Известия НАН Армении. Математика, **39**, *№ 3, 2004, 3-12*

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Г. М. Айрапетян

Армянский государственный инженерный университет
E-mail : hhairapet@seua.am

Резюме. В статье рассматривается задача типа Дирихле : найти действительную функцию $u(z)$ в $D^+ = \{z; |z| < 1\}$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\lim_{r\to 1-0} \|u(rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to 1-0} \left\| \frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t) \right\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{3}$$

где $f_0(t)$, $f_1(t)$ – действительные функции на единичной окружности $T = \{t : |t| = 1\}$, причём $f_0'(t) \in L^1(\rho)$, а $\rho(t)$ – измеримая, неотрицательная функция, определенная на T.

В работах [1] – [5] рассмотрены краевые задачи для аналитических и гармонических функций, когда граничные условия понимаются в смысле сходимости в среднем в классах L^1 и $L^1(\rho)$.

В этой работе исследуется задача (1) – (3), когда $t = 1$ является единственной особой точкой весовой функции $\rho(t)$, причём в этой точке функция $\rho(t)$ является RO-меняющейся (определение приведено ниже). Для любых функций $f_0(t)$, $f_1(t)$ из $L^1(\rho)$ получено одно геометрическое условие, обеспечивающее разрешимость задачи (1) – (3).

Точка $t_0 \in T$ называется **особой** для функции $\rho(t)$, если для любой окрестности $T_0 \subset T$ точки t_0 выполняется хотя бы одно из двух условий $\rho(t) \notin L^\infty(T_0)$ или $(\rho(t))^{-1} \notin L^\infty(T_0)$. Вещественную и положительную функцию $g(\theta)$, измеримую на $(-\pi, \pi]$ будем называть **RO-меняющейся справа в точке $\theta = 0$**, если её можно представить в виде (см. [6])

$$g(\theta) = \exp\left(g_1(\theta) + \int_\theta^a \frac{g_2(\lambda)}{\lambda}\, d\lambda\right), \quad a, \theta \in (0, \pi], \tag{4}$$

где $g_1(\theta)$, $g_2(\theta)$ суть измеримые и ограниченные функции в $(0, \pi]$.
Аналогично определяется класс RO-меняющихся функций в точке $\theta = 0$ слева. Если функция в точке $\theta = 0$ является RO-меняющейся и слева и справа, то будем говорить, что эта функция является **RO-меняющейся в точке $\theta = 0$**.
Так как функция $\rho(t) = \rho(e^{i\theta})$, по предположению, RO-меняющаяся в точке $t = 1$, $(\theta = 0)$, то она представима в виде (4). Из этого представления следует, что

$$\alpha = \sup\left\{\beta : \rho(t)|1 - t|^{-\beta} \in L^\infty(T)\right\} < \infty, \tag{5}$$

и в дальнейшем мы будем предполагать, что $\alpha \geq 0$. Ясно, что функция

$$\rho_1(t) = \rho_1\left(e^{i\theta}\right) = \left|1 - e^{i\theta}\right|^{-\alpha} \rho\left(e^{i\theta}\right), \tag{6}$$

RO-меняющаяся в точке нуль. Функция ρ принадлежит классу R_α, если функция g_2 из представления (4) функции $\rho_1(t) = \rho_1(e^{i\theta})$ удовлетворяет соотношениям

$$\varlimsup_{\theta \to 0} g_2(\theta) < \{\alpha\} \quad \text{и} \quad \varliminf_{\theta \to 0} g_2(\theta) > \{\alpha\} - 1,$$

если α – нецелое число, а если α – целое число, то

$$\varlimsup_{\theta \to 0} g_2(\theta) < 1 \quad \text{и} \quad \varliminf_{\theta \to 0} g_2(\theta) \geq 0.$$

В дальнейшем $\gamma = [\alpha] + 1$, если α не целое, и $\gamma = \alpha$, если α целое.
Для произвольной функции $f \in L^1(\rho)$ и целого $n \geq \gamma$, положим

$$(K_n; f)(z) = \frac{1}{2\pi(1 - z)^n} \int_T \frac{f(t)(1 - t)^n (t^{n+1} + z^{n+1})}{t^n (t - z)}\, |dt|. \tag{7}$$

Множество полиномов $P(z)$, порядок которых не больше n и коэффициенты a_k удовлетворяют условиям

$$a_k = (-1)^{n+1} \bar{a}_{n-k}, \tag{8}$$

обозначим через T_n. Многочлены такого вида обладают следующими свойствами. Если $P(z) \in T_n$, то $(1-z)P(z) \in T_{n+1}$; если $P(z) \in T_n$ делится на $(1-z)$, то $(1-z)^{-1}P(z) \in T_{n-1}$; если $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \in T_n$, то

$$\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{P_n(z)}{(1-z)^n} = \frac{Q_n(z)}{(1-z)^{n+2}}, \quad \left(\frac{\hat{d}}{dz} = z\frac{d}{dz}\right). \tag{9}$$

Здесь $Q_n(z) \in T_{n+2}$, причём сумма коэффициентов этого многочлена равна $n(n+1)(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$.

Рассмотрим граничную задачу

$$\lim_{r\to 1-0} \left\|\mathcal{R}F\left(re^{i\phi}\right) - f\left(e^{i\phi}\right)\right\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{10}$$

где $F(z)$ – искомая аналитическая функция и $f \in L^1(\rho)$. Если ρ – RO-меняющаяся функция, то эта задача исследована в работе [5].

Пусть $M(f)$ – максимальная функция Харди– Литллвуда :

$$M(f)(t) = \sup_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{|\tau-t|<h} |f(\tau|\,|d\tau|.$$

Теорема А, доказанная в [5], неоднократно будет использоваться.

Теорема А. *Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и $\rho_0(t) = |1-t|^{\alpha-\gamma}\rho_1(t)$. Тогда, если*

$$M(\rho_0(t)) < C\rho_0(t), \tag{11}$$

то задача (10) разрешима для любой функции $f \in L^1(\rho)$, и общее решение представимо в виде

$$F(z) = (K_\gamma; f)(z) + \frac{P(z)}{(1-z)^\gamma}, \tag{12}$$

где $P(z) \in T_\gamma$ – произвольный полином.

Лемма 1. *Пусть $\rho \in R_\alpha$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r^2)\|(1-rt)^{-(\gamma+1)}\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Так как $\rho(t) = |1-t|^\alpha\rho_1(t)$, то

$$\|(1-rt)^{-(\gamma+1)}\|_{L^1(\rho)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|1-t|^\alpha\rho_1(t)|dt|}{(1-rt)^{(\gamma+1)}} < \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho_1(t)|dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}}}.$$

Из определения числа α следует, что для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\rho_1(t) < C|1-t|^{-\varepsilon},$$

где C – постоянная, зависящая от ε. Если α – нецелое число, то выбирая $\varepsilon < \{\alpha\}$, получаем

$$(1-r^2)\left\|(1-rt)^{-(\gamma+1)}\right\|_{L^1(\rho)} < \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2)|dt|}{|1-rt|^{2-\{\alpha\}+\varepsilon}}.$$

Последний интеграл стремиться к нулю при $r \to 1-0$, тем самым утверждение леммы доказано, когда α – нецелое число. Для целого α доказательство аналогично.

Лемма 2. *Если $\rho(t)$ удовлетворяет условию (11), то для любого $k \geq 2$*

$$\varliminf_{r\to 1-0}(1-r^2)\left\||1-rt|^{\gamma+k}\right\|_{L^1(\rho)} > 0.$$

Доказательство. Пусть $T_k = \{t; |1-t| < (\gamma+k)^{-1}(1-r)\}$ и $t \in T_k$. Тогда

$$|\arg(1-rt)^{-(\gamma+k)}| < c_0 < \pi/2\} \quad \text{и} \quad \mathcal{R}(1-rt)^{-(\gamma+k)} > d_0|1-rt|^{-(\gamma+k)},$$

где $d_0 = \cos c_0$. Предположим, что α – нецелое число. Из (11) следует, что $\rho_1(t) > c|1-t|^{1-\{\alpha\}}$, $c > 0$. Поэтому

$$\int_T \left|\mathcal{R}\left(\frac{1-r^2}{(1-rt)^{\gamma+k}}\right)\right| \rho(t)\,|dt| > d_0 \int_{T_k} \frac{(1-r^2)\rho_1(t)|dt|}{|1-rt|^{k+1-\{\alpha\}}} >$$

$$> \frac{d_0}{2^{\gamma+k}(1-r)^{\gamma+k-1}} \int_{T_k} |1-t|^{\gamma}|dt| > \frac{c_1}{(1-r)^{k-2}}, \quad c_1 > 0.$$

Из этой оценки следует доказательство при нецелом α. Пусть теперь α – целое число. Тогда из условия (11) следует, что $\rho_1(t) > c$ для некоторого положительного c. Аналогично получаем

$$(1-r^2)\int_T \frac{\rho(t)|dt|}{|1-rt|^{\gamma+k}} > \frac{2c}{(1-r)^{k-2}}.$$

Лемма 3. *Пусть функция $\rho \in R_\alpha$ удовлетворяет условию (11) и $f \in L^1(\rho)$. Тогда*

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)\left\|((K_\gamma; f)(rt))'_z\right\|_{L^1(\rho)} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть, сначала, $f(t) \in C^{(1,\delta)}$, $\delta > 0$. Используя свойство интеграла Коши, имеем (см. [9])

$$|((K_\gamma; f)(rt))'_z| < |1-rt|^{-\gamma-1},$$

где C – константа. Поэтому для функций из класса $C^{(1,\delta)}$ соотношение (14) следует из леммы 1. Так как $C^{(1,\delta)}$ почти всюду плотно в $L^1(\rho)$, то остаётся показать, что существует постоянная C такая, что

$$(1-r)\,\|((K_\gamma; f)(rt))'_z\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}. \tag{15}$$

Из (7) при $n=\gamma$ имеем $((K_\gamma; f)(z))'_z = I_1(rt) + I_2(rt)$, где

$$I_1(rt) = \frac{\gamma}{2\pi(1-rt)^{\gamma+1}} \int_T \frac{f(t)(1-t)^\gamma (t^{\gamma+1} + (rt)^{\gamma+1})|dt|}{t^\gamma (t-rt)},$$

$$I_2(rt) = \frac{1}{2\pi(1-rt)^\gamma} \int_T \frac{f(\tau)(1-\tau)^\gamma (\tau^{\gamma+1} + (\gamma+1)tz^\gamma - \gamma(rt)^{\gamma+1})|d\tau|}{t^\gamma (\tau - rt)^2}.$$

Далее, имеем

$$(1-r)^2 \int_T |I_1(rt)|\rho(t)|dt| <$$

$$< C\int_T |f(\tau)|\rho(\tau)\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho(\tau)} \int_T \frac{(1-r)^2|1-t|}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\,\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}|dt|\,|d\tau|.$$

Так как (см. [5]),

$$\sup \frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho(\tau)} \int_T \frac{(1-r)^2|1-t|}{|1-rt|^2|\tau-rt|}\,\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}|dt|\,|d\tau| < \infty,$$

то получаем

$$(1-r)^2 \int_T |I_1(rt)|\rho(t)\,|dt| < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Аналогично, имеем

$$(1-r)^2 \int_T |I_2(rt)|\rho(t)\,|dt| < C\int_T |f(\tau)|\rho(\tau)\frac{|1-\tau|^{\alpha'}}{\rho(\tau)} \int_T \frac{(1-r)^2}{|\tau-rt|^2}\,\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}|dt|\,|d\tau|.$$

Учитывая оценку (см. [8])

$$\int_T \frac{(1-r)^2}{|\tau-rt|^2}\,\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}\,|dt| < CM\left(\frac{\rho_1(t)}{|1-t|^{\alpha'}}\right)$$

где M – максимальная функция Харди–Литтлвуда, и условие (11), получаем

$$(1-r)^2 \int_T |I_2(rt)|\rho(t)|dt| < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым, оценка (15) доказана. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $F(z)$ – аналитическая функция в D^+ и $F(z) \in C(\overline{D^+})$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ её можно представить в виде*

$$F(z) = (K_n; f(t))(z) + \frac{P_n(z)}{(1-z)^n}, \quad f(t) = \mathcal{R}F(t), \quad t \in T,$$

а $P_n(z) \in T_n$ определяется через функцию $F(z)$ однозначно. Именно, $P_n(z) = (1-z)^n(F(z) - (K_n; f))(z)$.

Доказательство. Так как функция $F(z)$ удовлетворяет граничному условию (10) при $\rho(t) = |1-t|^n$, то доказательство леммы непосредственно следует из теоремы A.

Теорема 1. *Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполняется условие (11). Тогда общее решение однородной задачи (1) – (3) можно представить в виде*

$$u(z) = \mathcal{R}\left(\frac{P_0(z)}{(1-z)^{\gamma-1}} - \frac{(1-z\overline{z})}{2}\left(\frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{\hat{d}}{dz}\frac{P_0(z)}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right), \tag{16}$$

где $P_0(z) \in T_{n-1}$, $(P_0(z) \equiv 0,\ \gamma = 0)$, $P_1(z) \in T_n$.

Доказательство. Пусть $u(z)$ - произвольное решение однородной задачи (1) – (3). Как известно (см. [7]), общее решение уравнения (1) можно представить в виде :

$$u(z) = \mathcal{R}(\Phi_0(z) + (1-|z|^2)\Phi_1(z)). \tag{17}$$

Здесь $\Phi_k(z)$, $k = 0, 1$ – произвольные аналитические функции в D^+ такие, что $\operatorname{Im}\Phi_k(z) = 0$, $k = 0, 1$. При этом функции $\Phi_k(z)$, $k = 0, 1$ определяются через функцию $u(z)$ однозначно. Полагая $u(rt) = f_r(t)$ и $\Phi_{kr}(z) = \Phi_k(rz)$ $(k = 0, 1)$, получаем

$$\mathcal{R}(\Phi_{0r}(t) + (1-r^2)\Phi_{1r}(t)) = f_r(t).$$

По лемме 4,

$$\Phi_{0r}(z) + (1-r^2)\Phi_{1r}(z) = (K : f_r)(z) + \frac{\tilde{P}_{0r}(z)}{(1-z)^\gamma},$$

где $\tilde{P}_{0r}(z) \in T_\gamma$. Так как $f_r(t)(1-t)^\gamma \to 0$ в L^1 при $r \to 1-0$, то переходя к пределу при $r \to 1-0$ в последнем равенстве получаем

$$\Phi_0(z) = \frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma}, \quad P_0(z) \in T_\gamma.$$

Далее, имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = \mathcal{R}\left(t\frac{d\Phi_0(rt)}{dz} - 2r\Phi_1(rt) + (1-r^2)t\frac{d\Phi_1(rt)}{dz}\right).$$

Аналогично получаем

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma}\right), \quad P_1(z) \in T_\gamma.$$

Подставляя $\Phi_0(z)$ и $\Phi_1(z)$ в (17), получим

$$u(z) = \mathcal{R}\left(\frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma} + \frac{1-z\bar{z}}{2}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(z)}{(1-z)^\gamma} - \frac{P_1(z)}{(1-z)^\gamma}\right)\right). \tag{18}$$

Теперь докажем, что функция (18) будет удовлетворять условиям (2) и (3) тогда и только тогда, когда функция $P_0(z)(1-z)^{-\gamma}$ представима в виде $P_0(z)(1-z)^{-(\gamma-1)}$, где $P_0(z) \in T_{\gamma-1}$. Действительно, так как согласно лемме 2

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1-r^2}{2}\left\|\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma} - \frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

то функция $u(z)$ из (18) удовлетворяет условию (2) для любых функций $\tilde{P}_0$, $P_1 \in T_\gamma$. Далее,

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = (1-r^2)r^{-1}\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right) + r\mathcal{R}\left(\frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right) +$$

$$+\frac{1-r^2}{2r}\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right) + \frac{1-r^2}{2r}\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma} - \frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right)\right).$$

Так как согласно лемме 2

$$(1-r^2)\left\|\mathcal{R}\frac{\hat{d}}{dz}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right\| \to 0,$$

$$\frac{1-r^2}{2r}\left\|\mathcal{R}\left(\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma} - \frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right)\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1-0,$$

а по теореме A

$$\left\|\mathcal{R}\left(\frac{P_1(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right)\right\| \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1-0,$$

то функция (18) удовлетворяет условию (3) тогда и только тогда, когда

$$\lim_{r\to 1-0}\frac{1-r^2}{2}\left\|\mathcal{R}\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{\tilde{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}\right\| = 0. \tag{19}$$

В силу (9) имеем

$$\frac{\hat{d}^2}{dz^2}\frac{\bar{P}_0(rt)}{(1-rt)^\gamma}=\frac{Q(rt)}{(1-rt)^{\gamma+2}}=\frac{A_0}{(1-rt)^{\gamma+2}}+\ldots,$$

где $Q(z)\in T_{\gamma+2}$, а число A_0 равно сумме коэффициентов многочлена $Q(z)$. В силу лемм 1 и 3 имеем $A_0=0$. Используя (9) получим, что сумма коэффициентов многочлена $P_0(z)=0$ равна нулю. Это означает, что $P_0(z)$ делится на $1-z$. Теорема 1 доказана.

Учитывая условия (7), теорему 1 и разлагая коэффициенты многочленов $P_k(z)$, $k=0,1$ на действительные и мнимые части, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Однородная задача (1) – (3) имеет $2\gamma-1$ линейно независимых решений над полем натуральных чисел. Если $\gamma>0$ чётное число, то эти решения представимы в виде*

$$u_{1k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{z^k+z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{z^k+z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\quad k=0,1,\ldots,\frac{\gamma}{2}-1,$$

$$u_{2k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k-z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{i(z^k-z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\ k=1,...,\frac{\gamma}{2}-1,$$

$$u_{3k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{z^k-z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\ k=0,...,\frac{\gamma}{2}-1,$$

$$u_{4k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k+z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\quad k=1,\ldots,\frac{\gamma}{2}.$$

Если же $\gamma>0$ нечётное число, то решения представимы в виде

$$u_{1k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{z^k-z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{z^k-z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\quad k=0,...,\frac{\gamma-1}{2}-1,$$

$$u_{2k}(z)=\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k+z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}+\frac{1-|z|^2}{2}\frac{\hat{d}}{dz}\left(\frac{i(z^k+z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right)\right),\ k=1,\ldots,\frac{\gamma-1}{2},$$

$$u_{3k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{z^k+z^{\gamma-1-k}}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\quad k=0,1,\ldots,\frac{\gamma-1}{2},$$

$$u_{4k}(z)=\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}\left(\frac{i(z^k-z^{\gamma-1-k})}{(1-z)^{\gamma-1}}\right),\quad k=1,\ldots,\frac{\gamma-1}{2}.$$

Теорема 3. *Пусть $\rho(t) \in R_\alpha$ и выполнено условие (11) Тогда общее решение задачи (1) – (3) представимо в виде*

$$u(z) = u_0(z) + u_1(z), \tag{20}$$

где $u_0(z)$ – общее решение однородной задачи,

$$u_1(z) = \mathcal{R}\left((K; f_0)(z) + \frac{a_0 + a_\gamma z^\gamma}{(1-z)^\gamma}\right) + \frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}((K_\gamma; tf_0')(z) - (K_\gamma; f_1)(z)), \tag{21}$$

и

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_T f_0(t)t(1-t)^{\gamma-1}d\theta, \quad a_\gamma = \frac{1}{2\pi}\int_T f_0(t)t^{-(\gamma-1)}(1-t)^{\gamma-1}d\theta.$$

Доказательство. Так как $a_0 = (-1)^{\gamma+1}a_\gamma$, то $a_0 + a_\gamma z^\gamma \in T_\gamma$ и поэтому функция

$$\mathcal{R}\left(\frac{a_0 + a_\gamma (rt)^\gamma}{(1-rt)^\gamma}\right)$$

согласно Теореме А, стремится к нулю в $L^1(\rho)$ при $r \to 1-0$. В силу леммы 3 функция

$$\frac{1-|z|^2}{2}\mathcal{R}((K_\gamma; tf_0'))(z) - (K_\gamma; f_1)(z))$$

также стремится к нулю в $L^1(\rho)$ при $r \to 1-0$. Применяя Теорему А убеждаемся, что $u_1(z)$ удовлетворяет условию (2). Далее, из (21) имеем

$$\frac{\partial u(rt)}{\partial r} = I_1(r) + I_2(r),$$

где

$$I_1(r) = \frac{1-r^2}{r}\mathcal{R}(K_\gamma; tf_0')(rt) - \mathcal{R}\frac{\gamma(a_0 + a_\gamma z^\gamma)}{(1-z)^\gamma} + r\mathcal{R}(K_\gamma; f_1)(rt)),$$

$$I_2(r) = \frac{1-r^2}{2}(\mathcal{R}((K_\gamma; tf_0')(z))_z' - \mathcal{R}((K_\gamma; f_1)(z))_z').$$

Из леммы 4 следует, что $I_2(r) \to 0$ в $L^1(\rho)$. Так как первые два слагаемых в выражении для $I_1(r)$ стремятся к нулю в $L^1(\rho)$, а последнее слагаемое по теореме А стремится к f_1, то теорема доказана.

Abstract. The paper considers a Dirichlet type problem : to find a real function $u(z)$ in $D^+ = \{z; |z| < 1\}$ satisfying the equation $\Delta^2 u = 0$ and the boundary conditions

$$\lim_{r\to1-0} \|u(rt) - f_0(t)\|_{L^1(\rho)} = 0, \quad \lim_{r\to1-0} \left\|\frac{\partial u(rt)}{\partial r} - f_1(t)\right\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

where $f_0(t)$, $f_1(t)$, $f_1'(t) \in L^1(\rho)$ are real functions on the unit circle $T = \{t : |t| = 1\}$, $\rho(t)$ is a measurable, nonnegative function defined on T.

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L^p(d\mu)$", TAM Soc., vol. 165, pp. 326 - 342, 1962.
2. R. A. Hant, B. Mackenhaupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform", TAM Soc., vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
3. Г. М. Айрапетян, "О граничной задаче сопряжения со сдвигом в классе L^1", Изв. АН Арм.ССР, серия Математика, том 22, № 3, 1987.
4. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia Math., vol. 86, no. 3, pp. 97 – 130, 1987.
5. Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом", Изв. НАН Армении, серия Математика, том 36, № 3, стр. 22 – 44, 2001.
6. E. Seneta, Regularly Varying Functions, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
7. N. E. Tovmasyan, Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics, World Scientific Publ., Singapore, 1994.
8. J. Garnet, Bounded Analytic Functions, Academic Press, NY, 1981.
9. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные Интегральные Уравнения, Москва, Наука, 1968.

Поступила 29 апреля 2003