. Так как H – подмножество, то легко проверить, что $b(x) \cap H =$

$a(x) \cap H - D(x)$. Поэтому достаточно показать, что через точки $(\overline{x}, \overline{y})$ и $\overline{y} \in b(\overline{x}) \cap H$ проходят липшицевы селекции отображения $b(\overline{x}) \cap H$ (с одной и той же константой Липшица). Легко проверить, что такими будут отображения $y(\overline{x}, \overline{y}, x) = \overline{y}r(\overline{x}, \overline{y})/\,r(x, \overline{y})$, построенные при доказательстве теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть a – многозначное отображение с выпуклыми, замкнутыми значениями, H-непрерывно на компактном множестве $E \subset X$, а Y – гильбертово пространство. Если $G \subseteq a(x_0)$ – компактное множество, то некоторые селекторы отображения a проходят через точки (x_0, z), где $z \in G$, и семейство этих селекторов является компактным множеством в пространстве $C(E, Y)$.*

Доказательство. Полагая, что $z \in G$, положим

$$M_i(z,x) = \{y \in Y : \|y - z\| \le d(z, a(x)) + 1/i\},\ F_i(z,x) = a(x) \cap M_i(z,x), i = 1, 2, \ldots$$

Многозначные отображения $M_i(z,x)$ очевидно H-непрерывны. Кроме того, существует число $\Delta > 0$ такое, что $M_i(z,x) \subseteq B_\Delta(0)$. Имеем $B_{1/i}(0) \subseteq a(x) - M_i$ $(x \in E)$. Следовательно, по Теореме 16 из [5] (стр. 121), отображения $F_i(z,x)$ также непрерывны по $(z,x) \in G \times E$. Значит, по теореме Майкла [7] существуют непрерывные отображения $y_i(z,x) \in F_i(z,x)$. Пусть $y(z,x)$ – проекция точки z на выпуклое, замкнутое множество $a(x)$, т.е. $\|z - y(z,x)\| = d(z, a(x))$. Тогда из Теоремы 2.1.2 в [9] следует, что

$$\|y(z,x) - y_i(z,x)\| \le \frac{4}{i}\left(\frac{1}{i} + 2d(z, a(x))\right). \tag{3.2}$$

Функция $f(z,x) \equiv d(z, a(x))$ непрерывна и поэтому ограничена на компактном множестве $G \times E$. Следовательно, ввиду (3.2) последовательность функций равномерно сходится к $y(z,x)$. Значит, $y(z,x)$ непрерывна на компактном множестве $G \times E$, и $y(z,x_0) = z$, $y(z,x) \in a(x)$ $(x \in E)$. Следовательно, $y(z,x)$ равномерно непрерывна и ограничена на $G \times E$, т.е. $y(z,x)$ компактна. Теорема 3.2 доказана.

Abstract. The paper considers several parametrized problems of convex programming and shows that under some natural assumptions the sets of optimal solutions are Lipschitz multivalued, convex mappings. It is proved that Lipschitz multivalued mappings that have convex closed values on compact sets are representable by the functions of the Lipschitz selections of these mappings.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Р. Хачатрян, Р. А. Хачатрян, "О непрерывности многозначных отображений", Уч. записки, ЕГУ, № 3, стр. 3 – 13, 2003.

2. Р. А. Хачатрян, "О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 37, № 2, стр. 30 – 40, 2002.
3. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, Оптимальное Управление, Наука, Москва, 1979.
4. Дж. Варга, Оптимальное Управление Дифференциальными и Функциональными Уравнениями, Москва, Наука, 1977.
5. Ж. П. Обен, И. Экланд, Прикладной Нелинейный Анализ, Москва, Мир, 1988.
6. T. R. Rockafellar, R. J-B. Wets, Variational Analysis, Springer Verlag, Berlin, 1998.
7. E. Michael, "Continuous selections", Ann. Math. vol. 63, no. 2, pp. 361 – 382, 1956.
8. В. В. Арутюнян, "О дифференциальных свойствах однозначных ветвей функций минималей в гладких параметризованных экстремальных задачах", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 2, стр. 180 – 192, 1987.
9. П.-Ж. Лоран, Аппроксимация и Оптимизация, Москва, Мир, 1975.

Поступила 18 ноября 2003