Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 55-60

ПИКОВЫЕ МНОЖЕСТВА ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА АЛГЕБР

К. Л. Панкратьева

Казанский государственный университет

Резюме. В статье устанавливается связь между полугруппами и пиковыми множествами для равномерных алгебр.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть G – компактная абелева группа с двойственной группой $\widehat{G}$, изометричной аддитивной группе Γ. Для любого $\alpha \in \Gamma$ через χ^α обозначим соответствующий характер в $\widehat{G}$. Каждая функция $f \in L^1(G, d\sigma)$, где σ – нормированная мера Хаара на G, обладает формальным рядом Фурье, т.е.

$$f \sim \sum_{\alpha \in \Gamma} c_\alpha^f \chi^\alpha,$$

с коэффициентами Фурье

$$c_\alpha^f = \int_G f \chi^{-\alpha} d\sigma.$$

Множество $\mathrm{Sp} f$ всех $\alpha \in \Gamma$, для которых $c_\alpha^f \neq 0$, называется спектром функции f. Функции, непрерывные на G, формируют коммутативную Банахову алгебру $C(G)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup |f|$.

Напомним, что подалгебра A банаховой алгебры $C(G)$ разделяет точки G, если для каждой пары $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in G$ существует функция $f \in A$ такая, что $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Алгебра $A \subset C(G)$ называется равномерной алгеброй на G, если A содержит постоянную, разделяет точки G и замкнута в равномерной норме G. Пусть S – под-полугруппа группы Γ и пусть $A_S = \{f \in C(G) : \mathrm{Sp}\, f \subset S\}$. Как хорошо известно, A_S является равномерной алгеброй, тогда и только тогда, когда $0 \in S$ (т.е. 0 является единицей группы Γ) и $S + (-S) = \Gamma$.

Имеется связь между свойствами S и A_S. Например, $S = \Gamma$ по теореме Шоуна-Вейерштрасса. Кроме того, $A_S = C(G)$, и, по теореме Аренса–Зингера, множество максимальных идеалов A_S совпадает с множеством полухарактеров S, т.е. полугрупповым гомоморфизмом, переводящим S в единичный круг $D = \{|z| \leq 1\}$.
Данная статья посвящена исследованию p-множеств A_S по полугруппам подполугруппы S.

Автор благодарен профессору Сурену Григоряну за многочисленные полезные обсуждения.

§1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Единичный круг $D = \{|z| \leq 1\}$ комплексной плоскости $\mathbf{C}$ является полугруппой по отношению к естественному произведению комплексных чисел. Функция $m : S \to D$ называется **полухарактером**, если

$$m(a+b) = m(a) \cdot m(b) \quad \text{и} \quad m(0) = 1.$$

Пусть M_S – множество полухарактеров в S. Тогда, согласно теореме Аренса-Зингера (см. [1]), M_S является также пространством максимальных идеалов алгебры A_S. Кроме того, множество M_S является полугруппой с поточечной операцией

$$(m_1 m_2)(a) = m_1(a) \cdot m_2(a), \quad m_1, m_2 \in M_S.$$

Единицей в M_s является элемент $e \in M_s$ такой, что $e(a) = 1$ для всех $a \in S$. Множество

$$G_S = \{a \in S : a + b = 0 \quad \text{при некотором} \quad b \in S\}$$

является максимальной группой в S, а $J_S = S \setminus G_S$ – идеалом в S. Нулевой элемент в M_S есть функция

$$\theta(a) = \begin{cases} 1, & a \in G_S \\ 0, & a \in J_S \end{cases} \qquad (\theta : S \to \{0,1\}). \tag{1}$$

Под-полугруппа H полугруппы S называется **алгебраически замкнутой** в S, если $A \in H$ для $na \in H$ при некоторых $a \in S$ и $n \in \mathbf{Z}_+ \setminus \{0\}$.
Пусть $N(H)$ – алгебраическое замыкание H в S. Тогда, легко видеть, что $N(H)$ является полугруппой в S. Обозначим через Γ_H группу, порождённую H, т.е. $\Gamma_H = H + (-H)$.
Полугруппа $H \subset S$ называется полной в S, если $H = \Gamma_H \cup S$. Любое $H \subset S$ может быть **дополнено** в S до $H^* = \Gamma_H \cup S$.
Множество $E \subset G$ называется **пиковым** для A_S, если существует $f \in A$ такая, что $f(a) = 1$ при любом $\alpha \in E$ и $|f(a)| < 1$ при любом $\alpha \in G \setminus E$. Множество

$E \subset G$ называется **p-множеством** (см. [2]), если оно является пересечением пиковых множеств. Например,

$$G_a = \{\alpha \in G : \chi^a(\alpha) = 1\}, \quad a \in S$$

суть пиковые множества для A_S, и в этом случае можно брать $f = (1 + \chi^a)/2$.

§2. ИДЕМПОТЕНТНЫ В M_S

Элемент $m \in M_S$ называется **идемпотентом**, если $m^2 = m$. Множество Id_S всех идемпотентов в M_S является под-полугруппой полугруппы M_S, а функция (1) является полухарактером из M_S.

Лемма 2.1. *Для любого идемпотента $m \in M_S$, полугруппа $S_0^m = \{a \in S : m(a) = 1\}$ полна в S.*

Доказательство. Пусть $b \in \Gamma_{S_0^m} \cup S$. Тогда существуют $a, c \in S_0^m$ такие, что $b = a - c$, и тем самым $a = b + c$. Следовательно, $1 = m(a) = m(b+c) = m(b) \cdot m(c) = m(b)$. Последнее означает, что $b \in S_0^m$. Лемма 2.1 доказана.

Положим $S_1^m = \{a \in S : m(a) = 0\}$ и напомним, что полугруппа H называется **идеалом**, если $a + b \in H$, для любых $a \in S$ и $b \in H$.

Теорема 2.1. *Если H – алгебраически замкнутый идеал в S, то в Id_S имеется множество идемпотентов $\{m\}$ таких, что*

$$H = \bigcap_{m \in \{m\}} S_1^m.$$

Доказательство. Пусть $a \in S \setminus H$ и $K_a = \{b \in S : \exists c \in S$ такое, что $b + c \in \mathbf{Z}_+ a\}$ является под-полугруппой полугруппы S. Тогда, очевидно, $a \in K_a$. Покажем, что $K_a \cap H = \emptyset$. Если $b \in K_a \cap H$, то $b + c \in H$ для любого $c \in S$, поскольку H – идеал в S. Следовательно, $\mathbf{Z} \subset H$, т.е. $a \in H$. Пришли к противоречию, поскольку $J_a = S \setminus S_a$ содержится в S и $a \neq J_a$. Определим теперь идемпотент в $m_a \in Id_S$ следующим образом :

$$m_a(b) = \begin{cases} 1, & b \in K_a, \\ 0, & b \in J_a. \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $H = \bigcup_{a \in S \setminus H} J_a$. Теорема 2.1 доказана.

§3. p–МНОЖЕСТВА

Если $H \subset S$ – полугруппа, то группа $H^\perp = \{\alpha \in G : \chi^a(\alpha) = 1$ для всех $a \in H\}$ является компактной подгруппой G. Далее, если $H_1 \subset H_2$ – какие-либо под-полугруппы в S, то $H_2^\perp \subseteq H_1^\perp$, и $H^\perp$ является p-множеством для A_S, поскольку $H^\perp = \bigcap_{a \in H} G_a$, где $G_a = \{\alpha \in G : \chi^a = 1\}$ – пиковое множество для A_S.

Полагая, что G_0 – подгруппа группы G, определим

$$G_0^{\perp} = \{a \in S : \chi^a(\alpha) = 1, \ \alpha \in G_0\}$$

и отметим, что $G_0^{\perp}$, очевидно, является под-полугруппой в S и из $G_0 \subset G_1$ вытекает $G_1^{\perp} \subset G_0^{\perp}$.

Лемма 3.1. *Следующие два условия эквивалентны :*

a) H – полная полугруппа,

b) $(H^{\perp})^{\perp} = H$.

Доказательство. Для доказательства импликации $a) \Longrightarrow b)$, предположим, что $G_0 = \Gamma_H^{\perp} = \{\alpha \in G : \chi^b(\alpha) = 1 \ \ \text{для всех} \ \ b \in \Gamma_H\}$. Далее заметим, что $G_0^{\perp} = \Gamma_H$, поскольку группа Γ_H различает классы смежности G по G_0. Кроме того, для любого $b \in \Gamma_H$ существуют некоторые $a, c \in H$ такие, что $b = a - c$. Тем самым, $G_0 = H^{\perp}$. Пусть теперь $a \in (H^{\perp})^{\perp} = G_0$. Тогда $a \in \Gamma_H$ и $a \in H$ ввиду a). Следовательно, $(H^{\perp})^{\perp} \subset H$, и $(H^{\perp})^{\perp} = H$ ввиду тривиального включения $(H^{\perp})^{\perp} \supset H$.

Для доказательства импликации $b) \Longrightarrow a)$ заметим, что если $b \in \Gamma_H \cap S$, то $b \in (\Gamma_H^{\perp})^{\perp}$, и $b \in (H^{\perp})^{\perp}$, поскольку $\Gamma_H^{\perp} = H^{\perp}$. Следовательно, H – полная полугруппа. Лемма 3.1 доказана.

По лемме 3.1, $(H^{\perp})^{\perp} = \Gamma_H \cap S$, т.е. $(H^{\perp})^{\perp}$ – дополнение H до S.

Лемма 3.2. *Следующие два условия эквивалентны :*

a) G_0 является p-множеством для алгебры A_S,

b) $(G_0^{\perp})^{\perp} = G_0$.

Доказательство. Для доказательства импликации a)$\Longrightarrow$b) покажем, что для каждого $\alpha \notin G_0$ существует χ^{a_0} $(a_0 \in G_0^{\perp})$ такое, что $\chi^{a_0} \neq 1$. Так как G_0 является p-множеством, то существует функция $f \in A_S$ такая, что $\|f\|_\infty = 1$, $f(\alpha) = 0$ и $f(\beta) = 1$ при любом $\beta \in G_0$. К тому же A_s – алгебра, инвариантная относительно сдвига. Следовательно, функция

$$g(\beta) = \int_{G_0} f(\beta_\gamma) d\tau(\gamma),$$

где τ – нормированная мера Хаара на G_0, принадлежит A_S. Легко видеть, что $g \equiv 1$ в G_0 и $|g| < 1$ в αG. Кроме того, функция g постоянна на смежных множествах G по G_0 и $\mathrm{Sp}\ g \subset G_0^{\perp}$, т.е.

$$g \sim \sum_{a \in G_0^{\perp}} c_a^f \chi^a.$$

Поскольку $|g(\alpha)| < g(e) = 1$, то существует $a_0 \in G_0^\perp$ такое, что $\chi^{a_0}(\alpha) \neq 1$. Следовательно, $(G_0^\perp)^\perp = G_0$.

Теперь докажем импликацию b)$\Longrightarrow$a). Если $H \subset S$ – полугруппа, тогда, очевидно, $H^\perp$ является p-множеством для A_S. Следовательно, из $(G_0^\perp)^\perp = G_0$ вытекает, что G_0 является p-множеством для A_S. Лемма 3.2 доказана.

Пусть P_S – множество всех полугрупп группы G, являющихся p-множествами для A_S, и пусть K_S – множество всех полных под-полугрупп в S. В силу лемм 3.1 и 3.2, операция "$\perp$" порождает взаимнооднозначное соответствие между K_S и P_S. Итак, верна следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существует взаимнооднозначное соответствие между всеми замкнутыми под-полугруппами полугруппы S и всеми подгруппами G, являющимися p-множествами алгебры A_S.*

Сужения характеров из G в $G_0 \subset G$ – характеры в G_0. Следовательно, операция сужения порождает полугрупповой гомоморфизм между полугруппой S и аддитивной под-полугруппой S_{G_0} аддитивной группы, изоморфной $\widehat{G}_0$. Компактная подгруппа G_0 группы G называется **антисимметричной** (по отношению к S), если полугруппа S_{G_0} не имеет тривиальной полугруппы. Иначе говоря, G_0 антисимметрично, если $\chi^a|_{G_0} = 1$ и $\chi^b|_{G_0} = 1$ для всех $a, b \in S$ таких, что $\chi^{a+b}|_{G_0} \equiv 1$. Пусть $P_S^0 = \{G \in P_S : G_0 - -$ антисимметричная группа$\}$ и пусть $K_S^0 = \{S_0^m : m \in \mathrm{Id}_S\}$.

Теорема 3.2. *Операция "$\perp$" порождает взаимнооднозначное соответствие между K_S^0 и P_S^0.*

Доказательство. Для доказательства включения $G_0 = (S_0^m)^\perp \in P_S^0$ предположим, что a и b суть элементы S такие, что $\chi^{a+b}|_{G_0} \equiv 1$. Тогда $a + b \in S_0^m$, и $a, b \in S_0^m$, поскольку $S = S_0^m \cup S_1^m$ и S_1^m – идеал в S. Тем самым $G_0 \in P_S^0$.

Обратно, пусть G_0 – какая-либо группа в P_S^0. Тогда $S_0 = G_0^\perp$ – замкнутая под-полугруппа в S и $S_1 = S \setminus S_0$ – полугруппа. Действительно, если $a, b \in S_1$, то $\chi^a|_G \not\equiv 1$, и тем самым $a+b \in S_1$. Если же $a \in S_0$ и $b \in S_1$, то $\chi^{a+b}|_{G_0} = \chi^b|_{G_0} \not\equiv 1$. Следовательно, S_1 – идеал в S. Введём теперь идемпотент $m \in \mathrm{Id}_S$ следующим образом :

$$m(a) = \begin{cases} 1, & a \in S_0, \\ 0, & a \in S_1. \end{cases}$$

и заключаем, что $S_0 = S_0^m$.

Abstract. The paper establishes a connection between semigroups and peak sets of associated uniform algebras.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Arens, I. Singer, "Generalized analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 81, pp. 379 – 393, 1953.
2. T. Gamelin, Uniform algebras. Prentice-Hall, 1969.
3. T. Tonev, Big-Planes, boundaries and function algebras. North Holland, 1992.

Поступила 3 апреля 2004