Известия НАН Армении. Математика, 39, № 3, 2004, 47-54

АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛИНОМАМИ ДИРИХЛЕ : РАВНОМЕРНОСТЬ И СКОРОСТЬ

М. С. Мартиросян

Ереванский государственный университет
E-mail : mhersm@yahoo.com

Резюме. В статье доказано, что если функция $f \in L^2(0,\infty)$ аппроксимируется со скоростью геометрической прогрессии полиномами Дирихле с показателями из $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \delta > 0, |\arg\lambda| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\}$, то f допускает аналитическое продолжение во внутренность некоторого угла с вершиной в начале координат. В случае, когда показатели экспонент имеют предельные точки на отрезке мнимой оси, предложен метод L^p-суммирования биортогонального разложения по неполной системе экспонент и доказана равномерность этого суммирования внутри угловой области.

§0. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим полиномы из так-называемой системы Дирихле

$$\{e^{-\lambda_k x}, xe^{-\lambda_k x}, \ldots, x^{m_k-1}e^{-\lambda_k x}\}_{k=1}^{\infty}. \tag{1}$$

Если функция $f \in L^2(0,\infty)$ аппроксимируется полиномами Дирихле с неограниченной $\lambda_k > c > 0$ со скоростью геометрической прогрессии, то f имеет аналитическое продолжение внутри некоторого угла с вершиной в начале координат (см. [1] и [2]).

Метод, предложенный в работе [1] позволяет обобщить этот результат, рассматривая точки λ_k из области $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \geq \delta > 0, |\arg\lambda| \leq \vartheta < \frac{\pi}{2}\}$. Это обобщение представлено в первом параграфе настоящей работы. Пусть неограниченная последовательность λ_k удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{m_k \mathrm{Re}\,\lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} < \infty$, которое эквивалентно (см. [3], [4]) условию неполноты системы (1) в $L^2(0,\infty)$. В этом случае, В. Х. Мусоян доказал (см. [5]), что при дополнительном условии $\limsup\limits_{|\lambda_k|\to\infty} |\arg\lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ (т.е. показатели λ_k лежат в "обобщённом угле" правой полуплоскости) верна следующая теорема : **если последовательность конечных линейных комбинаций функций из системы (1) сходится по норме**

пространства $L^p(0,\infty)$, $1 \le p \le 2$, то она равномерно сходится на любом компактном подмножестве угла $\Delta_{\varphi_0} = \{z : |\arg z| < \varphi_0\}$.

Поставим следующую задачу : **пусть Ω_p – замыкание линейной оболочки системы (1) в $L^p(0,\infty)$. Указать для каждой функции $f \in \Omega_p$ последовательность полиномов Дирихле, порождённых системой (1), равномерно аппроксимирующую аналитическое продолжение функции f внутри угла Δ_{φ_0}.**

Эта задача сводится к суммированию биортогонального разложения функции $f \in \Omega_p$ по системе (1) методом В. Х. Мусояна, предложенным для случая $p = 2$ в работе [6]. Там использована гильбертова структура пространства $L^2(0,\infty)$ и для каждой функции $f \in \Omega_2$ (см. [6]) построена последовательность полиномов Дирихле $S_n(f)(x)$, порождённая системой (1) такая, что $S_n(f)(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ в пространстве $L^2(0,\infty)$. Во втором параграфе настоящей работы доказано, что для любой функции $f \in \Omega_p$, $1 < p \le 2$, существует последовательность $S_n(f)(x)$, которая сходится к $f(x)$ по нормам любого из пространств $L^r(\eta,\infty)$, $2 \le r < \infty$, для каждого положительного η. Это оказывается достаточным для решения поставленной задачи.

§1. РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМОЙ ДИРИХЛЕ

Пусть $a \in (0,\infty)$, $\vartheta \in [0, \frac{\pi}{2})$, $n \in N$, а $H_n(a,\vartheta)$ – множество всевозможных полиномов Дирихле

$$\sum_k \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} z^s e^{-\lambda_k z}, \quad a_{ks} \in \mathbb{C}, \quad m_k \in N$$

таких, что

$$\sum_k m_k = n, \quad \operatorname{Re} \lambda_k \ge a, \quad |\arg \lambda_k| \le \vartheta. \tag{1.1}$$

Далее, пусть $f \in L^2(0,\infty)$ и $E_n(f) = \inf\limits_{P \in H_n(a,\vartheta)} \|f - P\|_{L^2(0,\infty)}$.

Следующая теорема совпадает с результатом В. Х. Мусояна работы [1], в частном случае $\vartheta = 0$.

Теорема 1.1. *Если* $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt{E_n(f)} = b < 1$, *то f имеет аналитическое продолжение во внутренность угла*

$$\left\{ z : |\arg z| < \min\left[\frac{\pi}{2} - \vartheta, \arcsin\frac{1-b}{1+b}\right]\right\}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Пусть

$$P(z) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks} z^s e^{-\lambda_k z} \in H_n(a,\vartheta) \quad \text{и} \quad W(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} \left(\frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \overline{\lambda}_k}\right)^{m_k}.$$

Введём функцию (см. [1])

$$K(z,z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-\lambda z}\,d\lambda}{W(\lambda)} \overline{\left\{ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{e^{-\zeta z}d\zeta}{W(\zeta)(\zeta+\overline{\lambda})} \right\}}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

где Γ – замкнутый контур, лежащий в открытой правой полуплоскости и охватывающий внутри себя все нули произведения Бляшке $W(\lambda)$. Тогда справедлива следующая оценка (см. [7]) :

$$|P(z)| \le \sqrt{K(z,z)} \cdot \|P\|, \;\; z \in \mathbb{C}, \tag{1.4}$$

где $\|P\|$ – норма пространства $L^2(0,\infty)$.

В качестве контура Γ выберем контур $\Gamma = \Gamma(\gamma,\varphi,r)$ с положительным направлением обхода, состоящий из прямолинейных отрезков $[re^{i\varphi}, \gamma a\cos^{-1}\varphi e^{i\varphi}]$ $[\gamma a\cos^{-1}\varphi e^{i\varphi}, \gamma a\cos^{-1}\varphi e^{-i\varphi}]$, $[\gamma a\cos^{-1}\varphi e^{-i\varphi}, re^{-i\varphi}]$ и из дуги окружности $|\lambda| = r$, идущий из точки $re^{-i\varphi}$ до точки $re^{i\varphi}$, где $\gamma \in (0,1)$, $\varphi \in (\vartheta, \frac{\pi}{2})$, а r выбран настолько большим, чтобы $\Gamma(\gamma,\varphi,r)$ охватывал все нули функции $W(\lambda)$.

Выберем последовательность полиномов $P_n \in H_n(a,\vartheta)$ таких, что $\|P_n - f\| \le 2E_n(f)$, $n = 1,2,\ldots$. Поскольку $E_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$, то ряд $P_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(P_{k+1} - P_k)$ сходится в пространстве $L^2(0,\infty)$ к функции f. Пусть K – компактное подмножество угла $\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi\}$. Тогда из (1.3) и (1.4) получается оценка (см. [1]) $|P_{k+1}(z) - P_k(z)| \le M\cot^{2k}\frac{\varphi}{2}E_k(f)$ $(z \in K)$, для некоторого постоянного $M = M(a,\gamma,\varphi,K)$.

Заметим, что $\tan^2\frac{\vartheta}{2} < \tan^2\frac{\varphi}{2} < 1$ при $\varphi \in (\vartheta, \frac{\pi}{2})$. Поэтому для произвольного числа $\varepsilon \in (\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b, 1-b)$ существует $\varphi \in (\vartheta, \frac{\pi}{2})$ такое, что $\tan^2\frac{\varphi}{2} = b + \varepsilon$. С другой стороны, имеет место неравенство $E_k(f) < (b+\frac{\varepsilon}{2})^k$ для $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k. Следовательно, выбрав $\max\{0, \tan^2\frac{\vartheta}{2} - b\} < \varepsilon < 1 - b$, получим $|P_{k+1}(z) - P_k(z)| < M_1 q^k$, $k > k_0$, $z \in K$, где $q = (b+\frac{\varepsilon}{2})(b+\varepsilon)^{-1}$. Это означает, что ряд $P_1 + \sum_{k=1}^{\infty}(P_{k+1} - P_k)$ равномерно сходится на компакте K, и, следовательно, равномерно сходится внутри угла

$$|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1-(b+\varepsilon)}{1+(b+\varepsilon)} = \arcsin\frac{1-(b+\varepsilon)}{1+(b+\varepsilon)}.$$

Поскольку функция $\arcsin\frac{1-t}{1+t}$ убывает на положительной полуоси, то устремив $\varepsilon \to \max\{0, \tan^2\frac{\vartheta}{2} - b\}$, получим, что при $\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b \le 0$ ряд равномерно сходится внутри угла $\{z : |\arg z| < \arcsin\frac{1-b}{1+b}\}$, а при $\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b \ge 0$ наш ряд равномерно сходится внутри угла $\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \vartheta\}$. Остаётся проверить, что неравенство $\tan^2\frac{\vartheta}{2} - b \le 0$ эквивалентно неравенству $\arcsin\frac{1-b}{1+b} \le \frac{\pi}{2} - \vartheta$. Теорема доказана.

§2. СУММИРОВАНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ПО НЕПОЛНОЙ СИСТЕМЕ ДИРИХЛЕ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЭКСПОНЕНТ

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ – последовательность различных комплексных чисел в открытой правой полуплоскости такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k \operatorname{Re} \lambda_k}{1+|\lambda_k|^2} < \infty. \tag{2.1}$$

Тогда (см. например, [8], [9]) система (1) неполна относительно любого из пространств $L^q(0,\infty)$, $2 \le q < \infty$. Условие (2.1) гарантирует сходимость в правой полуплоскости произведения Бляшке

$$W(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda - \lambda_k}{\lambda + \overline{\lambda}_k} \cdot \frac{|1-\lambda_k^2|}{1-\lambda_k^2} \right\}^{m_k},$$

n-ое частное произведение которого будем обозначать через $W_n(\lambda)$.

Предположим, что $f \in L^p(0,\infty)$, $1 < p \le 2$. Тогда функция (см. [10], стр. 21) $\hat{f}(\xi) = \int\limits_0^\infty \overline{f(t)} e^{-\zeta t} dt$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$ принадлежит классу Харди H^q $(q = p(p-1)^{-1})$ в правой полуплоскости, и, поэтому, почти везде на мнимой оси имеет угловые граничные значения $\hat{f}(i\tau) \in L^q(-\infty,\infty)$. Введём функцию

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\hat{f}(i\tau)} d\tau}{\overline{W(i\tau)}(i\tau - \lambda)}, \quad \operatorname{Re} \lambda > 0,$$

где $W(i\tau) = \lim\limits_{\lambda \to i\tau} W(\lambda)$ – функция угловых пределов, существующая для почти всех $\tau \in (-\infty, +\infty)$. Пусть $\psi_{ks}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, \ldots, m_k - 1$ – биортогональная система функций, порождённая системой (1) в пространствах $L^q(0,\infty)$, $2 \le q < \infty$. Коэффициенты биортогонального разложения функции $f \in L^p(0,\infty)$ можно представить в виде (см. [6], [11])

$$a_{ks}(f) = \frac{(-1)^s}{s!} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c_k} \frac{F(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^s}{W(\lambda)} d\lambda, \tag{2.2}$$

где c_k – окружность с центром в точке λ_k, целиком лежащая в открытой правой полуплоскости и неохватывающая других точек λ_j, $j \ne k$.

Пусть теперь последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ неограничена и удовлетворяет не только условию (2.1), но и условию

$$\limsup_{|\lambda_k| \to \infty} |\arg \lambda_k| = \varphi_0 < \frac{\pi}{2}. \tag{2.3}$$

Обозначим через $\Omega_p^{(\eta)}$ замкнутую линейную оболочку системы (1) в пространстве $L^p(\eta,\infty)$, $1 < p < \infty$, $\eta \geq 0$. Тогда биортогональное разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)x^s e^{-\lambda_k x} \tag{2.4}$$

суммируемо в следующем смысле.

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p \leq 2$. Тогда для любых чисел $\eta \in (0,\infty)$ и $r \in [2,\infty)$ выполняется $\Omega_p^{(0)} \subseteq \Omega_r^{(\eta)}$. Более того, если $f \in \Omega_p^{(0)}$, то*

$$\|S_n - f\|_{L^r(\eta,\infty)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{2.5}$$

где

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)(-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s}\{e^{-\lambda x}\tau_n(\lambda)\}_{\lambda=\lambda_k} \quad \text{и} \quad \tau_n(\lambda) = \frac{W(\lambda)}{W_n(\lambda)}.$$

Для доказательства Теоремы 2.1 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты. Выберем произвольное число $\varphi : \varphi_0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и пусть γ – положительно направленный контур, состоящий из лучей $\gamma_1 = (\infty e^{i\varphi}, a + i\sigma)$, $\gamma_5 = (a - i\sigma, \infty e^{-i\varphi})$ и из отрезков $\gamma_2 = [a + i\sigma, i\sigma]$, $\gamma_3 = [i\sigma, -i\sigma]$, $\gamma_4 = [-i\sigma, a - i\sigma]$. Числа $a > 0$ и $\sigma > 0$ выберем так, чтобы внутренняя область контура γ содержала все точки λ_k, а отрезки γ_2, γ_4 находились бы на положительном расстоянии от множества $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Тогда (см. [6])

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\lambda)}{W_n(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. *Для любых $\eta \in (0,\infty)$ и $r \in [2,\infty)$ выполняется соотношение*

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ S_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)} e^{-\lambda x} d\lambda \tag{2.7}$$

по норме пространства $L^r(\eta,\infty)$.

Доказательство. Если K – компактное множество внутри угла $|\arg\xi| < \frac{\pi}{2} - \varphi$, то существуют (см. [12]) некоторые положительные постоянные μ и R_1 такие, что

$$|e^{-\lambda x} W^{-1}(\lambda)| \leq e^{-\mu R} \tag{2.8}$$

при $x \in K$ и $\lambda = Re^{i\varphi}$ $(R > R_1)$. Имеем $F(\lambda) \in H^q$ $(\mathrm{Re}\,\lambda > 0)$, $q = p(p-1)^{-1}$. Следовательно, функция $F(\lambda)$ равномерно стремится к нулю при $\lambda \to \infty$,

оставаясь внутри любой фиксированной полуплоскости $\mathrm{Re}\,\lambda \geq h > 0$. Поэтому, для данного $\varepsilon > 0$ можно выбрать R_2 достаточно большим так, чтобы имело место неравенство

$$|F(\lambda)| < \frac{\mu}{2}\varepsilon, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad |\lambda| > R_2. \tag{2.9}$$

Рассмотрим интегралы

$$J_n^{(k)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} \{W_n^{-1}(\lambda) - W^{-1}(\lambda)\}F(\lambda)e^{-\lambda x}d\lambda, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Используя оценки (2.8) и (2.9) можно доказать, что $\|J_n^{(k)}\|_{L^r(\eta,\infty)} \to 0$ $(n \to \infty)$, $k = 1, 5$. Кроме того, при $k = 2, 4$ $\max\limits_{\gamma_k}|F(\lambda)| < \infty$ и $\max\limits_{\gamma_k}|W_n^{-1}(\lambda) - W^{-1}(\lambda)| \to 0$ $(n \to \infty)$ (отрезки γ_2 и γ_4 расположены на положительном расстоянии от множества нулей функции $W(\lambda)$). Следовательно, $\|J_n^{(k)}\|_{L^r(\eta,\infty)} \to 0$ $(n \to \infty)$, $k = 2, 4$. Теперь представим $J_n^{(3)}(x)$ в виде

$$J_n^{(3)}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\sigma}^{\sigma} F(i\tau)\{W_n^{-1}(i\tau) - W^{-1}(i\tau)\}d\tau.$$

Поскольку $F(i\tau) \in L^q(-\infty, \infty)$, $q = p(p-1)^{-1}$, то $F(i\tau) \in L^s(-\sigma, \sigma)$ для любого $s \in (1, 2]$. Поэтому $\|J_n^{(3)}\|_{L^r(0,\infty)} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Доказательство Теоремы 2.1. Пусть $f \in \Omega_p^{(0)}$, $1 < p \leq 2$. Обозначим

$$C_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F_n(\lambda)}{W_n(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda, \qquad F_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{\hat{f}(i\tau)}d\tau}{\overline{W_n(i\tau)}(i\tau - \lambda)}, \quad \mathrm{Re}\,\lambda > 0.$$

Подставив второе выражение в первое и применив теорему Фубини, получим (см. [5]) $C_n(x) = \int\limits_0^\infty f(t)K_n(x,t)dt$, $x > 0$, и следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} C_n(x) = \int\limits_0^\infty f(t)K(x,t)dt, \; x > 0. \tag{2.10}$$

С другой стороны имеем (см. [7])

$$f(x) = \int_0^\infty f(t)K(x,t)dt, \quad x > 0. \tag{2.11}$$

Методом доказательства Леммы 2.1 можно установить, что

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\; C_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{F(\lambda)}{W(\lambda)}e^{-\lambda x}d\lambda \tag{2.12}$$

по норме пространства $L^r(\eta,\infty)$, $\eta > 0$, $2 \le r < \infty$. Следовательно, утверждение теоремы 2.1 следует из (2.10), (2.11), (2.12) и (2.7).

Замечание. Методом доказательства леммы 2.1 можно убедиться, что для "оторванных" от мнимой оси показателей справедливо следующее утверждение: если последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям

$$|\arg\lambda_k| \le \varphi_0,\ 0 \le \varphi_0 < \frac{\pi}{2},\ |\lambda_k| \ge \delta > 0, \tag{2.3'}$$

то соотношение (2.5) верно для всех $r \in (1,\infty)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия (2.1) и (2.3). Тогда для каждой функции $f \in \Omega_p^{(0)}$ $(1 < p \le 2)$ последовательность*

$$S_n(z) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=0}^{m_k-1} a_{ks}(f)(-1)^s \frac{d^s}{d\lambda^s}\left\{e^{-\lambda z} r_n(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}$$

равномерно сходится на компактных подмножествах угла $\{z : |\arg z| < \frac{\pi}{2} - \varphi_0\}$ к некоторой функции $\Phi(z)$ такой, что $\Phi\big|_{(0,\infty)} = f$.

Доказательство. Перепишем (2.5) в виде $\int\limits_0^\infty |S_n(x+\eta) - f(x+\eta)|^r dx \to 0$, $n \to \infty$, $2 \le r < \infty$, $\eta > 0$, и положим

$$P_n^{(\eta)}(x) = S_n(x+\eta), \quad f^{(\eta)}(x) = f(x+\eta). \tag{2.13}$$

Поскольку члены последовательности $\{P_n^{(\eta)}(x)\}_{n=1}^\infty$ являются конечными линейными комбинациями функций из системы (1), то её сходимость в пространстве $L^2(0,\infty)$ приводит (см. [12]) к равномерной сходимости

$$P_n^{(\eta)}(z) \to \Phi^{(\eta)}(z) \quad (n \to \infty) \tag{2.14}$$

на любом компактном подмножестве угла $\Delta_{\varphi_0} = \{z : |\arg z| < \varphi_0\}$. Пусть множество $K \subset \Delta_{\varphi_0}$ компактно. Тогда $d := dist\{K, \partial\Delta\varphi_0\} > 0$, где $\partial\Delta\varphi_0 = \{z : |\arg z| < \varphi_0\}$. Теперь положим $K^{(\delta)} = \{z - \delta : z \in K\}$, $\delta \in (0,d)$. Тогда $K^{(\delta)}$ содержится в $\Delta\varphi_0$, и согласно (2.13) и (2.14) получим $S_n(z+\delta) \to \Phi^{(\delta)}(z)$ $(n \to \infty)$ равномерно при $z \in K^{(\delta)}$. Итак, последовательность $S_n(z)$ равномерно сходится на K, т.е. она равномерно сходится внутри $\Delta\varphi_0$ и её пределом является функция $\Phi(z)$, $z \in \Delta\varphi_0$, совпадающая с $f(x)$ на $(0,\infty)$. Теорема доказана.

Abstract. The paper proves that if a function $f \in L^2(0,\infty)$ is approximated at the speed of geometrical progression by Dirichlet polynomials with exponents belonging to $\{\lambda : \mathrm{Re}\,\lambda \ge \delta > 0,\ |\arg\lambda| \le \vartheta < \frac{\pi}{2}\}$, then f admits analytic continuation into some angular domain with vertex at the origin. For the case where the exponents have limit points in a segment of the imaginary axis, an L^p-summation method of biorthogonal expansion by incomplete system of exponential functions is shown to be uniform inside an angular domain.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Х. Мусоян, "Аналитическое продолжение функций, аппроксимируемых полной системой Дирихле", ДАН Арм.ССР, том 72, № 3, стр. 135 – 140, 1981.
2. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян, "Интегральные представления и наилучшие приближения обобщенными полиномами по системам типа Миттаг–Леффлера", Изв. АН СССР, серия Математика, том 47, № 6, стр. 1182 – 1207, 1983.
3. М. М. Джрбашян, "О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\mu_k x} x^{\nu_k - 1}\}_1^\infty$", Докл. АН СССР, том 141, № 3, стр. 539 – 542, 1961.
4. М. М. Джрбашян, "Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций", Мат. Сборник, том 114 (156), № 1, стр. 3 – 84, 1981.
5. V. Kh. Musoyan, "Analytic continuation of functions permitting approximation by incomplete system of exponents in L^p", Theory of functions and applications, Collection of Works Dedicated to the memory of Mkhitar M. Djrbashian, pp. 129 – 132, "Louys", Yerevan, 1995.
6. В. Х. Мусоян, "Суммирование биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 21, № 2, стр. 163 – 186, 1986.
7. В. Х. Мусоян, "Экстремальные свойства полиномов Дирихле", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 18, № 4, стр. 253 – 270, 1983.
8. M. Grum, "On the theorems of Muntz and Szasz", J. London Math. Soc., vol. 31, pp. 433 - 437, 1956.
9. M. Grum, "On the theorems of Muntz and Szasz. Corrigendum and addendum", J. London Math. Soc., vol. 32, p. 512, 1957.
10. L. Schwartz, Etude des sommes d'exponentielles, 1-ere ed., Hermann, Paris, 1943, 2-eme ed., 1959.
11. М. С. Мартиросян, "Равномерная суммируемость биортогональных разложений по неполным системам экспонент и рациональных функций", Деп. в Арм. НИИНТИ, 15.07.98, № 93 – Ар98.
12. В. Х. Мусоян, "Аналитическое продолжение и экстремальные свойства функций, аппроксимируемых неполной системой компонент", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 6, стр. 530 – 556, 1986.

Поступила 22 марта 2003